



# Kesit Akademi Dergisi

The Journal of Kesit Academy

ISSN: 2149 - 9225

Yıl: 3, Sayı: 7, Mart 2017, s. 127-144

**Yrd. Doç. Dr. Handan DEMİRCİOĞLU**

Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı  
handandemircioglu@gmail.com

**Halid Akif TUNCAY**

Özel Yıldırım Bilgi Özel Öğretim Kursu  
hattuncay@gmail.com

## **ORTAÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ, MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN VE AKADEMİSYENİN ÖZELLEŞTİRME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ: KAĞIT ŞERİT SORUSU<sup>1</sup>**

### **Özet**

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının, farklı kıdemdeki ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin ve bir akademisyenin problem çözme süreci boyunca özelleştirme becerilerini incelemektir. Araştırma, 2013-2014 eğitim öğretim döneminde, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalında 5. sınıfta eğitim ve öğretimine devam eden iki matematik öğretmen adayı, Mersin Silifke ilçesindeki bir Anadolu lisesinde kadrolu iki matematik öğretmeni ve bir üniversitede doktora yapmakta olan bir akademisyen olmak üzere toplam beş katılımcı ile gerçekleşmiştir. Katılımcıların özelleştirme becerilerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden birisi olan durum çalışması kullanılmıştır. Veriler görüşmelerde yapılan video kayıtları incelenerek deşifre edilmiş, yazılı hale getirilmiş, katılımcıların teslim ettikleri çözüm kâğıtları ile birlikte bilgisayar ortamına aktararak elde edilmiştir. Elde edilen bulgular öğretmenlerin genelleme yapmadan problemi çözerken akademisyen ve öğretmen adaylarının genelleme yaptıktan sonra cevabı ifade ettiklerini göstermiştir. Ayrıca öğretmenler üç özel durumdan hareketle sonuca ulaşırken, akademisyen iki özel durumdan hare-

---

<sup>1</sup> Bu çalışma, Yrd. Doç. Dr. Handan Demircioğlu danışmanlığında Akif Tuncay'ın tamamladığı yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

ket etmiştir. Öğretmen adayları ise öğretmen ve akademisyene göre daha fazla özel durumu incelemişlerdir.

**Anahtar Kelimeler:** Matematiksel Düşünme, Özelleştirme, Genelleme, Varsayım-  
da Bulunma, İspat.

## EVALUATION OF THE SPECIALIZING SKILLS OF PROSPECTIVE SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS, MATHEMATICS TEACHERS AND AN ACADEMICIAN: THE PAPER STRIP QUESTION

### Abstract

The purpose of this study was to evaluate the Specializing skills exhibited during problem solving by prospective mathematics teachers, by an academic, and by teachers with different levels of experience and teaching at different levels. The study was performed during the 2013-2014 academic year with five participants, which included two prospective teachers in their fifth year at Department of Secondary School Mathematics Education; two mathematics teachers working at an Anatolian High School in the Silifke district of Mersin province; and an academic currently performing his doctorate studies at a university. The case study method – which is one of the qualitative research methods – was used to examine the customization skills of the participants. Data were deciphered and processed by examining the video recordings taken during the meetings, and then converted into a written form. This data was then transferred to a computer environment together with the written solutions/answers submitted by the study participants. The study findings showed that while teachers tended to solve a problem without resorting to generalizations, the prospective teachers and academic expressed that they normally try to find answers to a problem after using generalizations. In addition, it was observed that while the teachers were able to solve problems by using three specific cases, the academic was able to do the same by using two specific cases. Prospective teachers, on the other hand, had to examine a larger number of specific cases than the teachers and the academic in order to solve the same problems.

