Adıyaman Üniversitesi
Fen Bilimleri Dergisi 3 (1) (2013) 20-27

Başlangıç Şartlarında Spektral Parametre Bulunan Kompleks Terimli *N x N* Tridiagonal Matrisler İçin Ters Spektral Problemler

Manaf Manafov*, Bayram Bala

**Adıyaman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adıyaman*
mmanafov@adiyaman.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, genelleştirilmiş spektral fonksiyon kavramı karmaşık girişleri ile $N \times N$ tridiagonal simetrik matrisler (Jacobi matrisler) için tanıtılmıştır. Ayrıca bakılan problemin en önemli özelliği başlangıç şartlarında spektral parametrenin doğrusal olarak bulunmasıdır.

Anahtar kelimeler: Jacobi Matrisi, Fark Denklemleri, Genelleştirilmiş Spektral Fonksiyon.

Inverse Spectral Problems for Tridiagonal N by N Complex Hamiltonials with Spectral Parameter in the Initial Conditions

Abstract

In this paper, the concept of generalized spectral function is introduced for finite order $N \times N$ tridiagonal symmetric matrices (Jacobi matrices) with complex entries. Also the most important feature of the problem that there initial conditions, the spectral parameter linearly.

Key Words: Jacobi Matrix, Difference Equation, Generalized Spectral Function.

1. Giriş

Kompleks girişleri ile $N \times N$ tridiagonal simetrik matris (Jacobi matris)

$$J=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

her n, a_n ve b_n kompleks sayıları için a_n sıfırdan farklı olmak üzere;

$$a_n,\ b_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0. \tag{1.2}$$

Gerçek durumda

$$a_n,\ b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0. \tag{1.3}$$

J bir hermityen matris olmak üzere J matrisinin ters spektral problemi için literatürde birçok versiyonu incelenmiştir [1, 2, 3, 4].

Genelleştirilmiş spektral fonksiyon olarak adlandırılan özeşlenik olmayan ve fark operatörleri için doğal bir spektral karakteristik olan diferensiyel ifade lineer topolojik uzayda lineer sürekli fonksiyoneldir [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Genel olarak genelleştirilmiş spektral fonksiyonların yapısı hakkında ilgili çalışmalar verilen listede bulunabilir.

Bu çalışmada amacımız böyle bir matris için uygun spektral veri tanıtmak, başlangıç şartlarında spektral parametre bulunduğu durumlarda genelleştirilmiş spektral fonksiyonlar kurmak, buna paralel J matrisinin özdeğerleri ve matrisin belirlediği ters spektral problemi incelemektir.

(1.2) koşulları ile (1.1) deki J matrisi $Jy=\lambda y$ özdeğer problemi $y=\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ sütun vektörü için ikinci dereceden lineer fark denklemini verir.

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_n y_n+a_n y_{n+1}=\lambda y_n, \quad n\in\{0,1,...,N-1\}, \quad a_{-1}=0,\ a_{N-1}=1 \tag{1.4}$$

$y=\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ için, sınır koşulları

$$y_0=(1+\lambda)y_{-1}, \quad y_N=0 \tag{1.5}$$

(1.4), (1.5) problemi

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+q(x)y(x)=\lambda y(x), \quad x\in[a,b] \tag{1.6}$$

$$y'(a)=(1+\lambda)y(a); \qquad y(b)=0 \tag{1.7}$$

$[a,b]$ sonlu aralık olmak üzere sürekli özdeğer probleminin ayrık bir analogudur.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right]+q(x)y(x)=\lambda y(x), \quad x\in[0,\infty)$$

sürekli problemi $[0,\infty)$ yarı sonlu aralıkta (1.1) formundaki J Jacobi matrisine karşılık gelir.

Daha önce $(-\infty,\infty)$ aralığında J matrisi için genelleştirilmiş spektral fonksiyon ve genelleştirilmiş spektral fonksiyonun ters problemi üzerine [6-9] referans listesinde verilen çalışmalar yapılmıştır. Ancak, sonsuz aralıkta J matrisi için genelleştirilmiş spektral fonksiyonun yapısı hakkında karmaşık ve zor olduğundan fazla bir açıklama yapılmamıştır. Bu çalışmada ise $[a,b]$ aralığında J matrisi için genelleştirilmiş spektral fonksiyonun yapısı ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

2. Genelleştirilmiş Spektral Fonksiyon

(1.2) verileri ile (1.1) formundaki J matrisini aşağıdaki gibi ifade edelim.

