Araştırma Makalesi **BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 23(2), 645-652, (2021)**

DOI:10.25092/baunfbed.****** **J. BAUN Inst. Sci. Technol., 23(2), 645-652, (2021)**

Kapalı idealler üzerinde asal gamma halkanın kesirler halkası

Ahmet GENÇ*

Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik. Bölümü, Merkez Kampüsü, Aydın

Geliş Tarihi (Received Date): 12.01.2021
Kabul Tarihi (Accepted Date): 08.02.2021

Öz

Bu çalışmanın amacı, soldan kapalı idealler üzerinde Nobusawa anlamında asal gamma halkanın kesirler halkasını oluşturmaktır.

Anahtar kelimeler: *Asal gamma halka, sol ideal, soldan kapalı ideal.*

Quotient rings of prime gamma ring on the closed ideals

Abstract

The aim of this paper is to give a construction of quotient gamma rings of prime gamma rings in the sense of Nobusawa on left closed ideals.

Keywords: *Prime gamma ring, left ideal, left closed ideal.*

1. Giriş

Gamma halkalar teorisi hakkındaki çalışmalar Nobusawa' nın [7] 1964 yılında yaptığı çalışma ile başlamıştır. Bu çalışmasında Nobusawa, Wedderburn-Artin Teoreminin genelleştirilmesini ispatlamıştır. Günümüze kadar birçok yazar, gamma halkalar hakında çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Birleşmeli halkalar (cebirler) teorisinde, (yarı) asal halkalar büyük bir sınıfı oluşturmaktadır. Bu teorideki sıklıkla çalışaılan bölüm genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini (GPI) sağlayan (yarı) asal halkalardır. W. Martindale [6], aşikar olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlayan merkezi kapalı asal halkanın güçlü ilkel (primitive) halka olduğunu göstermiştir. Bu önemli sonucu ispatlamak için, Martindale, kendi adıyla anılan (sağ, sol) kesirler halkası kavramını tanımlamıştır. Daha sonra Amitsur [1] bu kavramı yarıasal halkalara

* Ahmet GENÇ, agenc@adu.edu.tr, http://orcid.org/0000-0002-2535-1689

genişletmiştir.

Asal gamma halkalarında klasik asal halkalar teorisinde olduğu gibi üzerinde çalıştığımız halkadan daha geniş olan ve halkanın kendisini homomorfik olarak içeren bir kesirler halkasını idealler üzerinde inşa etmektir. Bu çalışmada kesirler halkasını soldan kapalı idealler üzerinde oluşturulmuştur. İdealler üzerinden elde edilen kesirler halkasının soldan kapalı idealleri üzerinden elde edilen kesirler halkasını içerdiğini ancak gamma halka birimli ise bu iki kesirler halkasının çakıştığını ifade ettik. Kesirler halkasını, tek yanlı kapalı idealleri üzerinden oluşturmamızın sebebi, gamma halkanın tek yanlı kapalı idealleri ve operatör halkanın tek yanlı kapalı idealleri arasında birebir eşleme olması ve bunun gamma halkalarının kesirler halkası ile operatör halkasının kesirler halkası arasındaki ilişkiyi araştırabilmeyi olanak sağlamasıdır.

2. Önbilgiler

2.1 Tanım: M elemanları $a, b, c,....$ ile gösterilen toplamsal değişmeli grup ve Γ elemanları $\alpha, \beta, \gamma,....$ ile gösterilen toplamsal değişmeli grup olsun. Her $a, b\in M$ ve $\gamma, \beta\in\Gamma$ için, $a\gamma b$ M toplamsal grubunun elemanı ve $\gamma a\beta$ elemanı da Γ toplamsal grubunun elemanı olarak tanımlansın. Eğer bu çarpımlar aşağıdaki üç koşulu da sağlanıyor ise M toplamsal grubuna **Γ-halkası** denir.