**Keywords:** Mathematical Thinking, Specializing, Generalizing, Assuming, Proof

### GİRİŞ

Matematik, konusu nesnelere olan kavramsal bir bilimdir. Umay'a (2003) göre matematik hayatta muhakeme etme, problem çözme becerisi kazandırma, olaylar arası ilişki kurma ve düşünme gibi beceriler kazandırır. Dolayısıyla sadece sayıları, işlemleri, öğretmekle yetinmez aynı zamanda düşünmeyi öğrenme, kesinliğe ulaşma ve evrensel doğruları bulmayı da sağlamaktadır. Düşünme ve matematik arasında ki ilişkiden yola çıkılırsa matematiğe özgü bir düşünmeden yani matematiksel düşünmeden söz etmek mümkündür. Pek çok kimse matematiksel düşünmeyi bilimsel ve günlük düşünmeden farklı sanmaktadır. Aksine matematiksel düşünme sağduyuya dayalı günlük düşünmeden temelde farklı olmayan bir düşünme sürecidir (Yıldırım, 2012). Bunun yanı sıra bilim dallarının tümünde de matematiksel düşünmeden yarar-

lanılmaktadır (Aydın ve Köğce, 2008). Yeşildere (2006) bir problemin çözümü özelleştirme, genelleme, tahmin etme, hipotez üretme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektiriyorsa, matematiksel düşünme gerçekleşeceğini belirtmiştir.

Her düşüncenin yararlı olmayacağı varsayımından da yola çıkarak matematiksel düşünmeyi Alkan ve Bukova Güzel (2005) “*düşüncenin yararlılığı, gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile ölçülür. Bu nitelikteki düşünmeye, kısaca Matematiksel Düşünme (MD) denir*” şeklinde tanımlamışlardır. Bazı araştırmacılar da matematiksel düşünmeyi boyutlarından yola çıkarak tanımlamışlardır. Liu (2003) matematiksel düşünmeyi “tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analogi, formal ve informal olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi” olarak tanımlamıştır. Fakat literatür incelendiğinde farklı araştırmacıların matematiksel düşünmenin boyutları için eşanlamli kelimeler (doğrulama ve ikna etme/doğrulama ve inandırma / ispatlama, örnekleme/ayrıntılılamak/özelleştirme... gibi) kullandıkları görülmektedir. Fakat özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama bileşenlerinin daha sık kullanıldığı görülmektedir (Arslan ve Yıldız, 2010). Bu boyutlardan birisi olan özelleştirme bu çalışmanın araştırma konusudur.

Birey özelleştirme yaparken; özel değerleri düzensiz bir şekilde seçer (problemi anlayabilmek için), düzenli şekilde, artan veya azalan bir biçimde yani sistematik olarak seçer (özel durumu genişletmek için) ve bu genişletme sonucu elde ettiği genelleme veya kuralın doğruluğuna kendini ikna etmek için (genellemeyi kendine ikna etmek için) seçme anlamındadır (Mason vd., 2010). Özel durumları rastgele seçmek, problemin anlamlandırma açısından ve bir problemin ya da varsayımın doğru olup olmadığını sezme açısından faydalı bir düşünce olabilir. Ama bir ilişki inceleniyorsa ve başarı elde etme düşünülüyorsa özel durumların sistemli olarak seçilmesi daha faydalı olacaktır. (Mason vd., 2010). Özel değerler seçilirken birden fazla örnek verme, bir durumu, problemi tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme veya bulma gibi eylemlerden bahsedilir. Dahası bulunulan durum için karşıt veya ilgili örnek bulma, istenilenleri doğru bularak sonucu değişik biçimlerde ifade etme gibi eylemler de özelleştirmede yapılabilir (Arslan ve Yıldız, 2010). Lane (2011) tarafından yapılan nitel çalışmada öğrencilerin matematiksel düşünme ile algıları ile birlikte özelleştirme stratejileri incelenmiştir. Veriler öğrencilerin yazılı cevapları, gözlemler, 2 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış görüşme yolu ile toplanmıştır. Öğrencilerin matematiksel düşünme tanımları literatürde yer alan tanımlarına göre kodlanmıştır. Özelleştirme becerileri ise, Mason vd (2010) yer verilen özelleştirme tanımına dayalı olarak geliştirilen bir rubrik yoluyla kodlanmıştır. Elde edilen bulgular öğrencilerin sık sık sistematik tahmin et ve kontrol et stratejisinin kullanıldığı görülmüştür. Buna ilaveten kısa bir eğitimden sonra özelleştirme seviyelerinde bir gelişme görülmüştür. Arslan ve Yıldız (2010) tarafından yapılan nitel çalışmada 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Matematiksel düşünmenin aşamalarını dikkate alan ve her biri dokuzar sorudan oluşan çalışma yapıları geliştirilmiş ve pilot çalışmadan sonra 24 lise öğrencisine uygulanmıştır. Çalışmanın sonuçları matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğünü ve öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri bulunmuştur. Keskin vd (2013) tarafından yapılan çalışmada sekizinci ve on birinci sınıf öğrencile-

rinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarındaki yaşantı farklılıklarını incelemektir. Bu amaçla 14 sekizinci sınıf ve 11 on birinci sınıf öğrencisine matematiksel düşüncenin üzerinde durulan aşamalarını içeren 2 çalışma yaprağı uygulanmıştır. Veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Çalışma yapraklarından ve uygulama sırasında yapılan gözlemlerden elde edilen sonuçlar özelleştirme ile ilgili sorularını yapmada sıkıntı çekmediklerini göstermiştir.

Matematiksel düşünme yeteneği, bir problemle ilgilenme, deneyimler üzerinde düşünme ve kurgulanan bir problem sürecini çalışma gibi çeşitli etkinlikler sonucunda ilerletilebilir (Hacısalıhoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003). Bundan dolayı, matematiksel düşünmenin en önemli özelliği problem çözmedir. Problem çözme, öğrencilerin soyutlama, açıklama, sembolleştirme, genelleme, ispatlama ve yeni sorular ortaya atma gibi genel matematiksel stratejiler konusunda deneyimler kazanmalarını sağlar (Busbridge ve Özçelik, 1997). Dolayısıyla problem çözmenin var olduğu her durumda matematiksel düşünme de gerçekleşmektedir (Yeşildere, 2006; Arslan ve Yıldız, 2010). Bu açıdan, bir problemle uğraşırken süreç boyunca neler düşünüldüğü önem kazanmaktadır. Bu nedenle, bu çalışmada problem çözme süreci boyunca akademisyen, matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme sürecinin boyutlarından birisi olan özelleştirme becerileri incelenmeye, benzerlikler ve farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Matematiksel düşünme ile ilgili gerek yurt içinde (Arslan ve Yıldız, 2010; Alkan ve Bukova Güzel, 2005; Bukova-Güzel, 2008; Keskin vd. , ) gerekse yurt dışında birçok çalışma olmasına rağmen özelleştirme becerileri ile ilgili çalışma yer almamaktadır. Bu nedenle bu çalışmanın bulguları bu anlamda alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

#### **Yöntem**

Matematik öğretmeni adayı, matematik öğretmeni ve akademisyenin özelleştirme becerilerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışması özeline bir resmini sunarak genel hakkında bilgi edinmek ya da ayrıntılı resime bakarak genel hakkında bilgi sahibi olmaya, yorum yapmaya çalışma şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla bu çalışmada katılımcılara ait veriler sınırlı bir zamanda elde edildiğinden ve veri toplama araçlarında var olan sorularla sınırlı olduğundan, çalışmada zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu, çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (gözlemler, görüşmeler, görsel-işitseller, dokümanlar, raporlar) ile bir fenomenin bir ya da birkaç örneğinin derinlemesine çalışıldığı, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir yaklaşım olan durum çalışması dikkate alınmıştır.