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_n y_n+a_n y_{n+1}=\lambda y_n, \quad n\in\{0,1,\ldots,N-1\}, \quad a_{-1}=0, \ a_{N-1}=1 \tag{2.1}$$

ikinci dereceden lineer fark denklemine eşdeğer $y=\left\{y_n\right\}_{n=-1}^{N}$ için, sınır koşulları

$$y_0=(1+\lambda)y_{-1}, \quad y_N=0 \tag{2.2}$$

olsun. $y=\{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ sütun vektörü için $Jy=\lambda y$ özdeğer problemini ele alalım.

$$Jy=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix}=\lambda y$$

$$\begin{aligned} a_{-1}y_{-1}+b_0y_0+a_0y_1 &= \lambda y_0 \\ a_0y_0+b_1y_1+a_1y_2 &= \lambda y_1 \\ a_1y_1+b_2y_2+a_2y_3 &= \lambda y_2 \\ \vdots \quad &= \ \vdots \\ a_{N-2}y_{N-2}+b_{N-1}y_{N-1}+a_{N-1}y_N &= \lambda y_{N-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.1) denkleminin çözümünü

$$y_{-1}=1, \quad y_0=1+\lambda \tag{2.4}$$

başlangıç koşulları ile $\{P_n(\lambda)\}_{n=-1}^{N}$ belirler. Başlangıç koşullarını (2.3) de yerine yazılırsa

$$y_1 = \frac{\lambda - b_0}{a_0}(1+\lambda), \quad y_2 = \left[\frac{(\lambda - b_0)(\lambda - b_1)}{a_0 a_1} - \frac{a_0}{a_1}\right](1+\lambda),$$

$$y_3 = \left[\frac{(\lambda - b_0)(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)}{a_0 a_1 a_2} - \frac{a_0(\lambda - b_2)}{a_1 a_2} - \frac{a_1(\lambda - b_0)}{a_0 a_2}\right](1+\lambda)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde devam edilirse (2.1) denklemi elde edilir. Böylece $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{N}$ özyineleme bağıntısının

$$P_0(\lambda) = 1 + \lambda \tag{2.5}$$

başlangıç koşulu ile tek çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &b_0 P_0(\lambda) + a_0 P_1(\lambda) = \lambda P_0(\lambda), \\ &a_{n-1} P_{n-1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_n P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \\ &n \in \{1, 2, ..., N-1\}, \qquad a_{N-1} = 1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Burada $y_0 \neq 0$ alınmalıdır. Aksi halde y_N ’lerin hepsi sıfıra eşit olur. Dolayısıyla $y_0 = 1 + \lambda$ olduğundan $\lambda \neq -1$ dir.

Lemma 2.1:

$$\det(J - \lambda I) = (-1)^N a_0 a_1 .....a_{N-1} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \tag{2.7}$$

Eşitliği verilsin. Bu taktirde J *matrisinin özdeğerleri* $\frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ *sıfır polinomuna denktir.*

İspat. Tümevarım yöntemi ile doğruluğu gösterilebilir.

Negatif olmayan herhangi bir m tamsayısı için $\mathbb{C}_m[\lambda]$, $\lambda \leq m$ dereceli kompleks katsayılı tüm polinomlar halkasını göstersin. $\Omega : \mathbb{C}_m[\lambda] \to \mathbb{C}$ olmak üzere $G(\lambda), H(\lambda) \in \mathbb{C}_m[\lambda]$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\langle \Omega, G(\lambda) + H(\lambda) \rangle = \langle \Omega, G(\lambda) \rangle + \langle \Omega, H(\lambda) \rangle \text{ ve } \langle \Omega, \alpha G(\lambda) \rangle = \alpha \langle \Omega, G(\lambda) \rangle$$

ise Ω lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle$, $G(\lambda)$ polinomunun üzerindeki Ω değerini gösterir.

Teorem 2.2: $\Omega : \mathbb{C}_{2N}[\lambda] \to \mathbb{C}$ *bir tek lineer fonksiyonel vardır.*

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \delta_{mn} \qquad m, n \in \{0, 1, ..., N-1\} \tag{2.8}$$

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0 \qquad m \in \{0,1,...,N\} \tag{2.9}$$

dir. Burada δ_{mn} *Kronecker Delta sabitidir.*

Tanım 2.3: Teorem 1'deki Ω fonksiyoneline (1.1) deki J matrisinin *genelleştirilmiş spektral fonksiyonu* denir.

