Erciyes Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 37, Sayı 2 , 2021

Erciyes University
Journal of Institue Of Science and Technology
Volume 37, Issue 2, 2021

Ters Esnek Matrislerde Çoklu Karar Verme Metodu

Emin Aygün[*1], **Rüveyda Ateş**[2], **Seda Erdinç**[2]

[*1] Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, KAYSERİ
[2] Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, KAYSERİ

(Alınış / Received: 14.01.2021, Kabul / Accepted: 21.08.2021, Online Yayınlanma / Published Online: 31.08.2021)

Anahtar Kelimeler
Esnek Kümeler,
Ters Esnek Kümeler,
Ters Esnek Matrisler,
Çoklu Karar Verme

Öz: Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi, belirsizlikle başa çıkmak için etkili bir matematiksel araç olarak görülmektedir. Bu teori, bilgi sistemleri, karar verme problemleri, optimizasyon teorisi, cebirsel yapılar ve matematiksel analiz gibi belirsizlik içeren birçok alana uygulandı. Bu çalışmada ters esnek matrisler üzerinde ve, veya, ve-değil, veya-değil satır işlemleri olarak adlandırılan yeni işlemler tanımlanmıştır. Ayrıca α-ters kesişim, α-ters birleşim, üst α-ters kapsam ve alt α-ters kapsam işlemlerini ve seçim değerini tanımlanmıştır. Son olarak yeni bir ters esnek çoklu karar verme algoritması oluşturulmuştur.

Multiple Decision Making in Inverse Soft Matrices

Keywords
Soft Sets,
Inverse Soft Sets,
Inverse Soft Matrices,
Multiple Decision Making

Abstract: The soft set theory proposed by Molodtsov is seen as an effective mathematical tool for dealing with uncertainty. This theory has been applied to many areas involving uncertainty such as information systems, decision-making problems, optimization theory, algebraic structures, and mathematical analysis. In this study, new operations called and, or, and-not, or-not row operations on inverse soft matrices are defined. In addition, α-inverse intercept, α-inverse union, upper α-inverse scope and lower α-inverse scope operations and selection value are defined. Finally, a new inverse soft multiple decision making algorithm has been created.

*İlgili Yazar, email: eaygun@erciyes.edu.tr

1. Giriş

Gündelik hayatta karşılaşılan belirsizlikleri tarif etmek ve bu belirsizliklerin üstesinden gelmek için bulanık küme, kaba küme, belirsiz küme, aralık matematiği gibi birçok matematiksel yapı geliştirildi. Son yıllarda, belirsizlik içeren yapılarda bir çözüm elde etmek veya çözümün elde edilemediği durumlarda çözümü basite indirgemek için Rus matematikçi Molodtsov [1] tarafından esnek küme teorisi önerildi. Bu küme yapısında nesnelerin belirlenmesinde herhangi bir şartın bulunmaması bu kümelerin kısa sürede birçok araştırmacının ilgisini çekmesini sağladı. Ayrıca oyun teorisi, karar verme, bilgi sistemleri ve olasılık gibi matematiksel yapıların kullanıldığı çeşitli alanlarda uygulanmasına olanak sundu. Esnek küme teorisinde nesnelerin tanımlanması için herhangi bir sınırlandırma yoktur. Dolayısıyla araştırmacılar parametreleri ihtiyaç duydukları formda seçebilirler. Bu ise karar vermeyi oldukça kolaylaştırır.

Esnek küme teorisi üzerine çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir. Maji ve ark. [2] esnek kümelerin ikili tablo gösterimini verdi ve daha sonra Çağman ve Enginoğlu [4-7] bu yapıyı geliştirerek esnek matrisleri tanımladı. Ayrıca onlar aynı boyuttaki esnek matrislerin bazı işlemlerini sundu ve bu işlemleri kullanarak bir esnek karar verme metodu oluşturdu. Esnek matrislerde toplama ve çıkarma işlemleri türetildi. Atagün ve ark. [8] farklı boyuttaki esnek matrisler için bazı esnek çarpımları genelleştirdi ve bu çarpımlar yardımıyla yeni bir karar metodu önerdi. Esnek küme ve esnek matris teorileri birçok karar verme problemine başarıyla uygulanmıştır.

Esnek küme çalışmalarının yanı sıra Çetkin ve ark. [9] ortak evrensel küme üzerinde ters esnek küme tanımladı. Kamacı ve ark. [10] ise ters esnek matrisler üzerinde yeni sütun işlemleri tanımlayarak ters esnek kümeler üzerinde multi-kriterli grup karar verme metodu geliştirdi.

Bu çalışmada Atagün ve Kamacı'nın [6] çalışmasındaki α-kümeler yardımıyla verilen probleme uygun olarak ters esnek kümeler üzerindeki sınırlandırma tanımları üzerinde çalışılmıştır. Ayrıca ters esnek kümeler için türetilen bazı işlemler yardımıyla elde edilen ters esnek karar verme sistemi oluşturulması amaçlanmıştır. Bu sayede, elde edilen yeni yöntemle literatüre katkı sağlanması amaçlanmıştır. Aynı zamanda çalışmada çözülecek karar verme yöntemi finans, sağlık, çevre, şehircilik, üretim vb. alanlara uyarlanabilir olduğundan ülkemiz menfaatlerine katkı sağlayacaktır.

2. ESNEK KÜMELER

Bu bölümde temel bilgi niteliğinde olan ve çalışmanın diğer bölümlerinde sıkça kullanılan esnek küme, esnek matris, ters esnek küme ve ters esnek matris kavramları verilecektir. Ayrıca bu kavramların bazı işlemleri ve özellikleri incelenecektir.

2.1. Esnek Küme

Esnek küme kavramı ilk kez 1999 yılında Molodtsov tarafından tanımlanmıştır. Molodtsov [1], tanım kümesi parametreler ve değer kümesi seçeneklerin kuvvet kümesi olan bir fonksiyon ile oluşturduğu bu küme yapısının belirsizlik içeren birçok alana katkı sağlayacağını ileri sürmüştür.

U başlangıç evrensel kümesi, Ę parametrelerin kümesi, $P(U)$ ise U başlangıç evrensel kümesinin kuvvet kümesi ve Ą ⊆ Ę olsun.