#### **Çalışmanın Katılımcıları**

Çalışmanın katılımcılarını 2013-2014 eğitim öğretim bahar döneminde, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda 5. sınıfta eğitim ve öğretime devam eden gönüllü iki matematik öğretmeni adayı, Mersin Silifke ilçesinin Göksu Anadolu lisesinde kadrolu iki matematik öğretmeni ve bir akademisyen olmak üzere toplam 5 katılımcı oluşturmaktadır. Çalışmanın amacı ve yöntemi dikkate alındığında katılımcıların süreç boyunca tüm etkinliklere katılmaya istekli ve gönüllü olmalarına özen gösterilmiştir. Gönüllü olan öğretmen ve öğretmen adaylarının seçiminde cinsiyet ve eğitim durumları dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda öğretmen ve öğretmen adaylarından bir bayan bir erkek çalışmaya katılmıştır. Aynı şekilde akademisyenin doktora tez aşamasında olmasına paralel ola-

rak öğretmenlerden birisinin yüksek lisans yapmış olması dikkate alınmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyenin hiçbir şekilde isimlerinin deşifre edilemeyeceği söylenmiştir. Çalışmanın etiği açısından katılımcıların ismi gizli tutulmuştur. Öğretmen adayları için ÖA1 ve ÖA2, öğretmenler için Ö1 ve Ö2 ve akademisyen için A1 şeklinde isimlendirme yapılmıştır. Tablo 1’de çalışmanın katılımcıları ile ilgili bilgiler verilmiştir. Tablo 1’den görüldüğü gibi çalışmaya katılan öğretmenler 12 ve 13 yıldır öğretmenlik yapmaktadır. Birisi yüksek lisans diğeri lisans diplomasına sahiptir.

**Tablo 1.** Çalışmanın Katılımcıları

Katılımcı	Hizmet Yılı	Eğitim Durumu	Mesleği	Cinsiyeti
A1	5	Doktora (Tez Aşaması)	Araştırma görevlisi	Erkek
Ö1	13	Yüksek lisans	Öğretmen	Erkek
Ö2	12	Lisans	Öğretmen	Bayan
ÖA1	-	5. Sınıf	Öğrenci	Erkek
ÖA2	-	5. Sınıf	Öğrenci	Bayan

### Veri Toplama Süreci ve Verilerin Analizi

Veri toplamak için kullanılacak soru seçilirken önce Mason vd. (2010) tarafından yazılmış olan “*Thinking Mathematically*” adlı kaynaktan özelleştirme ile ilgili problemlerden oluşan bir soru havuzu oluşturulmuştur. Uzman görüşleri doğrultusunda soru havuzundan kağıt şerit sorusu seçilmiştir. Bu soru “ *Bir kâğıdı uçlarından tutup sağ ucunu sol ucunun üstüne getirip bastırın, ikiye katlansın. Aynı kâğıt üzerinde iki kez aynı işlemi tekrarlayın. Kaç tane iz oluşmuştur? Bu işlemi artarda 10 kez yaparsanız toplamda kaç tane iz oluşmuş olur?* ” şeklindedir. “Kağıt şerit” sorunun sorulmasının amacı katılımcıların özelleştirmeyi neden kullanacaklarını yani kaç özel durum alacaklarını, bu özel durumları alma nedenleri (soruyu anlama, sorunun ne istediğini fark etme, örüntü arama,...) görmek ve karşılaştırmalar yapmaktır. Araştırmacının verileri toplama ve analiz etmede tecrübe ve deneyim kazanması için bir pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma 2013-2014 eğitim-öğretim yılının Bahar döneminde Cumhuriyet Üniversitesinin Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği programının 5. sınıfında öğrenim gören 40 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Bu çalışmaya araştırmacının katılımcıları olan 5. sınıftaki iki öğretmen adayı dâhil edilmemiştir.