(i) $(a_1+a_2)\gamma b = a_1\gamma b+a_2\gamma b$
$a(\gamma_1+\gamma_2)b = a\gamma_1 b+a\gamma_2 b$
$a\gamma(b_1+b_2) = a\gamma b_1+a\gamma b_2$
(ii) $(a\gamma b)\beta c = a\gamma(b\beta c) = a(\gamma b\beta)c$
(iii) Her $a,b \in M$ için $a\gamma b = 0$ ise $\gamma = 0$.

Barnes [2] makalesinde Nobusawa'nın vermiş olduğu Γ-halkası tanımının koşullarını zayıflatarak aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 2.2 $M = \{a,b,c,....\}$ ve $\Gamma = \{\alpha,\beta,\gamma,....\}$ toplamsal değişmeli gruplar olmak üzere, her $a, b, c\in M, \alpha, \beta\in\Gamma$ için,

(i) $a\alpha b$, M grubunun elemanıdır.
(ii) $(a+b)\alpha c = a\alpha c+b\alpha c$
$a(\alpha+\beta)b = a\alpha b+a\beta b$
$a\alpha(b+c) = a\alpha b+a\alpha c$
(iii) $(a\alpha b)\beta c = a\alpha(b\beta c)$

koşullarını sağlanıyorsa M toplamsal grubuna ***Γ-halkası*** denir.

Bundan sonra tanımlarda karışıklığa yol açmamak için Barnes anlamında M Γ-halkası için $(\Gamma,M)_B$ ve Nobusawa anlamında M Γ-halkası için $(\Gamma,M)_N$ gösterimini kullanılacaktır.

Tanım 2.3 $I\subseteq M$ olmak üzere, (Γ,M) gamma halkasının, $I\Gamma M=\{a\alpha c|a\in I, \alpha\in\Gamma, c\in M\}$ $(M\Gamma I)$ kümesini kapsayan I toplamsal grubuna (Γ,M) gamma halkasının ***sağ (sol) ideali*** denir. Eğer I hem sağ hem de sol ideal ise I toplamsal grubuna (Γ,M) gamma halkasının ***iki yanlı ideali*** veya kısaca (Γ,M) gamma halkasının ***ideali*** denir.

Tanım 2.4 $(\Gamma,M)_B$ olmak üzere, $x \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ olsun. Her $y \in M$ için, $y[\delta, x] = y\delta x$ ile tanımlanan $[\delta, x]: M \to M$ dönüşümü, M toplamsal grubunun bir endomorfizmasıdır. $\delta_i \in \Gamma$, $x_i \in M$ olmak üzere, $\sum_i [\delta_i, x_i]$ formundaki tüm toplamları içeren R kümesi, $End^r(M)$ (sağ taraftan M ile işleme konulan endomorfizmlerin halkası) nin bir alt halkasıdır. R ye $(\Gamma,M)_B$ nın **sağ operatör halkası** denir.

Benzer şekilde, $(\Gamma,M)_B$ gamma halkasının **sol operatör halkası** $L=\left\{ \sum_j [y_j, \mu_j] \mid y_j \in M, \mu_j \in \Gamma \right\} \leq End^l(M)$ tanımlanır.

Tanım 2.5 $(\Gamma,M)_B$ gamma halka ve R (L), onun sağ (sol) operatör halkası olsun. Eğer her $x \in M$ için, $\sum_i x\delta_i e_i = x$ $\left(\sum_j f_j w_j x = x \right)$ olacak şekilde $\sum_i [\delta_i, e_i] \in R$ $\left(\sum_j [f_j, w_j] \in L \right)$ var ise $\sum_i [\delta_i, e_i] \left(\sum_j [f_j, w_j] \right)$ elemanına M gamma halkasının ***sağ (sol) birimi*** denir. $\sum_i [\delta_i, e_i]$ elemanın R nin birimi, $\sum_j [f_j, w_j]$ elemanın L nin birimi olduğu kolaylıkla görülebilir.