Tanım 2.1.1. ([1]) U evrensel kümesi üzerinde bir $Ƒ_{Ą} = (Ƒ, Ą)$ esnek kümesi, $Ƒ: Ę \to P(U), ę \notin X \Longrightarrow Ƒ(ę) = \emptyset$ olmak üzere; $Ƒ_{Ą} = \{(ę, Ƒ(ę)): ę \in Ę, Ƒ(ę) \in P(U)\}$ sıralı ikililerin kümesidir. Burada Ƒ fonksiyonu $Ƒ_{Ą}$ esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. U üzerinde tüm esnek kümelerin kümesi $S(U)$ ile temsil edilir.

Örnek 2.1.2. $U = \{ų_1, ų_2, ų_3, ų_4, ų_5\}$ evrensel alternatiflerin kümesi, $Ę = \{ę_1, ę_2, ę_3, ę_4\}$ parametrelerin kümesi ve $Ą = \{ę_2, ę_4\} \subseteq Ę$ olsun. $(Ƒ, Ą) = \{(ę_2, \{ų_2, ų_3, u_5\}), (ę_4, \{ų_1, ų_4, ų_5\})\}$ ikilisi U üzerinde bir esnek küme ifade eder.

Tanım 2.1.3. ([2]) $Ƒ_{Ą} = (Ƒ, Ą) \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall\, ę \in Ę$ için $Ƒ(ę) = \emptyset$ ise $Ƒ_{Ą}$ esnek kümesine relatif boş (relative null) esnek küme denir ve Φ_A ile gösterilir. Eğer Ę = Ą ise esnek kümesine *boş (null) esnek küme* denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. ([2]) $Ƒ_{Ą} = (Ƒ, Ą) \in S(U)$ olsun. Eğer $\forall\, ę \in Ę$ için $Ƒ(ę) = U$ *ise* $Ƒ_{Ą}$ esnek kümesine *relatif tam (relative whole) esnek küme* denir ve $Ц_A$ şeklinde gösterilir. Eğer Ę = Ą ise $Ƒ_{Ą}$ esnek kümesine *mutlak (absolute) esnek küme* denir ve $Ц$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.5. $U = \{ų_1, ų_2, ų_3, ų_4, ų_5\}$ bir evrensel küme ve $Ę = \{ę_1, ę_2, ę_3, ę_4\}$ tüm parametrelerin kümesi olsun.

Eğer $Ą = \{ę_1, ę_3\}$ ve $Ƒ(ę_1) = \emptyset, Ƒ(ę_3) = \emptyset$ ise bu takdirde $Ƒ_{Ą}$ esnek kümesi bir *relatif boş esnek* kümedir, yani $Ƒ_{Ą} = \Phi_A$ şeklinde temsil edilir.

Eğer Ɓ = Ę ve $i = 1,2,3,4$ için $Ƒ(ę_i) = \emptyset$ ise bu takdirde $Ƒ_{Ɓ}$ esnek kümesi bir *boş esnek kümedir*, yani $Ƒ_{Ɓ} = \Phi$ şeklinde temsil edilir

Eğer $Ć = \{ę_1, ę_2\}$ ve $Ƒ(ę_1) = U, Ƒ(ę_2) = U$ ise bu takdirde $Ƒ_{Ć}$ esnek kümesi bir *relatif tam esnek kümedir*, yani $Ƒ_{Ć} = Ц_{Ć}$ şeklinde temsil edilir.

Eğer Đ = Ę ve $i = 1,2,3,4$ için $Ƒ(ę) = U$ ise bu takdirde $Ƒ_{Đ}$ esnek kümesi bir *mutlak esnek kümedir*, yani $Ƒ_{Đ} = Ц$ şeklinde temsil edilir.

Tanım 2.1.6. ([2]) $Ƒ_{Ą}\ Ģ_{Ɓ}, \in S(U)$ olsun.

a) Eğer $(Ƒ, Ą) = (\emptyset, \emptyset)$ veya $Ą \subseteq Ɓ$ ve $\forall\, ę \in Ą$ için $Ƒ(ę) \subseteq Ģ(ę)$ ise $Ƒ_{Ą}$ esnek kümesine $Ģ_{Ɓ}$esnek kümesinin *esnek alt kümesi* denir ve $Ƒ_{Ą} \subseteq Ģ_{Ɓ}$ ile gösterilir.

b) Eğer $Ƒ_{Ą} \subseteq Ģ_{Ɓ}$ ve $Ģ_{Ɓ} \subseteq Ƒ_{Ą}$ ise bu esnek kümelere eşit esnek küme denir ve $Ƒ_{Ą} = Ģ_{Ɓ}$ ile gösterilir.

2.2. Esnek Küme İşlemleri

Klasik küme teorisindeki birçok işlem esnek küme teorisine aktarılmıştır. Fakat bu esnek işlemlerin klasik küme işlemlerinden farklı özellikleri mevcuttur. Bu bölümde çeşitli esnek küme işlemleri hatırlatılacaktır.

Tanım 2.2.1. ([3]) $F_A \in S(U)$ olsun. F_A esnek kümesinin *tümleyeni (komplement)* $(F, A)^c = (F^c, A)$ şeklinde tanımlanır, $F^c: A \to P(U)$ burada öyle ki $\forall\, e \in A$ için $F^c(e) = U \backslash F(e)$ şeklinde temsil edilir.

Tanım 2.2.2. ([4]) $F_A\, G_B \in S(U)$ olsun. $F_A \tilde{\cup}\ G_B = H_E$ tarafından tanımlanan esnek kümeye F_A *ve* G_B nin *esnek birleşimi* denir ve $\forall\, e \in E$ için $H(e) = F(e) \cup G(e)$ şeklinde temsil edilir.

Tanım 2.2.3. ([4]) $F_A, G_B \in S(U)$ olsun. $F_A \tilde{\cap}\ G_B = H_E$ tarafından tanımlanan esnek kümeye F_A *ve* G_B´nin *esnek kesişimi* denir ve $\forall\, e \in E$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ şeklinde temsil edilir.