Çalışmanın verilerin toplanması, 2013-2014 eğitim öğretim yılının bahar döneminde ve tek oturumda toplanmıştır. Her bir oturum katılımcıların uygun olduğu zaman dilimlerinde randevu alınıp her bir katılımcı ile ayrı ayrı görüşülerek yapılmıştır. Katılımcılara veri toplama süreci boyunca oturumun kameraya alınacağı belirtilmiş ve hiçbir katılımcı tedirginlik duymamıştır. Sadece kamera kayıtlarında yüzleri çekilmemeye özen gösterilmiştir. Oturum boyunca

kâğıt ve kalem hazır olarak verilmiştir. Veri toplama aracı katılımcılara verildikten hemen sonra gerekli bilgilendirmeler yapılmıştır ve “*istediğiniz sorudan başlayabilirsiniz*” şeklinde açıklamasında bulunulmuştur. Çözüm süreci boyunca düşündükleri her şeyi ifade etmeleri istenmiştir. Soruların çözümlerini yaptıkları kâğıtları alınmıştır. Görüşmelerde yapılan video kayıtları incelenerek deşifre edilmiş, yazılı hale getirilmiş, katılımcıların teslim ettikleri çözüm kâğıtları ile birlikte bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Araştırma sürecini daha iyi yansıtabilmek, katılımcıların süreç içindeki düşünme yaklaşımlarını daha iyi izleyebilmek ve karşılaştırmalar yapabilmek için her bir katılımcı için bulgular ayrı ayrı verilmiştir ve daha sonra karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu sayede benzerlikler ve farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Verilerin analizi yapılırken görüşmeler deşifre edilmiş ve bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Bu aşamadan sonra her bir katılımcıdan elde edilen veriler satır satır analiz edilmiştir. Her bir özelleştirme davranışı belirlenmiştir.

### **Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği**

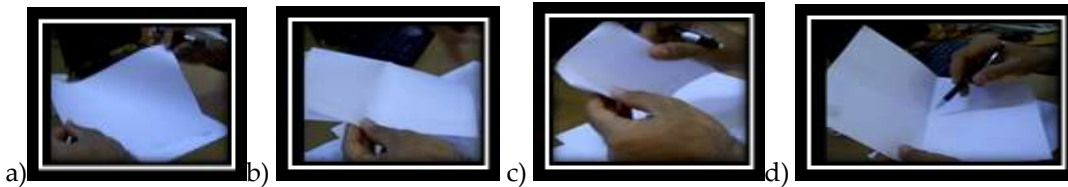
Veri toplama aracının geliştirilmesi ve geçerliliğinde dört aşama izlenmiştir. Birinci aşamada literatür taramasına, ikinci aşamada soru havuzunun oluşturulmasına, üçüncü aşamada yapılan pilot çalışmalar ile soru seçme ve test etme, araştırmacının deneyim kazanması, dördüncü aşamada ise uzman görüşlerinin değerlendirilmesine yer verilmiştir. Güvenirlik de ise; yapılmış olan bir çalışmanın başka bir araştırmacı tarafından aynı biçimde tekrar edildiğinde, aynı veya benzer sonuçları vermesi ile ilgilidir (Demircioğlu, 2008). Bu çalışmada güvenirliliği arttırmak için, araştırmacı takip ettiği süreçleri açık bir biçimde tanımlamış ve ilgili dokümanlar (Mason, vd., 2010) ile desteklemiştir. Ayrıca güvenirliliğinin sağlanması için öncelikle araştırmanın veri kaynağı olan öğretmen adayları, öğretmenler ve akademisyen açık bir biçimde tanımlanmıştır. Araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığı açıklanmıştır. Gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla açıklanmıştır. Görüşme yöntemiyle elde edilen bulgular, gözlem ve doküman analizi yöntemleriyle elde edilen bulgularla teyit edilerek, sonuçlar değerlendirilmiştir.

### **Bulgular ve Yorum**

Bu bölümde araştırmada elde edilen verilerin, veri analizi bölümünde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri ve deşifreleri sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş, ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır.

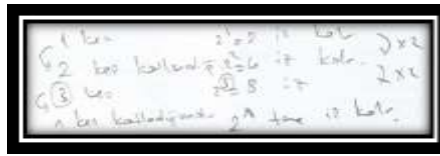
### **A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum**

A1 soruyu okuduktan sonra Şekil 1a'daki gibi eline bir kağıt alarak, soruyu somutlaştırmaya, anlamaya çalışmıştır.