3. Genelleştirilmiş Spektral Fonksiyonun Ters Problemi

Ters problem aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

1. Ω genelleştirilmiş spektral fonksiyonunun J matrisini vermesi için yöntemi yeniden kurmak mümkündür.
2. $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ da verilen belirli bir Ω lineer fonksiyonelini bulmak için gerek ve yeter şart (1.2) sınıfına ait verileri ile (1.1) formundaki bazı J matrisleri için genelleştirilmiş spektral fonksiyon olmasıdır.

n dereceli bir $\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ polinomu aşağıdaki gibi olsun.

$$\frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \alpha_n \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} \lambda^k \right), \qquad n \in \{0,1,...,N\}. \tag{3.1}$$

Şimdi (2.6) denkleminin her iki tarafını $P_0(\lambda)$ ifadesine bölelim. Bu taktirde aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$a_{n-1} \frac{P_{n-1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} + b_n \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} + a_n \frac{P_{n+1}(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \lambda \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$$

(3.1)'i yukarıdaki denklemde yerine yazıp a_n, b_n katsayılarını $\alpha_n, \chi_{n,k}$ değerleri cinsinden yazalım. Böylece

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}\left(\lambda^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \chi_{n-1,k}\lambda^k \right) + b_n\alpha_n \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k}\lambda^k \right)$$

$$+a_n\alpha_{n+1}\left(\lambda^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \chi_{n+1,k}\lambda^k \right) = \lambda\alpha_n \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k}\lambda^k \right)$$

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-1}\alpha_{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\chi_{n-1,k}\lambda^k + b_n\alpha_n\lambda^n + b_n\alpha_n\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^k$$

$$+a_n\alpha_{n+1}\lambda^{n+1} + a_n\alpha_{n+1}\sum_{k=0}^{n}\chi_{n+1,k}\lambda^k = \alpha_n\lambda^{n+1} + \alpha_n\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{n,k}\lambda^{k+1}$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen denklemlerde bulunan λ^{n+1} terimlerinin katsayılarını birbirine eşitleyelim. Bu eşitlikten

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \quad (0 \le n \le N-2), \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_N = \alpha_{N-1}, \tag{3.2}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi λ^n terimlerinin katsayılarını birbirine eşitleyelim. Bu eşitlikten

$b_n\alpha_n + a_n\alpha_{n+1}\chi_{n+1,n} = \alpha_n\chi_{n,n-1}$ elde edilir. Burada $a_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ ifadesini yerine yazalım.

$$b_n = \chi_{n,n-1} - \chi_{n+1,n} \quad (0 \le n \le N-1), \quad \chi_{0,-1} = 0. \tag{3.3}$$

ifadesi elde edilir. λ^{n-1} terimlerinin katsayılarını birbirine eşitleyelim. Bu eşitlikten $a_{n-1}\alpha_{n-1} + b_n\alpha_n\chi_{n,n-1} + a_n\alpha_{n+1}\chi_{n+1,n-1} = \alpha_n\chi_{n,n-2}$ elde edilir. Denklemde a_n ve b_n ifadelerini yazalım.

$$1 + b_n\chi_{n,n-1} + \chi_{n+1,n-1} = \chi_{n,n-2}$$

ifadesi elde edilir.

(2.8) ve (2.9) bağıntılarına eşdeğer olan şu bağıntıları yazabiliriz.

$$\left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \frac{\delta_{mn}}{\alpha_m}, \quad m = 0,1,\dots,n, \quad n \in \{0,1,\dots,N-1\} \tag{3.4}$$

$$\left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = 0, \quad m = 0,1,\dots,N. \tag{3.5}$$

(3.1) den

$$\left\langle \Omega, \frac{P_m(\lambda)}{P_0(\lambda)} \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_m \left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle + \alpha_m \sum_{j=0}^{m-1} \chi_{m,j} \left\langle \Omega, \lambda^j \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle \tag{3.6}$$

ifadesini elde ederiz. Daha sonra aşağıdaki ifadeyi de yazabiliriz:

$$\lambda^j = \sum_{i=0}^{j} c_i^{(j)} \frac{P_i(\lambda)}{P_0(\lambda)}, \quad j \in \{0,1,\dots,N\},$$

(2.8), (2.9) bağıntıları varsa (3.6) bağıntısından (3.4), (3.5) bağıntıları elde edilir. Tersi de doğrudur. Yani, (3.1) ile paralel olarak (3.4), (3.5) bağıntıları var ise (3.6) bağıntısından (2.8), (2.9) bağıntıları elde edilir.

$$s_l = \left\langle \Omega, \lambda^l \right\rangle, \quad l \in \{0,1,\dots,2N\}, \tag{3.7}$$

bağıntısı Ω fonksiyonelinin "güç dengesi" olarak adlandırılır.