Tanım 2.2.4. ([5]) $F_A,\ G_B \in S(U)$ olsun. $F_A \wedge\ G_B = H_{A \times B}$ tarafından tanımlanan esnek kümeye F_A *ve* G_B ´nin esnek ve işlemi denir. Burada $(\forall (x, y) \in A \times B)$ için $H(x, y) = F(x) \cap G(y)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.5. ([5]) $F_A\ , G_B \in S(U)$ olsun. $F_A \vee\ G_B = H_{A \times B}$ tarafından tanımlanan esnek kümeye F_A *ve* $G_B$nin *esnek veya işlemi* denir. Burada $(\forall (x, y) \in A \times B\ )$ için $H(x, y) = F(x) \cup G(y)$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.2.6. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tüm parametrelerin kümesi olsun. $A = \{e_2, e_4\}, B = \{e_1, e_3, e_4\} \subseteq E$ parametre kümeleri için;

$F_A = \{(e_2, \{u_2, u_3, u_5\}), (e_4, \{u_1, u_4, u_5\})\}$

$F_B = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_3, u_5\}), (e_4, \{u_5\})\}$ U üzerinde tanımlı esnek küme olsunlar.

$(F, A)^c = (F^c, A) = \{(e_2, \{u_1, u_4, \}), (e_4, \{u_2, u_3, \})\}$

$(F, B)^c = (F^c, B) = \{(e_1, \{u_2\}), \big(e_3, \{u_1, u_2, u_4\}, (e_4, \{u_1, u_2, u_3, u_4\})\big)$ tanımlı esnek kümelerinin tümleyenleridir.

$F_A \tilde{\cup}\ F_B = F_C = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_5\}), (e_2, \{u_2, u_3, u_5\}), (e_3, \{u_3, u_5\}), (e_4, \{u_1, u_4, u_5\})\}$

$F_A \tilde{\cap} F_B = F_C = \{(e_4, \{u_5\})\}$

$F_A \wedge F_B = H_{A \times B} =$
$\Big\{\big((e_2, e_1), \{u_{3,}u_4\}\big), \big((e_2, e_3), \{u_{3,}u_5\}\big), ((e_2, e_4), \{u_5\}), \big((e_4, e_1), \{u_1, u_4, u_5\}\big), \big((e_4, e_3), \{\{u_5\}\}\big), ((e_4, e_4), \{u_5\})\Big\}$

$F_A \vee F_B = H_{A \times B}$
$= \Big\{\big((e_2, e_1), U\big), \big((e_2, e_3), \{u_2, u_{3,}u_5\}\big), ((e_2, e_4), \{u_2, u_3, u_5\}), \big((e_4, e_1), U\big), \big((e_4, e_3), \{\{u_1, u_3, u_4, u_5\}\}\big), ((e_4, e_4), \{u_1, u_4, u_5\})\Big\}$

Tanım 2.2.7. ([6]) $F_A \in S(U)$ ve $\alpha \subseteq U$ olsun.

a) (F, A) ´nın alt α- kapsamı; $(F, A)^{\supseteq \alpha} = \{x \in A: f_A(x) \supseteq \alpha\}$
b) (F, A) ´nın üst α- kapsamı; $(F, A)^{\subseteq \alpha} = \{x \in A: f_A(x) \subseteq \alpha\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8. ([6]) $F_A \in S(U)$ ve $\emptyset \neq \alpha \subseteq U$ olsun.

a) (F, A)´nın α-kesişimi ; $(F, A)^{\cap \alpha} = \{x \in A: f_A(x) \cap \alpha \neq \emptyset\}$
a) (F, A)´nın α-birleşimi; $(F, A)^{\cup \alpha} = \{x \in A: f_A(x) \cup \alpha = U\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2.9. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bir evrensel küme ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tüm parametrelerin kümesi olsun. $A = \{e_2, e_4\}$, parametre kümesi için;

$F_A = \{(e_2, \{u_2, u_3, u_5\}), (e_4, \{u_1, u_4, u_5\})\}$

$\alpha = \{u_2, u_3, u_5\} \subseteq U$ ve $\beta = \{u_2, u_3, u_{,4}\} \subseteq U$ için;

$(F, A)^{\supseteq \alpha} = \{e_2\}$, $(F, A)^{\subseteq \alpha} = \{e_2\}$, $(F, A)^{\cap \beta} = \{e_2, e_4\}$, $(F, A)^{\cup \beta} = \{e_4\}$ eşitleri elde edilir.

2.3. ESNEK MATRİS

Esnek matrisler, esnek kümeleri ifade etmenin farklı yöntemlerinden birisidir. Özellikle karmaşık yapıları anlamlandırmak için çok kullanışlı bir metottur. Bu bölümde esnek matrisler ve bu matrislerin bazı işlemleri verilecektir.

Tanım 2.3.1 ([7]) $F_A = (F, A) \in S(U)$olsun. Bu durumda

$$R_{Ą} = \{(h_i, ę_j): ę_j \in Ą, h_i \in Ƒ(ę_j)\} \subseteq U \times Ę$$

kümesine $Ƒ_{Ą} = (Ƒ, Ą)$ esnek kümesinin bağıntı formu denir. $R_{Ą}$ bağıntı formunun karakteristik fonksiyonu

$$\chi_{R_{Ą}}: U \times Ę \to \{0,1\},\ \chi_{R_{Ą}}(h_i, ę_j) = \begin{cases} 1, & (h_i,\ ę_j) \in R_{Ą} \\ 0, & (h_i, ę_j) \notin R_{Ą} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ bir evrensel küme(seçeneklerin kümesi), $Ę = \{ę_1, ę_2, \dots, ę_n\}$ parametrelerin kümesi ve $Ą \subseteq Ę$olmak üzere $R_{Ą}$ aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir:

$R_{Ą}$	$ę_1$	$ę_2$	$\cdots$	$ę_n$
h_1	$\chi_{R_{Ą}}(h_1, ę_1)$	$\chi_{R_{Ą}}(h_1, ę_2)$	$\cdots$	$\chi_{R_{Ą}}(h_1,\ ę_n)$
h_2	$\chi_{R_{Ą}}(h_2, ę_1)$	$\chi_{R_{Ą}}(h_2, ę_2)$	$\cdots$	$\chi_{R_{Ą}}(h_2, ę_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
h_m	$\chi_{R_{Ą}}(h_m, ę_1)$	$\chi_{R_{Ą}}(h_m, ę_2)$	$\cdots$	$\chi_{R_{Ą}}(h_m, ę_n)$

Bu durumda, $ą_{ij} = \chi_{R_{Ą}}(h_i,\ ę_j)$ alınarak tanımlanan

$$[ą_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} ą_{11} & \cdots & ą_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ą_{m1} & \cdots & ą_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine $Ƒ_{Ą} = (Ƒ, Ą)$ esnek kümesinin U üzerinde $m \times n$ *esnek matrisi* denir. Bu tanımla, bir esnek küme bir esnek matrise ve bir esnek matris de bir esnek kümeye dönüştürülebilir. U üzerindeki tüm $m \times n$ esnek matrislerinin kümesi $SM_{m\times n}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.2. ([7]) $[ą_{ij}] \in SM_{m\times n}$ olsun.