**Şekil 1.** A1'in Soruyu Okuduktan Sonra Anlamaya Çalışması, İlk Katlaması, İkinci Katlaması, Başlangıç Noktası Olarak Katlanma İzinin Orta Noktasını Referans Alması

Bu işlem sırasında sağ uç ile sol ucu nasıl katlayacağını "kastımız uçlarından tutup şu şekilde değil mi? Yoksa şu şekilde değil mi sağ ucu ile sol ucunu üst üste getirip bastırın" şeklinde ifade etmiştir. Biraz düşündükten sonra Şekil 1b' deki gibi ilk katlamayı gerçekleştirmiştir. Katlama sonucu kâğıtta oluşan katlanma izlerini saymış "bir defa katlamada 1 tane iz bırakır" diyerek soruyu bir kez katlama ile anlamlandırmaya çalışmıştır. Yani ilk özelleştirmeyi soruyu anlamak için yapmıştır. "Sonra yine aynı şekilde ikiye katladığımızda" diyerek Şekil 1c' deki gibi ikinci katlama işlemini gerçekleştirmiştir. İkinci kez katlama sonucu elde ettiği katlanma izlerini sayarak; "Bir dakika bakalım şöyle bir katladım orta noktadan tekrar sağ ucunu sol ucunu üzerine katladığımızda şöyle bir şekil oluşur. Katlanma izleri 4 tane olur" şeklinde ifade etmiştir. İkinci katlama esnasında dikkat çeken durum, soruda ifade edilen "sağ ucundan tutup sol ucuna katlayınız" eylemini art arda yapmak yerine, kağıdın altı ile üstünü birleştirip ve kağıdı çevirerek farklı konumlara getirmiştir. Bu esnada herhangi bir müdahale yapılmamıştır. Nedeni ise çıkan sonuçlar doğrultusunda oluşacak örüntüyü etkilememektir. Burada ikinci katlamayı da soruyu anlamak için yapmıştır fakat ilk katlamadan farklı bir katlama gerçekleştirmiştir. Eğer üçüncü katlamayı gerçekleştirmiş olsaydı bir sıkıntı olduğunun farkına varacağı söylenebilir. Burada başka bir dikkat çeken durum ise sayma esnasında Şekil 1d' de görüldüğü üzere oluşan izleri sayarken, başlangıç noktası olarak katlanma izinin orta noktasını referans almasıdır. Bu ise oluşan örüntüyü ve sonucu değiştirmektedir. Daha sonra A1 katlanma izlerinin farklı sonuçlar ve anlamlı bir ilişki içermemesinden dolayı daha önce yapmış olduğu ifadesini "bence iki kez katlandığında 4 parça, 4 iz kalır, bir kez katlandığında 2 iz kalır, dolayısıyla n-kez katlandığında... üç kez katlandığında 8 iz olacak.. Çarpı 2, çarpı 2" şeklinde değiştirmiş ve cevap kâğıdına Şekil 2' deki gibi yazmıştır. Görüldüğü gibi ilk katlamadaki 1 iz olmasını da dikkate almamıştır. Yalnızca 2. katlamadaki 4 iz cevabından yola çıkarak bir kural oluşturmuştur.