Aynı zamanda, $\sum_i [\delta_i, e_i] \left(\sum_j [f_j, w_j] \right)$ elemanı ΓM-halkasının sol (sağ) birimidir.

Tanım 2.6 $(\Gamma, \mathrm{M})_N$ gamma halka olsun. Her $x \in M$ için, $e\delta x = x$ olacak şekilde $e \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ var ise (δ, e) çiftine $(\Gamma$, M) gamma halkasının **güçlü (strong) sol birimi** denir. Her $x \in M$ için, $x\delta e = x$ olacak şekilde $e \in M$ ve $\delta \in \Gamma$ var ise (δ, e) çiftine (Γ, M) gamma halkasının **güçlü (strong) sağ birimi** denir. (δ, e) çifti, (Γ, M) gamma halkasının hem güçlü sağ ve sol birim ise kısaca **güçlü (strong) birim** denir.

Tanım 2.7 [5] $(\Gamma_1, M_1)_N$ ve $(\Gamma_2, M_2)_N$ gamma halkaları, ϕ ve θ sırasıyla Γ_1 grubundan Γ_2 grubuna ve M_1 grubundan M_2 grubuna iki dönüşüm olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan (ϕ,θ) sıralı çiftine $(\Gamma_1, M_1)_N$ gamma halkasından $(\Gamma_2, M_2)_N$ gamma halkasına ***homomorfizma*** denir.

(i) θ, M_1 grubundan M_2 grubuna grup homomorfizmasıdır.
(ii) ϕ, Γ_1 grubundan Γ_2 grubuna grup homomorfizmasıdır.
(iii) Her $x, y \in M$ ve $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere,
$$(x\alpha y)\theta = (x\theta)(\alpha\phi)(y\theta)$$
(iv) Her $x \in M$ ve $\alpha, \gamma \in \Gamma$ olmak üzere,
$$(\alpha x\gamma)\phi = (\alpha\phi)(x\theta)(\gamma\phi)$$

İlaveten, ϕ ve θ bire bir ve örten ise (ϕ,θ) sıralı çifti $(\Gamma_1, M_1)_N$ gamma halkasından $(\Gamma_2, M_2)_N$ üzerine ***izomormorfizma*** denir ve $(\Gamma_1, M_1)_N \cong (\Gamma_2, M_2)_N$ ile gösterilir.

Tanım 2.8 Her $n, n_1, n_2 \in N$, $m, m_1, m_2 \in M$ ve $\alpha, \beta \in \Gamma$ için, aşağıdaki koşulları sağlayan N toplamsal değişmeli grubuna **sağ $\Gamma M -$ modül** denir.

(i) $n\alpha m \in N$
(ii) $(n_1 + n_2)\alpha m = n_1 \alpha m + n_2 \alpha m$
(iii) $n(\alpha + \beta)m = n\alpha m + n\beta m$
(iv) $n\alpha(m_1 + m_2) = n\alpha m_1 + n\alpha m_2$

Tanım 2.9 N_1 ve N_2 sağ $\Gamma M -$ modül olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\theta : N_1 \to N_2$ dönüşümüne **sağ $\Gamma M -$ modül homorfizması** denir.
(i) $\theta : N_1 \to N_2$ grup homomorfizmasıdır,
(ii) Her $x \in N_1$ ve $m \in M$, $\alpha \in \Gamma$ için, $\theta(x\alpha m) = \theta(x)\alpha m$.

Tanım 2.10 (Γ,M) gamma halka olsun. Eğer (Γ,M) gamma halkasının herhangi iki A ve B ideali için, $A\Gamma B \subseteq P$ olması $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa, (Γ,M) nın P idealine ***asal ideal*** denir.

Tanım 2.11 (Γ,M) gamma halkasının sıfır ideali ***asal*** ideal ise (Γ,M) gamma halkasına ***asal gamma halka*** denir.