- $\forall\ i, j$ için $ą_{ij} = 0$ ise $[ą_{ij}]$ esnek matrisine *sıfır esnek matrisi* denir ve $[0]$ ile gösterilir.
- $\forall\ i, j$ için $ą_{ij} = 1$ ise $[ą_{ij}]$ esnek matrisine *evrensel esnek matrisi* denir ve $[1]$ ile gösterilir
- $\forall\ i$ için ve $j \in I_{Ą} = \{j: ę_j \in Ą\}$ için $ą_{ij} = 1$ ise $[ą_{ij}]$esnek matrisine *Ą-evrensel esnek matrisi* denir ve $[1_{Ą}]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3. ([7]) $[ą_{ij}], [ƀ_{ij}] \in SM_{m\times n}$ olsun.

$\forall\ i, j$ için $ą_{ij} \le ƀ_{ij}$ ise $[ą_{ij}]$ ye $[ƀ_{ij}]$ nin *esnek alt matrisi* denir ve $[ą_{ij}]\ \tilde{\subseteq}\ [ƀ_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

2.4. ESNEK MATRİS İŞLEMLERİ

Tanım 2.4.1. ([7]) $[ą_{ij}], [ƀ_{ij}] \in SM_{m\times n}$ olsun. Bu durumda $[ȼ_{ij}]$ esnek matrisine $\forall i, j$ *için* $ȼ_{ij} = max\{ą_{ij}ƀ_{ij}\}$ *ise* $[ȼ_{ij}] \in SM_{m\times n}$ matrisine $[ą_{ij}]$ ve $[ƀ_{ij}]$ matrislerinin *esnek birleşimi* denir ve $[ą_{ij}]\ \tilde{\cup}\ [ƀ_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2. ([7]) $[ą_{ij}], [ƀ_{ij}] \in SM_{m\times n}$ olsun. Bu durumda $[ȼ_{ij}]$ esnek matrisine $\forall i, j$ için $ȼ_{ij} = \min\{ą_{ij}ƀ_{ij}\}$ ise $[ȼ_{ij}] \in SM_{m\times n}$ matrisine $[ą_{ij}]$ *ve* $[ƀ_{ij}]$ matrislerinin *esnek kesişimi* denir ve $[ą_{ij}]\ \tilde{\cap}\ [ƀ_{ij}]$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.3. ([4]) $[ą_{ij}] \in SM_{m\times n}$ olsun. $\forall i, j$ için $ȼ_{ij} = 1 - ą_{ij}$ ise bu durumda $[ȼ_{ij}]$ esnek matrisi $[ą_{ij}]$ esnek matrisinin *tümleyeni (komplement)* olarak isimlendirilir ve $[ȼ_{ij}] = [ą_{ij}]^c$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4.4. $U = \{h_1, h_2, h_3\}$ bir evrensel küme ve $Ę = \{ę_1, ę_2, ę_3, ę_4\}$ parametrelerin kümesi olmak üzere $Ą = \{ę_1, ę_2\}$ ve $Ɓ = \{ę_1, ę_2, ę_4\}$ alalım. Bu cümleler göre oluşturulan $Ƒ_{Ą}$ ve $Ƒ_{Ɓ}$ esnek kümelerinin esnek matrisleri sırasıyla

$$[ą_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [ƀ_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$[ą_{ij}] \ \tilde{\cup} \ [ƀ_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ [ą_{ij}] \ \tilde{\cap} \ [ƀ_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve ayrıca}$$

$$[ą_{ij}]^c = 1 - [ą_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ [ƀ_{ij}]^c = 1 - [ƀ_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Tanım 2.4.5.([8]) $[ą_{ij}], [ƀ_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda,

$[ą_{ij}]$ ve $[ƀ_{ik}]$ esnek matrislerinin *ve-çarpımı* $\wedge : SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2}$, $[ą_{ij}] \wedge [ƀ_{ik}] = [ƈ_{ip}]$

şeklinde tanımlanır, burada $ƈ_{ip} = min\{ą_{ij}, ƀ_{ik}\} \ni p = n(j-1) + k$ dır.

Tanım 2.4.6. ([8]) $[ą_{ij}], [ƀ_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda

$[ą_{ij}]$ ve $[ƀ_{ik}]$ esnek matrislerinin *veya-çarpımı* $\vee : SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2}$, $[ą_{ij}] \vee [ƀ_{ik}] = [ƈ_{ip}]$

şeklinde tanımlanır, burada $ƈ_{ip} = max\{ą_{ij}, ƀ_{ik}\} \ni p = n(j-1) + k$ dır.

Tanım 2.4.7. ([8]) $[ą_{ij}]$, $[ƀ_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda

$[ą_{ij}]$ ve $[ƀ_{ik}]$ esnek matrislerinin *ve-değil çarpımı* $\overline{\wedge} : SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2}$, $[ą_{ij}] \overline{\wedge} [ƀ_{ik}] = [ƈ_{ip}]$

şeklinde tanımlanır, burada $ƈ_{ip} = min\{ą_{ij}, 1 - ƀ_{ik}\} \ni p = n(j-1) + k$ dır.

Tanım 2.4.8. ([8]) $[ą_{ij}], [ƀ_{ik}] \in SM_{m\times n}$ iki esnek matris olsun. Bu durumda

$[ą_{ij}]$ ve $[ƀ_{ik}]$ esnek matrislerinin *veya- değil çarpımı* $\underline{\vee} : SM_{m\times n} \times SM_{m\times n} \longrightarrow SM_{m\times n^2}$, $[ą_{ij}] \underline{\vee} [ƀ_{ik}] = [ƈ_{ip}]$

şeklinde tanımlanır, burada $ƈ_{ip} = max\{ą_{ij}, 1 - ƀ_{ik}\} \ni p = n(j-1) + k$ dır.