Şimdi $\dfrac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ ve $\dfrac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)}$ denklemlerinin (3.1) e göre açılımlarını (3.4) ve (3.5) bağıntılarında yerine yazalım.

$$\left\langle \Omega, \lambda^m \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_n \left\langle \Omega, \lambda^n \lambda^m \right\rangle + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} \left\langle \Omega, \lambda^k \lambda^m \right\rangle$$

$$\left\langle \Omega, \lambda^N \frac{P_N(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_N \left\langle \Omega, \lambda^N \lambda^N \right\rangle + \alpha_N \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{N,k} \left\langle \Omega, \lambda^k \lambda^N \right\rangle$$

$$\left\langle \Omega, \lambda^n \frac{P_n(\lambda)}{P_0(\lambda)} \right\rangle = \alpha_n \left\langle \Omega, \lambda^n \lambda^n \right\rangle + \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} \left\langle \Omega, \lambda^k \lambda^n \right\rangle$$

denklemlerinden sırasıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$s_{n+m} + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} s_{k+m} = 0, \qquad m = 0,1,\ldots,n-1, \qquad n \in \{1,2,\ldots N\} \tag{3.8}$$

$$s_{2N} + \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{N,k} s_{k+N} = 0, \tag{3.9}$$

$$s_{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{n,k} s_{k+n} = \frac{1}{\alpha_n^2}, \qquad n \in \{1,2,\ldots N-1\} \tag{3.10}$$

Burada (3.8) denklemi *ters problemin temel denklemidir* ki bu problemin gerektiğinde çözülmesini sağlar. Eğer $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ uzayında Ω lineer fonksiyoneli verilirse, s_l katsayıları bulunabilir. Bir sonraki teorem ters problemin gösterilen çözüm yönteminin koşullarını verir.

Teorem 3.1: $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ *uzayında tanımlı verilen bir* Ω *lineer fonksiyonelinin (1.2) verileri ile verilmiş olan (1.1) formundaki bazı* J *Jacobi matrislerinin genelleştirilmiş spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart aşağıda verilen koşulları sağlamasıdır:*

(i) $\langle \Omega, 1 \rangle = 1$ *(normalleşme koşulu);*

(ii) $\deg G(\lambda) \le N-1$ *koşulu ile bazı* $G(\lambda)$ *polinomları ve*

$\deg G(\lambda) = \deg H(\lambda)$ *koşulu ile bütün* $H(\lambda)$ *polinomları için,*

$$\langle \Omega, G(\lambda) H(\lambda) \rangle = 0$$

ise o halde $G(\lambda) \equiv 0$*;*

(iii) $\deg G(\lambda) \le N$ *koşulu ile bütün* $G(\lambda)$ *polinomları için*

$$\langle \Omega, G(\lambda) T(\lambda) \rangle = 0$$

olacak şekilde derecesi N *olan bir* $T(\lambda)$ *polinomu vardır.*

Ters problem Ω fonksiyonelinin ve + ve – işaretlerine sahip $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{N-1}\}$ dizisinin verileri yardımıyla çözülebilir.

$$s_l = \langle \Omega, \lambda^l \rangle, \qquad l = 0,1,...2N. \tag{3.11}$$

ifadesinin determinantı aşağıdaki gibidir.

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}, \qquad n = 0,1,..., N. \tag{3.12}$$

Bu ifadeden dolayı Teorem 3.1 aşağıdaki teoreme eşdeğerdir.

Teorem 3.2: $\mathbb{C}_{2N}[\lambda]$ *uzayında tanımlı* Ω *lineer fonksiyoneli verilmiş olsun.* Ω *fonksiyonelinin (1.2) verileri ile (1.1) formundaki* J *Jacobi matrisi için genelleşmiş spektral fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart*

$$D_0 = 1, \qquad D_n \neq 0 \quad (n = 1,2,..., N-1), \qquad \text{ve} \qquad D_N = 0, \tag{3.13}$$

D_n *, (3.11) ve (3.12) de tanımlıdır.*

Kaynaklar

[1] G. Sh. Guseinov, *Symmetry Integrability and Geometry: Methods and Appl.*, 2009, 28 pages.

[2] D. Boley, G. H. Golub, *Inverse Problems* 1987, **3**, 595.

[3] Kh. D. Ikramov, V. N. Chugunov, *J. Math. Sciences*, 2000, **98**, 51.

[4] M. T. Chu, G. H. Golub, Inverse eigenvalue problems: Theory, Algorithms and Applications, Oxford University Press, New York, 2005.

[5] V. A. Marchenko, *Mat. Sb,*. 1960, **52**, 739 (in Russian).

[6] F. S. Rofe-Beketov, *Mat. Sb,*. 1960, **51**, 293 (in Russian).

[7] G. Sh. Guseinov, *Mat. Zametki*, 1978, **23**, 237 (English transl.: *Math. Notes*, 1978, **23**, 130).

[8] G. Sh. Guseinov, *Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk*, 1978, **no. 5**, 16 (in Russian).

[9] Yu. L. Kishakevich, *Mat. Zametki*, 1972, **11**, 437 (English tranl.: *Math. Notes*, 1972, **11**, 266).

[10] Yu. L. Kishakevich, *Mat. Zametki*, 1972, **11**, 661 (English tranl.: *Math. Notes*, 1972,**11**, 402).