**Şekil 2.** A1'in sorunun çözümü için yaptığı çözüm

Burada üç kez katlamada 8 iz oluşacağını sözel olarak ifade etmiş, birinci ve ikinci katlamalarda ki gibi üçüncü katlamayı kâğıt üzerinde gösterme gereksinimi hissetmemiştir. Yani iki özel duruma bakmış fakat bir özel durumdan yola çıkarak üçüncü özel durum için bir tahmin yapmıştır. Fakat ikinci katlamayı da farklı yaptığı için oluşacak iz sayısını da bulurken hata yapmıştır. Düşüncelerini dile getirirken de iki kez katlamada oluşan 4 tane izi göstererek "2'nin karesidir bu" demiştir. Daha sonra cevap kâğıdı üzerine yazdığı üç katlamada 8 iz olur yanıtını göstererek "buda 2'nin küpüdür. Dolayısıyla n-kez katlandığında  $2^n$  tane, çünkü  $n=3$  için  $2^3$  dedik.  $n=n$  için  $2^n$  tane iz kalır. Dolayısıyla genellemeye giderek n-kez katlandığında  $2^n$  tane iz bıraktığını gördüm.  $n=10$  dediği için  $2^{10}$  tane iz bırakır" şeklinde ifade etmiştir. Görüldüğü gibi 1. ve 2. katlamayı da

soruyu anlamak için yapıp elde edilen iz sayılarını kâğıdına yazmış ve sonrasında  $n$  kez katlama için oluşacak iz sayısı için bir varsayımda bulunmuş ve varsayımın doğruluğunu denemeden 10 katlama için oluşacak iz sayısını kuralda  $n$  yerine 10 koyarak ifade etmiştir. Bu aşamada araştırmacı “Böyle bir genel kanıya ulaşmak için yapılan iki katlama yeterli midir?” diye sormuştur. Bu soruya bir müddet düşündükten sonra “iki defa katlama yeterli mi diyorsun. Şu 4 dediğimde 2'nin kuvveti şeklinde yazdım. Dolayısıyla 2 tane katlama yeterlidir bence bu soru için” şeklinde cevap vermiştir. Görüldüğü gibi katılımcı varsayımının doğruluğunu göstermek için farklı özel durumlara bakmamıştır. Süreci kontrol etmediği içinde ikinci katlama sonucu oluşan iz sayısının hatalı olduğunu fark edememiştir.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; A1 ilk başta 1 kez katlamada 1 iz oluşur yanıtını vermiştir. Daha sonra ikinci kez katlamayı gerçekleştirip 4 iz oluşur yanıtını vermiştir. Bu aşamaya kadar kağıt üzerinde yalnızca 2 deneme yapmıştır. Bu aşamadan sonra üçüncü katlama için çıkarımda bulunmuş “ $n$ ” için genelleme yapmıştır. En son olarak da onuncu katlama sorulduğu için  $n=10$  alarak yanıt vermiştir. A1'in iki kez katlama sonucu oluşan *iz sayısı ile katlama sayısı arasında bir ilişki aradığı* ve 2<sup>n</sup> şeklinde bir *genelleme düşündüğünü* belirtebiliriz. Bunu da ilk iki katlama işlemi gibi üçüncü katlama işlemi gerçekleştirilmeden 8 iz oluşur cevabını ve ilk önce bir kez katlamada 1 iz oluşur yanıtını vermişken, daha sonra bir kez katlamada 2 iz oluşur şeklinde değiştirmesini gösterebiliriz. Bu süreçte A1'in yaptığı özelleştirmelerin problemi anlamlandırmak için olduğu, ikinci adımdan sonra genelleme yaptığı şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla A1'in genelleme düşüncesi ile hareket etmeye başladığı söylenebilir. Buradan görüldüğü üzere A1'in gerçekleştirdiği ilk özelleştirme davranışı soruyu *anlamlandırmak* içinken daha sonra ki gerçekleştirdiği katlamalar yani özelleştirme ( $n=2$  ve  $n=3$ ) *genel kuralının mantıklı olduğunun gösterimi* (varsayımını doğrulama) için olduğu söylenebilir.

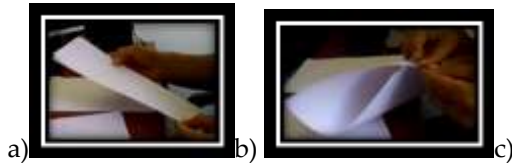
### Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 soruyu okuduktan sonra sağ ucu ile sol ucu hakkında dönüt alma ihtiyacı duymuştur. Bu aşamada araştırmacı ile aşağıdaki diyalog geçmiştir.