Örnek 2.4.9. $[ą_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $[ƀ_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$[ƈ_{ip}] = [ą_{ij}] \wedge [ƀ_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[ƈ_{ip}] = [ą_{ij}] \vee [ƀ_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[ƈ_{ip}] = [ą_{ij}] \overline{\wedge} [ƀ_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[ƈ_{\mathrm{ip}}] = [ą_{ij}] \underline{\vee} [ƀ_{\mathrm{ik}}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.4.10. ([6]) $[a_{ij}] \in SM_{m\times n}$ ve $\alpha = \{u_i : i \in I\} \subseteq U$, $I \subseteq \{1,2,\ldots m\}$ olsun.

a) $[ą_{ij}]^{\alpha} = \coprod_{j=1}^{n} \begin{cases} |ą_{ij}|_j & , \quad \forall\, i \in a_{ij} \\ |0|_j & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$

$[ą_{ij}]^{\alpha}$, $[ą_{ij}]$ nın *α-üst esnek matrisi* olarak tanımlanır.

b) $[ą_{ij}]_{\alpha} = \coprod_{j=1}^{n} \begin{cases} |0|_j & , \quad \exists i \in \{1,2,\dots m\} \setminus I, a_{ij} = 1 \\ |ą_{ij}|_j & , \quad diğer\ durum \end{cases}$

$[ą_{ij}]_{\alpha}$, $[ą_{ij}]$ nın *α -alt esnek matrisi* olarak tanımlanır.

Burada açıkça görüldüğü üzere $[ą_{ij}]^{\alpha}$ *ve* $[ą_{ij}]_{\alpha}$ esnek matrisler $m \times n$ tipindedir.

Tanım 2.4.11. ([6]) $[ą_{ij}] \in SM_{m\times n}$ ve $\alpha = \{u_i : i \in I\} \subseteq U$, $I \subseteq \{1,2, \dots m\}$ olsun.

a) $[ą_{ij}]^{\cap\alpha} = \coprod_{j=1}^{n} \begin{cases} |ą_{ij}|_j & , \quad \exists i \in I,\ a_{ij} = 1 \\ |0|_j & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$

$[ą_{ij}]^{\cap\alpha}$, $[ą_{ij}]$ ´nın *α -kesişim esnek matrisi* olarak tanımlanır.

b) $[ą_{ij}]^{\cup\alpha} = \coprod_{j=1}^{n} \begin{cases} |ą_{ij}|_j & , \quad \forall i \in \{1,2, \dots, m\} \setminus I,\ a_{ij} = 1 \\ |0|_j & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$

$[ą_{ij}]^{\cup\alpha}$, $[ą_{ij}]$ ´nın *α -birleşim esnek matrisi* olarak tanımlanır.

Burada açıkça görüldüğü üzere $[ą_{ij}]^{\cap\alpha}$ *ve* $[ą_{ij}]^{\cup\alpha}$ esnek matrisleri $m \times n$ tipindedir.

3. TERS ESNEK KÜME VE MATRİS

Tanım 3.1.1. ([9]) U alternatif nesnelerin kümesi ve E_t parametrelerin kümesi olsun. $Ę_t$´nin kuvvet kümesi $P(Ę_t)$ ile tanımlansın. $\bar{F}_{E_t}^{U} = \{(u_j, \bar{f}(u_j)) : u_j \in U, \bar{f}(u_j) \in P(Ę_t)\}$ sıralı ikilisine U ´nun *ters esnek kümesi* denir. $\bar{f}: U \to P(Ę_t)$ eşleyen bir değer kümesidir.

Örnek 3.1.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ nesnelerin kümesi olsun. $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ parametrelerin kümesi olsun.

$\bar{F}_{Ę}^{U} = \{(u_1, \{ę_1, ę_2\}), (u_2, \{ę_2, ę_3\}), (u_3, Ę), (u_4, \emptyset)\}$ U üzerindeki ters esnek kümeyi ifade eder.

Tanım 3.1.3. ([9]) $U = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ alternatif nesnelerin kümesi ve $Ę_t = \{ę_1, ę_2, \dots, ę_m\}$ parametrelerin kümesi ve $Ą \subseteq Ę$ olsun. $Ę_t$´nin kuvvet kümesi $P(Ę_t)$ ile tanımlansın.

$[\bar{ą}_{ij}] = \begin{cases} 1 & , \quad ę_i \in \bar{f}(u_j) \\ 0 & , \quad ę_i \notin \bar{f}(u_j) \end{cases}$ olmak üzere $[\bar{ą}_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} ą_{11} & \cdots & ą_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ą_{m1} & \cdots & ą_{mn} \end{bmatrix}$ matrisine

$\bar{F}_{Ą} = (\bar{F}, Ą)$ esnek kümesinin U üzerinde $m \times n$ *ters esnek matris* denir.

Bu tanımla, bir ters esnek küme bir ters esnek matrise ve bir ters esnek matris de bir ters esnek küme ye dönüştürülebilir. U üzerinde tüm $m \times n$ ters esnek matrislerinin kümesi $ISM_{m\times n}$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.1.4. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ nesnelerin kümesi olsun. $Ę = \{ę_1, ę_2, ę_3\}$ parametrelerin kümesi olsun.

$\bar{F}_{Ę}^{U} = \{(u_1, \{ę_1, ę_2\}), (u_2, \{ę_2, ę_3\}), (u_3, Ę), (u_4, \emptyset)\}$ U üzerinde ki ters esnek kümeyi ifade eder. Ters esnek kümesinin $[\bar{a}_{ij}]$ ters esnek matrisi

$[\bar{ą}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.1.5. [(10)] $[\bar{ą}_{ij}] \in ISM_{m\times n}$ olsun. $\forall i, j$ için $\bar{c}_{ij} = 1 - \bar{ą}_{ij}$ ise bu durumda $[\bar{c}_{ij}]$ters esnek matrisi $[\bar{ą}_{ij}]$ ters esnek matrisinin *tümleyeni (komplement)* olarak isimlendirilir ve $[\bar{ą}_{ij}]^{c}$ şeklinde temsil edilir.