Tanım 2.12 R ve L sırasıyla (Γ,M) gamma halkasının sağ ve sol operatör halkaları A, R halkasının sol ideali olsun. $RA = A$ ise A sol idealine **soldan kapalı** ideal denir. U, (Γ,M) gamma halkasının sol ideali olsun. $LU=M\Gamma U=U$ ise U sol idealine, M nin **soldan kapalı** ideali denir.

Benzer şekilde, B, L halkasının sağ ideali olsun. $BL=B$ ise B sağ idealine **sağdan kapalı** ideal denir. V, (Γ,M) gamma halkasının sağ ideali olsun. $VR=V\Gamma M=V$ ise V sağ idealine, M nin **sağdan kapalı** ideali denir.

Tanım 2.13 A, R sol operatör halkasının sol ideali ise MA da (Γ,M) gamma halkasının sol idealidir. MA sol ideali ${}^*A$ ile gösterilir. U, (Γ,M) gamma halkasının sol ideali ise $[\Gamma,U]$ da R sol operatör halkasının sol idealidir. $[\Gamma,U]$ sol ideali ${}^*U$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, B L sağ operatör halkasının sağ ideali ise BM de (Γ,M) gamma halkasının sağ idealidir. BM sağ ideali B^* ile gösterilir. V, (Γ,M) gamma halkasının sağ ideali ise $[V, \Gamma]$ da L sağ operatör halkasının sağ idealidir.$[V, \Gamma]$ sağ ideali V^* ile gösterilir.

Özellik 2.14 Eğer R sol operatör halkasının A sol ideali soldan kapalı ise (Γ,M) gamma halkasının ${}^*A$ sol ideali de soldan kapalıdır. Eğer (Γ,M) gamma halkasının U sol ideali soldan kapalı ise R sol operatör halkasının ${}^*U$ sol ideali de soldan kapalıdır. Benzer özellikler sağdan kapalılar içinde verilebilir[5].

Teorem 2.15 R sol operatör halkasının soldan kapalı sol idealleri ile (Γ,M) gamma halkasının soldan kapalı sol idealleri arasında birebir eşleme vardır [5].

3. Asal gamma halkanın soldan kapalı idealleri ile kurulan kesirler halkası

Örnek 3.1 $M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0\end{bmatrix} : a\in\mathbb{Z}\right\}$ ve $\Gamma=\left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} : x\in\mathbb{Z}\right\}$ güçlü sağ birimli gamma halkadır. $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\in(\Gamma,M)_N$ gamma halkasının güçlü sağ birimidir. $U=\left\{\begin{bmatrix} 3a & 0 \\ 3a & 0\end{bmatrix} : a\in\mathbb{Z}\right\}$ $(\Gamma,M)_N$ gamma halkasının soldan kapalı bir idealidir.

$(\Gamma, M)_N$, güçlü sağ birimli asal gamma halka ve U, $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının sıfırdan farklı soldan kapalı bir ideali olsun. $(\Gamma, M)_N$, sağ güçlü birimli olduğundan $M\Gamma M=M$ ve Tanım 2.6 dan R operatör halkası birimlidir. $M\Gamma M=M$ olması kullanılarak, $R^2=[\Gamma,M]$. $[\Gamma,M]=[\Gamma,M\Gamma M]=[\Gamma,M]=R$ elde edilir. Yani R operatör halkası da kendisinin soldan kapalı bir idealidir. A ve B, R operatör halkasının soldan kapalı idealleri olmak üzere, $R(A\cap B)\subseteq A\cap B$ olduğu $A\cap B$ nin ideal olmasından açıktır. $A\cap B\subseteq R(A\cap B)$ olduğu R operatör halkasının birimli olmasından görülür. O halde, soldan kapalı ideallerin arakesiti de soldan kapalı bir idealdir. Özellik 2.14 ve Teorem 2.15 kullanılarak, $(\Gamma,M)_N$ gamma halkasının soldan kapalı ideallerinin arakesitinin de soldan kapalı bir ideal olduğu kolaylıkla görülür.