Tanım 3.1.6. $(\bar{F}, U) \in IS(U)$ ve $\emptyset \neq \bar{\alpha} \subseteq Ę$ olsun.

a) $\bar{F}$ nin U da *$\bar{\alpha}$- ters kesişim kümesi*

$(\bar{F}, U)^{\cap\bar{\alpha}} = \{u \in U: \bar{F}(x) \cap \bar{\alpha} \neq \emptyset\}$ şeklinde tanımlanır.

b) $\bar{F}$ nin U da $\bar{\alpha}$*- ters birleşim kümesi*
$(\bar{F}, U)^{\cup\bar{\alpha}} = \{u \in U: \bar{F}(x) \cup \bar{\alpha} = E\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.7. $(\bar{F}, U) \in IS(U)$ ve $\bar{\alpha} \subseteq E$ olsun.

a) $\bar{F}$ nin U da *üst* $\bar{\alpha}$*- ters kapsam kümesi*
$(\bar{F}, U)^{\subseteq\bar{\alpha}} = \{u \in U: \bar{F}(x) \subseteq \bar{\alpha}\}$ şeklinde tanımlanır.

b) $\bar{F}$ nin U da *alt* $\bar{\alpha}$*- ters kapsam kümesi*
$(\bar{F}, U)^{\supseteq\bar{\alpha}} = \{u \in U: \bar{F}(x) \supseteq \bar{\alpha}\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.8. $[\bar{a}_{ij}] \in ISM_{m\times n}$ ve $\bar{\alpha} = \{e_i: i \in I\} \subseteq E$, $I \subseteq \{1,2, \dots m\}$ olsun.

$$[\bar{a}_{ij}]^{\cap\bar{\alpha}} = \coprod_{j=1}^{n} \begin{cases} |\bar{a}_{ij}|_j & , \quad \exists i \in I,\ \bar{a}_{ij} = 1 \\ |\bar{0}|_j & , \quad diğer\ durumlar \end{cases}$$

$[\bar{a}_{ij}]^{\cap\bar{\alpha}}$, $[\bar{a}_{ij}]$ ′nın $\bar{\alpha}$ *-ters kesişim esnek matrisi* olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.9. $\bar{F}_A, \bar{F}_B$ ters esnek kümeler ve bu kümelere karşılık gelen ters esnek matrisler sırasıyla $[\bar{a}_{ip}]$ $ve[\bar{b}_{jp}]$ olsun.

a) $[\bar{a}_{ip}]$ $ve[\bar{b}_{jp}]$ ters esnek matrislerinin *Ve-satır çarpımı* $\curlywedge_{\bar{r}}$;

$\curlywedge_{\bar{r}}$: $ISM_{m_1\times n} \times ISM_{m_2\times n} \longrightarrow ISM_{m_1 m_2\times n}$, $[\bar{a}_{ip}] \curlywedge_{\bar{r}} [\bar{b}_{jp}] = [\bar{c}_{vp}]$

şeklinde tanımlanır, burada $\bar{c}_{vp} = min\{\bar{a}_{ip}, \bar{b}_{jp}\}$ öyle ki $i = \beta, v = (\beta - 1)m_2 + j$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $v \leq \beta m_2$ dir.

b) $[\bar{a}_{ip}]$ ve $[\bar{b}_{jp}]$ ters esnek matrislerinin *Veya- satır çarpımı* $\curlyvee_{\bar{r}}$;

$\curlyvee_{\bar{r}}$: $ISM_{m_1\times n} \times ISM_{m_2\times n} \longrightarrow ISM_{m_1 m_2\times n}$, $[\bar{a}_{ip}] \curlyvee_{\bar{r}} [\bar{b}_{jp}] = [\bar{c}_{vp}]$

şeklinde tanımlanır, burada $\bar{c}_{vp} = max\{\bar{a}_{ip}, \bar{b}_{jp}\}$ öyle ki $i = \beta, v = (\beta - 1)m_2 + j$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $v \leq \beta m_2$ dir.

c) $[\bar{a}_{ip}]$ ve $[\bar{b}_{jp}]$ ters esnek matrislerinin *Ve değil –satır çarpımı* $\overline{\curlywedge}_{\bar{r}}$;

$\overline{\curlywedge}_{\bar{r}}$: $ISM_{m_1\times n} \times ISM_{m_2\times n} \longrightarrow ISM_{m_1 m_2\times n}$, $[\bar{a}_{ip}] \overline{\curlywedge}_{\bar{r}} [\bar{b}_{jp}] = [\bar{c}_{vp}]$

şeklinde tanımlanır, burada $\bar{c}_{vp} = min\{\bar{a}_{ip}, 1 - \bar{b}_{jp}\}$ öyle ki $i = \beta, v = (\beta - 1)m_2 + j$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $v \leq \beta m_2$ dir.

d) $[\bar{a}_{ip}]$ ve $[\bar{b}_{jp}]$ ters esnek matrislerinin *Veya değil – satır çarpımı* $\overline{\curlyvee}_{\bar{r}}$;

$\overline{\curlyvee}_{\bar{r}}$: $ISM_{m_1\times n} \times ISM_{m_2\times n} \longrightarrow ISM_{m_1 m_2\times n}$, $[\bar{a}_{ip}] \overline{\curlyvee}_{\bar{r}} [\bar{b}_{jp}] = [\bar{c}_{vp}]$

şeklinde tanımlanır, burada $\bar{c}_{vp} = max\{\bar{a}_{ip}, 1 - \bar{b}_{jp}\}$ öyle ki $i = \beta, v = (\beta - 1)m_2 + j$ şartını sağlayan en küçük pozitif tam sayı olmak üzere $v \leq \beta m_2$ dir.

Teorem 3.1.10.

i. $[1]_{1\times n}$ $\curlywedge_{\bar{r}}$ Ve-satır işlemine göre $ISM(U)$ nun birim elemanıdır.

ii. $[0]_{1\times n}$ $\curlyvee_{\bar{r}}$ Veya-satır işlemine göre $ISM(U)$ nun birim elemanıdır.

İspat :

i. $\left[\bar{ą}_{ip}\right] \,\bar{\curlywedge}_{\bar{r}}\, [1]_{1\times n} = \left[\bar{b}_{jp}\right]$ olsun. Tanım 3.1.9. a) dan $\forall\, i \in |E|$ için $\bar{b}_{jp} = min\{\bar{ą}_{ip}, 1\}$ olduğundan $\left[\bar{ą}_{ip}\right] = \left[\bar{b}_{jp}\right]$ eşitliği elde edilir.

ii. Yukardaki ispata benzer olarak ispata ulaşılabilir.

Önerme 3.1.11. $\left[\bar{ą}_{ip}\right] \in ISM_{m_1\times n}$, $\left[\bar{b}_{kj}\right] \in ISM_{m_2\times n}$, $\left[\bar{c}_{lj}\right] \in ISM_{m_3\times n}$ olsun.

i. $\left(\left[\bar{ą}_{ip}\right] \curlywedge_{\bar{r}} \left[\bar{b}_{kj}\right]\right) \curlywedge_{\bar{r}} \left[\bar{c}_{lj}\right] = \left[\bar{ą}_{ip}\right] \curlywedge_{\bar{r}} \left(\left[\bar{b}_{kj}\right] \curlywedge_{\bar{r}} \left[\bar{c}_{lj}\right]\right)$ eşitliği sağlandığından ve- satır işlemi *birleşmelidir.*

ii. $\left(\left[\bar{ą}_{ip}\right] \curlyvee_{\bar{r}} \left[\bar{b}_{kj}\right]\right) \curlyvee_{\bar{r}} \left[\bar{c}_{lj}\right] = \left[\bar{ą}_{ip}\right] \curlyvee_{\bar{r}} \left(\left[\bar{b}_{kj}\right] \curlyvee_{\bar{r}} \left[\bar{c}_{lj}\right]\right)$ eşitliği sağlandığından veya- satır işlemi *birleşmelidir.*

Teorem 3.1.10 ve Önerme 3.1.11 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.12.

i. $ISM(U)$ $\curlywedge_{\bar{r}}$ Ve-satır işlemine göre bir *monoidtir.*

ii. $ISM(U)$ $\curlyvee_{\bar{r}}$ Veya-satır işlemine göre bir *monoidtir.*

4. TERS ESNEK MATRİSLERDE TOPLAM MAKSİMUM İLE KARAR VERME METODU

Bu bölümde ilk olarak Çağman ve Enginoğlu [7] çalışmasındaki karar algoritması uygulanılarak bir karar verme probleminin çözümü elde edilmiştir. Daha sonrasında ise aynı problemin ters esnek küme ve matris kullanılarak sonucuna gidilmiştir.

Örnek 4.1.1. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel alternatiflerin kümesi ve $E = \{\, e_1, e_2, e_3, e_4 \,\}$ parametrelerin kümesi olsun.

1. Adım:

A kişisinin seçtiği parametreler; $A = \{\, e_2, e_4 \,\} \subset E$, B kişisinin seçtiği parametreler; $B = \{\, e_1, e_3, e_4 \,\} \subset E$ ve

$(F, A) = \{(e_2, \{u_2, u_3, u_5\}), (e_4\{u_1, u_4, u_5\})\}$, $(F, B) = \{(e_1, \{u_1, u_3, u_4, u_5\}), (e_3, \{u_3, u_5\}), (e_4, \{u_5\})\}$ karar vericilerin esnek kümeleri olsun.

2. Adım:

(F, A) esnek kümesine ait esnek matris; $\left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(F, B) esnek kümesine ait esnek matris; $\left[b_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Adım: $\left[a_{ij}\right] \curlywedge \left[b_{ij}\right] = \left[c_{ip}\right]$

$\left[c_{ip}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ esnek matrisi elde edilir.

4. Adım: $\left[c_{ip}\right] \in SM_{5\times 16}$, $I_k = \left\{p\!: \exists i, c_{ip} \neq 0,\ (k-1)n < p \leq kn\right\}$ $\forall\, k \in I = \{1,2,3,4\}$

5. Adım: $I_1 = \emptyset$ olup $t_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $I_2 = \{5,7,8\}$ olup $t_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \emptyset$ olup $t_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $I_4 = \{13,15,16\}$ olup $t_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

dir.

$Mm[c_{ip}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ max-min karar matrisi bulunur.

Karar vericiler için ortak seçim yapılabilecek en uygun nesne $\{u_5\}$ dir.

Örnek 4.1.1. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel alternatiflerin kümesi ve $E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$ parametrelerin kümesi olsun.

1. Adım:

A kişisinin seçtiği parametreler; $A = \{ e_2, e_4 \} \subset E$, B kişisinin seçtiği parametreler; $B = \{ e_1, e_3, e_4 \} \subset E$ ve

$(\bar{F}, A) = \{(u_1, \{e_4\}), (u_2, \{e_2\}), (u_3, \{ e_2\}), (u_4, \{e_4\}), (u_5, \{e_2, e_4\})\}$

$(\bar{F}, B) = \{(u_1, \{e_1\}), (u_2, \emptyset), (u_3, \{ e_1, e_3\}), (u_4, \{e_1\}), (u_5, \{e_1, e_3, e_4\})\}$ karar vericilerin ters esnek kümeleri olsun.

2. Adım:

$(\bar{F}, A)$ ters esnek kümesine ait ters esnek matrisi; $[\bar{a}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$(\bar{F}, B)$ ters esnek kümesine ait ters esnek matrisi; $[\bar{b}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

3. Adım: $[\bar{a}_{ip}] \wedge_{\bar{F}} [\bar{b}_{jp}] = [\bar{c}_{vp}]$

$$[\bar{c}_{vp}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Adım: $[\bar{c}_{vp}] \in SM_{16\times 5}$, $I_k = \{v : \exists j, c_{jp} \neq 0, \ (k-1)n < v \leq kn\}$ $\forall \, k \in I = \{1,2,3,4\}$

5. Adım: $I_1 = \emptyset$ olup $t_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, $I_2 = \{5,7,8\}$ olup $t_2 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$,
$I_3 = \emptyset$ olup $t_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, $I_4 = \{13,15,16\}$ olup $t_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ dir. Dolayısıyla

$Mm[\bar{c}_{vp}] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ max-min karar satır matrisi bulunur.

Karar vericiler için ortak seçim yapılabilecek en uygun nesne $\{u_5\}$ dir.

Tanım 4.1.3. $U = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ alternatif nesnelerin kümesi ve $\text{Ȩ}_t = \{ȩ_1, ȩ_2, \dots, ȩ_m\}$ parametrelerin kümesi ve $(\bar{F}, \text{Ą})$ ters esnek kümesi ve $[\bar{ą}_{ip}]$matriside kümeye karşılık gelen ters esnek matrisi olsun.

$\text{Ś}_k = \sum_{j=1}^{m_1 m_2} ą_{jk}$ şeklinde tanımlı değere seçim değeri denir.

Tanım 4.1.4. $U = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ **.** alternatif nesnelerin kümesi olsun. Nesneleri sıralarken seçim değeri $Ś_k$ kullanılır. Eğer $Ś_{k_1} > Ś_{k_2} > \cdots > Ś_{k_n}$ *ise* $h_{k_1} > h_{k_2} > \cdots h_{k_n}$ şeklinde alternatifler sıralanır ve optimum olan nesne seçilir.