Özellik 3.2 $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının sıfırdan farklı soldan kapalı U ve V idealleri için, $U\Gamma V$ ideali de soldan kapalıdır ve $U\Gamma V\subseteq U\cap V$ dir.

İspat U soldan kapalı olduğundan $M\Gamma U\Gamma V=U\Gamma V$ ve U ve V ideal olması kullanılarak $U\Gamma V\subseteq U$ ve $U\Gamma V\subseteq V$ elde edilir. Yani, $U\Gamma V\subseteq U\cap V$ dir.

U, $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının sıfırdan farklı soldan kapalı bir ideali olsun.

$$\aleph=\{(U,f)\mid f: U\to M \;\; f, \text{sol } M\Gamma-\text{modül homomorfizma}\}$$

kümesi üzerinde, "~" bağıntısı "$(U,f)\sim(V,g) \Leftrightarrow f|_W=g|_W$ olacak şekilde $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının $U\cap V$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı en az bir soldan kapalı W ideali vardır" olarak tanımlansın. $(\Gamma, M)_N$ asal gamma halka olduğundan, sıfırdan farklı soldan kapalı W ideali bulmak her zaman mümkündür. Örneğin, eğer $W=U\Gamma V$ alırsak, $U\neq 0$, $V\neq 0$ ve U, V $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının ideali ve $(\Gamma, M)_N$ asal gamma olduğundan $0\neq U\Gamma V$ olur. Özellik 3.2 den $U\Gamma V\subseteq U\cap V$ ve $U\Gamma V$, $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının soldan kapalı bir idealdir.

- **a)** $0\neq U$ $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının ideali için, $W=U\Gamma U$ alındığında $W\neq 0$ dır. $(U,f)\sim(U,f)$ olduğu açıktır. Yani " ~" bağıntısı yansıma özelliğini sağlar.
- **b)** $(U,f)\sim(V,g)$ olsun. $f|_W=g|_W$ olacak şekilde $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının $U\cap V$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı en az bir W ideali vardır. Buradan, $(V,g)\sim(U,f)$ elde edilir. Bu da " ~" bağıntısının simetrik olduğunu gösterir.
- **c)** $(U,f)\sim(V,g)$ ve $(V,g)\sim(K,h)$ olsun. $(U,f)\sim(V,g)$ olduğundan $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının sıfırdan farklı bir $W_1\subseteq U\cap V$ ideali için, $f|_{W_1}=g|_{W_1}$ eşitliği sağlanır. $(V,g)\sim(K,h)$ olduğundan $(\Gamma, M)_N$ gamma halkasının sıfırdan farklı bir $W_2\subseteq V\cap K$ ideali için, $g|_{W_2}=h|_{W_2}$ olur. $W=W_1\Gamma W_2$ alalım. W, $(\Gamma, M)_N$

gamma halkasının sıfırdan farklı soldan kapalı idealidir ve W=$W_1\Gamma W_2$ $\subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq U \cap V \cap K \subseteq U \cap K$ sağlanır. Diğer taraftan, $f\big|_{W_1} = g\big|_{W_1}$ ve $g\big|_{W_2} = h\big|_{W_2}$ olduğundan $f\big|_{W} = g\big|_{W}$ ve $g\big|_{W} = h\big|_{W}$ olduğu açıktır. O halde, (Γ, *M*)N gamma halkasının sıfırdan farklı W=$W_1\Gamma W_2$ soldan kapalı ideali için $f\big|_{W} = h\big|_{W}$ dır. Böylece, (*U*, *f*) ~(*K*, *h*) olduğu görülür. Yani " ~" bağıntısı geçişmelidir.

Öyleyse "~" bağıntısı $\aleph$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Denklik sınıflarını $\overline{(U, f)} = \hat{f}$ ile gösterelim.

$\aleph$ kümesinin tüm elemanlarının denklik sınıflarının kümesi Q_{Cl} olsun.
Q_{Cl} üzerinde "+" işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\hat{f} + \hat{g} = \overline{(U, f)} + \overline{(V, g)} = \overline{(U \cap V, f + g)}$

Yukarıda tanımlanan toplama işlemi iyi tanımlıdır. $\overline{(U, f)}$, $\overline{(V, g)}$, $\overline{(U', f')}$, $\overline{(V', g')} \in Q$ için, $(\overline{(U, f)}, \overline{(V, g)})$=$(\overline{(U', f')}, \overline{(V', g')})$ olsun. O halde, $\overline{(U, f)} = \overline{(U', f')}$ ve $\overline{(V, g)} = \overline{(V', g')}$ dır. Buradan, $(U, f) \sim (U', f')$ ve $(V, g) \sim (V', g')$ elde edilir. "~" bağıntısının tanımından, $W_1 \subseteq U \cap U'$ olacak şekilde (Γ, *M*)N gamma halkasının sıfırdan farklı soldan kapalı bir W_1 ideali üzerinde f= f' ve $W_2 \subseteq V \cap V'$ olacak şekilde (Γ, *M*)N gamma halkasının sıfırdan farklı soldan kapalı bir W_2 ideali üzerinde g= g' dır. W=$W_1\Gamma W_2$ alalım. $W \neq 0$ ve $W \subseteq (U \cap V) \cap (U' \cap V')$ dır. Her $w \in W$ için, $(w)(f+g)$ = $(w)f+(w)g$ = $(w)f'+(w)g'$ = $(w)(f'+g')$ olduğundan, $(U \cap V, f + g) \sim (U' \cap V', f' + g')$ bulunur. O halde, $\overline{(U \cap V, f + g)} = \overline{(\mathrm{W} \cap T, h + k)}$ elde edilir.

Burada $f + g : U \cap V \to M$ sol $M\Gamma$ -modül homomorfizmasıdır. Q_{Cl} kümesinin bu işlem altında toplamsal değişmeli grup olduğu bir önceki bölüme benzer şekilde kolaylıkla gösterilir.

Benzer şekilde, (*M*, Γ)N asal gamma halka ve $0 \neq \Omega$ (*M*, Γ)N gamma halkasının soldan kapalı bir ideali olsun.

$\Re$ = {(Ω; τ) | τ : Ω → Γ τ, sağ *M*Γ – modül homomorfizması} $\Re$ kümesi üzerinde "≈" bağıntısı şu şekilde tanımlansın.

"(Ω, τ)≈(Λ, σ) $\Leftrightarrow \tau\big|_{\Pi} = \sigma\big|_{\Pi}$ olacak şekilde (*M*, Γ)N gamma halkasının $\Omega \cap \Lambda$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı en az bir soldan kapalı Π ideali vardır"

(*M*, Γ)N asal gamma halka olduğundan, sıfırdan farklı (*M*, Γ)N gamma halkasının Π ideali her zaman bulunabilir. Yukarıdaki bağıntıya benzer şekilde " ≈ " bağıntısının denklik bağıntısı olduğu görülür.

Denklik sınıflarını $\overline{(\Omega,\ \tau)} = \hat{\tau}$ ile gösterelim. $\Re$ kümesinin bütün elemanlarının denklik sınıflarının kümesini Δ_{Cl} ile gösterelim. Δ_{Cl} üzerinde toplama işlemini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\hat{\tau} + \hat{\sigma} = \overline{(\Omega,\tau)} + \overline{(\Lambda,\sigma)} = \overline{(\Omega\cap\Lambda,\tau+\sigma)}$$

Yukarıda yaptıklarımıza benzer şekilde Δ_{Cl} kümesinin toplamsal değişmeli grup olduğu kolaylıkla görülür.