Karar Algoritması

1. Adım: Karar vericiler $Ȩ_1 \cap Ȩ_2 \cap \ldots Ȩ_r \neq \emptyset$ olacak şekilde parametre kümesi seçilir, ters esnek kümleri ve ters esnek matrisleri oluşturulur.
2. Adım: $\bar{\alpha}_t$- kümeleri tanımlanır. $(t = (1,2, \ldots r))$
3. Adım: $\bar{\alpha}_t$- kümelerine göre uygun olan $\bar{\alpha}_t$ - kesişim ters esnek matrisleri oluşturulur.
4. Adım: Probleme uygun olarak matrisler arasında satır işlemi uygulanır.
5. Adım: Her bir nesne için $Ś_k$ seçim değeri hesaplanır ve nesneler arası sıralama yapılarak U kümesine ait optimum nesne seçilir.

Örnek 4.1.5. Bir anne-baba velisi olduğu çocuğu için okul araştırması yapacaklardır. Anne okulun iyi(olumlu) yönlerini, baba ise okulun olumsuz yönlerini araştırsın. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 5 farklı okul seçeneğinden parametrelerine göre en uygun okulu belirleyecekler.

1. Adım:

Olumlu parametre;

$$E_1 = \{e_1^1 = \text{ö}ğretmen\ kadrosu\ iyi, e_2^1 = eve\ yakın\ mesafe, e_3^1 = sınıf\ mevcudu\ az, e_4^1 = başarılı\}$$

Olumsuz parametre;

$$E_2 = \{e_1^2 = yemekhanesi\ yok,\ e_2^2 = servis\ ile\ ulaşım\ imkanı\ yok,\ e_3^2 = labaratuvarı\ yok\}$$

$$(\bar{F}, E_1) = \{(u_1, \{e_1^1, e_3^1\}), (u_2, \{e_1^1, e_2^1, e_4^1\})(u_3, \{e_3^1\}), (u_4, \{e_2^1\}), (u_5, \{e_1^1, e_3^1, e_4^1\})\}$$

$$(\bar{F}, E_2) = \{(u_1, \{e_1^2, e_3^2\}), (u_2, \{e_1^2,\})(u_3, \{e_3^2, e_3^2\}), (u_4, \{e_1^2, e_2^2\}), (u_5, \{e_2^2,\})\}$$

$$[\bar{F}, E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{olumlu parametre kümesine ait ters esnek matris}$$

$$[\bar{F}, E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{olumsuz parametre kümesine ait ters esnek matris}$$

2. Adım:

$\bar{\alpha}_1 \subseteq E_1$ ise $\bar{\alpha}_1 = \{e_1^1, e_4^1\}$ $(I = \{1,4\})$

$\bar{\alpha}_2 \subseteq E_2$ ise $\bar{\alpha}_2 = \{e_2^2, e_3^2\}$ $(I = \{2,3\})$ buradaki $\bar{\alpha}_2$ seçimi karar vericinin okul seçiminde kesinlikle taviz veremeyeceği parametreleri göstermektedir.

3. Adım:

$$[\bar{F}, E_1]^{\cap \bar{\alpha}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{olumlu ters esnek matrisin } \bar{\alpha}_1 - \text{kesişim ters esnek matrisi,}$$

$[\bar{F}, E_2]$ ters esnek matrisi için ilk olarak $\bar{\alpha}_2$ −kesişim ters esnek matrisi

$$[\bar{F}, E_2]^{\cap \bar{\alpha}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{matrisi elde edilir.}$$

4. Adım:

Olumlu ve olumsuz parametreler arası ortak bir seçim yapılacağı için ve değil işlemi bu problem için idealdir. O halde E_2 olumsuz parametre sunduğu için $[\bar{F}, E_2]^{\cap \bar{\alpha}_2}$ ters enek matrisinin tümleyeni bulunur.

$$([\bar{F}, E_2]^{\cap \bar{\alpha}_2})^c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{matrisi bulunur.}$$

$$[\bar{F}, E_1]^{\cap\bar{\alpha}_1} \,\overline{\lambda}_{\bar{r}}\, [\bar{F}, E_2]^{\cap\bar{\alpha}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ sonucu elde edilir.

5. Adım:
$\acute{S}_1 = 1, \acute{S}_2 = 6, \acute{S}_3 = 0, \acute{S}_4 = 0, \ \acute{S}_5 = 4$ seçim değerleri elde edilen alternatif nesneler;

$\acute{S}_2 > \acute{S}_5 > \acute{S}_1 > \acute{S}_3 = \acute{S}_4 \ ile \ u_2 > u_5 > u_1 > u_3 = u_4$

sıralamasına sahip olup optimum seçim $\{u_2\}$ okulu olarak belirlenmiş olur.

Kaynakça

[1] Molodtsov, D. 1999. Soft Set Theory-First Results, Computers and Mathematics with Applications, 37 (1) (1999), 19-31.

[2] Maji, P. K., Bismas, R., Roy, A.R. 2003. Soft Set Theory, Computers and Mathematics with Applications, 45(1) (2003), 550-562

[3] Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M. 2009. On Some New Operations in Soft Set Theory, Comput. Math Appl. 57(9) (2009), 1547-1553

[4] Çağman, N. and Enginoğlu,S. 2010. Soft Set Theory and Uni-İnt Decision Making, Eur. J. Oper 207(2) (2010)848-855.

[5] Sezgin A., Atagün A.O. 2011. On Operations of Soft Sets Comput. Math. Appl. , 61(5) (2011) 1457-1467.

[6] Atagün, A.O. ve Kamacı, H., Decomposition of soft sets and soft matrices with applications in group decision making, (submitted.)

[7] Çağman, N. and Enginoğlu,S. 2010. Soft Matrix Theory and İts Decision Making,Comput.Math. Appl., 59(10) (2010), 3308-3314.

[8] Atagün, A.O. ve Kamacı, H., Oktay O. (2018) Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making. Neural. Comput. Applic. 29,(2018) 445-456

[9] Çetkin, V., Aygünoğlu A., and Aygün, H., A new approach in handling soft decision making problems, J Nonlinear Sci Appl 9(2016), 231-239

[10] Kamacı, H., and Petchimuthu, S. The row-products of inverse soft matrices in multicriteria decision making, Jour of İntel and Fuzzy Sys. , 36(6), (2019), 6425-6441.