τ , Ω dan Γ ya sağ $M\Gamma$ – modül homomorfizması olmak üzere, τ yardımı ile toplamsallık özelliğini sağlayacak şekilde $\overset{\Delta}{\tau}$: $M\ \Omega M \rightarrow M$, $\overset{\Delta}{\tau}(m\gamma n) = m\tau(\gamma)n$ ile $\overset{\Delta}{\tau}$ dönüşümünü tanımlayalım.

Q_{Cl} ve Δ_{Cl} toplamsal değişmeli grupları göz önüne alınarak aşağıdaki işlemini tanımlayalım;

. : $Q_{Cl} \times \Delta_{Cl} \times Q_{Cl} \rightarrow Q_{Cl}$ işlemini,

$(\hat{f},\hat{\tau},\hat{g}) \rightarrow \hat{f}.\hat{\tau}.\hat{g} = \overline{(U,f)}.\overline{(\Omega,\tau)}.\overline{(V,g)} = \overline{(V\Omega U,\ f\overset{\Delta}{\tau}g)}$ ile tanımlayalım.

Bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$(\overline{(U,f)},\overline{(\Omega,\tau)},\overline{(V,g)}) = (\overline{(U_1,f_1)},\overline{(\Omega_1,\tau_1)},\overline{(V_1,g_1)})$ olsun.

"~" ve "≈" bağıntısının tanımından,

$(U,f) \sim (U_1,f_1) \Rightarrow f\,|_W = f_1|_W$ olacak şekilde, $(\Gamma,\ M\ )_N$ gamma halkasının $U\cap U_1$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı en az bir soldan kapalı W ideali vardır, $(\Omega,\ \tau) \approx (\Omega_1,\ \tau_1) \Rightarrow\ \tau|_\Pi = \tau_1|_\Pi$ olacak şekilde, $(M,\ \Gamma)_N$ gamma halkasının $\Omega\cap\Omega_1$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı en az bir soldan kapalı Π ideali vardır ve $(V,\ g) \sim (V_1, g_1) \Rightarrow g|_K = g_1\,|_K$ olacak şekilde, $(\Gamma,\ M\ )_N$ gamma halkasının $V\cap V_1$ tarafından kapsanan sıfırdan farklı en az bir soldan kapalı K ideali var olduğu elde edilir. $A=K\Pi W\Gamma K\Pi W \neq 0$. Eğer $A = 0$ olsa $(\Gamma, M\ )_N$ asal olması ve $K\Pi W$ ın $(\Gamma, M)_N$ halkasının ideali olması kullanılarak $\Pi = 0$ elde edilir. Bu da $\Pi \neq 0$ olması ile çelişir.

$A=K\Pi W\Gamma K\Pi W = \{ \sum_{sonlu} k\gamma w\beta k'\gamma' w' \mid \forall\, w, w'\in W, \gamma, \gamma' \in \Pi\ , k, k'\in K, \beta\in\Gamma\}$.

$$\begin{aligned}(k\gamma w\beta\, k'\gamma' w')\, f\,\overset{\Delta}{\tau}\, g &= (k\gamma w\beta\, k'\gamma' f(w'))\ \overset{\Delta}{\tau}\ g = (k\,\tau\,(\gamma w\beta\, k'\gamma')f(w'))\, g \\ &= (k\,\tau_1\,(\gamma w\beta\, k'\gamma')f_1(w'))\, g_1 \\ &= (k\gamma w\beta k'\gamma' w')\, f_1\,\overset{\Delta}{\tau}_1 g_1,\ \forall\ w, w'\in W, \gamma, \gamma' \in \Pi, k, k'\in K, \beta\in\Gamma.\end{aligned}$$

Ayrıca, $f_1\overset{\Delta}{\tau}_1 g_1$ toplamsal olduğundan, $f\,\overset{\Delta}{\tau}\,g\Big|_A = f_1\,\overset{\Delta}{\tau}_1\,g_1\Big|_A$ olduğu görülür.

$(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N$ nun gamma halka olduğunu Genç [4] benzer olarak gösterilir. Böylece, $(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N$ gamma halkadır. Benzer şekilde aşağıdaki işlem altında $(Q_{Cl}, \Delta_{Cl})_N$ nın gamma halka olduğu görülebilir.

$(\hat{\tau}, \hat{f}, \hat{\sigma}) \rightarrow \hat{\tau}.\hat{f}.\hat{\sigma} = \overline{(\Omega,\tau)}.\overline{(U,f)}.\overline{(\Lambda,\sigma)} = \overline{(\Lambda U \Omega, \tau \overset{\Delta}{f} \sigma)}$ olacak şekilde,

$. : \Delta_{Cl} \times Q_{Cl} \times \Delta_{Cl} \rightarrow \Delta_{Cl}$ "." işlemi ve burada $\overset{\Delta}{f} : \Gamma U \Gamma \rightarrow \Gamma$ $(\gamma m \beta)\overset{\Delta}{f} = \gamma f(m)\beta$ olarak tanımlanır.

$(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N$ gamma halkası birimlidir. $I_M : M \rightarrow M$ ve $I_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ birim dönüşümleri $M\Gamma-$modül homomorfimasıdır. Her $\overline{(U, f)} \in Q_{Cl}$ için,

$$\overline{(U, f)}\,.\,\overline{(\Gamma, I_\Gamma)}\,.\,\overline{(M, I_M)} = \overline{(M, I_M)}\,.\,\overline{(\Gamma, I_\Gamma)}\,.\,\overline{(U, f)} = \overline{(U, f)}$$

$(\overline{(M, I_M)}, \overline{(\Gamma, I_\Gamma)})$ çifti $(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N$ halkasının birimidir.

Sonuç 3.3 $(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N$ kesirler halkası $(\Delta, Q)_N$ kesirler halkası tarafından kapsanır. Eğer $(\Gamma, M)_N$ asal gamma halkası güçlü birimli ise bu halkalar birbirine eşittir.

İspat: $(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N$ kesirler halkası kapalı idealler üzerinden kurulduğundan ve her kapalı ideal öncelikle ideal olarak alındığından $(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N \subset (\Delta, Q)_N$ olduğu açıktır. Eğer $(\Gamma, M)_N$ asal gamma halkası güçlü birimli ise her ideali kapalı olduğundan $(\Delta_{Cl}, Q_{Cl})_N = (\Delta, Q)_N$ olduğu kolaylıkla görülür.

4. Sonuç

Bu çalışmada, asal gamma halkalarının soldan kapalı idealler üzerinde kesirler halkası oluşturulmuş ve bu halkanın birimli olduğu, asal gamma halkanın kesirler halkası tarafından kapsandığı ve eğer asal gamma halkası güçlü birimli ise bu iki kesirler halkasının eşit olduğu gösterilmiştir.

Kaynaklar

[1] Amitsur, S. A., On central division algebras, **Israel J. Math.**, 12, 408-420, (1972).

[2] Barnes, W. E., On the Γ-ring of Nobusawa, **Pacific Journal of Mathematics. 18**, 411-422, (1966).

[3] Beidar K. I., Martindale III W. S. and Mikhalev, A. V., Rings with Generalized Identities, **Marcel Dekker Incoporated**, (1996).

[4] Genç A., Asal Gamma halkalarının Kesirler Halkası, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, (2008).

[5] Kyuno, S., Gamma Rings, **Hadronic Press Incorporated**, (1991).

[6] Martindale, W., Prime Rings Satisfying a Generalized Polynomial Identity, **Journal of Algebra**, 12, 576-584, (1969).

[7] Nobusawa, N., On a Generalization of the Theory, **Osaka Journal of Mathematics**, 1, 81-89, (1964).