**Ö1:** “alttan mı bahsediyor, üstten mi bahsediyor”

**Araştırmacı:** “şimdi hocam sağ sol kavramımız var sadece, alt üst kavramımız yok, yani anladığımıza göre yapabilirsiniz”

Bu diyalogdan sonra Şekil 3a'daki gibi boş bir kâğıdı alıp katlama işlemi gerçekleştirilmektedir. Bunu yaptıktan sonra da alt uç ile üst ucu düşünerek Şekil 3b'deki gibi katlama işlemi gerçekleştirmiş, “Zaten bu köşeden yaparsam saçma oluyor” şeklinde ifade etmiştir.



Şekil 3 Ö1'in Soruyu Anlamak İçin Yaptığı İlk Katlama, İkinci Katlama



Bu süreçte aslında Ö1 katlama şekilleri ile oluşacak izlerin bir kural oluşturup oluşturmadığını incelemiş ve soruda verilen katlamanın Şekil 3a'daki gibi olacağı kanısına varmıştır. Bu aşamada özelleştirmeyi soruyu anlamak için kullandığı söylenebilir. Bu aşamadan sonra Şekil 4 'deki gibi birinci, ikinci ve üçüncü katlamayı artarda gerçekleştirmiştir.



Şekil 4. Ö1'in Soruyu Çözmek İçin Yaptığı Katlamalar

Bu katlamaları yaptıktan bir müddet sonra "bu işlemi 10 kez yaparsam kaç iz olur. Kesin olmasa da" şeklinde ifade ederek katlama sayısı ve katlanma izleri arasındaki ilişkiyi Şekil 5a' daki gibi kâğıda yazmıştır. Bu aşamada bu yaptığı üç katlama işlemi bir örüntü arama, katlama sayısı ile oluşacak iz sayısı arasında bir ilişki görmek için yaptığı söylenebilir.



Şekil 5. Ö1'in Yaptığı Katlamalar Sonucu Yazdıkları, 3. Katlama İçin Çıkarımda Bulunması, 10. Katlama İçin Kağıda Yazdıkları

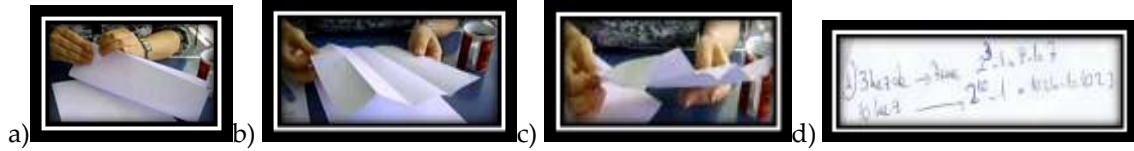
Katlama sayısı ile oluşan iz arasında ki ilişkiyi yazarken aynı zamanda; "Birinci katlamada 1 tane olur. Bu şekilde düşünelim bakalım, ikinci katlamada 2 tane burada (kâğıt üzerinde sayarak) 1 tanede önceden vardı 2 tane yeni oluştu. Üçüncü kez katlamada daha önceki izler vardı 4 tane daha oluştu" şeklinde ifade etmiştir. Bu aşamada katılımcının ne düşündüğünü daha iyi anlamak için araştırmacı "nerden gördünüz hocam o dört katlamayı" şeklinde soru yönelmiştir. Ö1 ise "şu köşedekileri saysan yetiyor (Şekil 5b). Yani diğerleri var elimde bunlar yeni çıkıyor. Şu köşede kaç tane varsa" diyerek kâğıt katlanmış şekil deyken oluşan izleri saymıştır. Görüldüğü gibi katılımcı katlama sayısı ile oluşacak köşe sayısı arasında bir ilişki kurup kağıt üzerine bulduğu ilişkiyi kayıt etmiştir. "Artış hep 2'nin kuvvetleri şeklinde gelecek o zaman bu" ifadesinde bulunmuş, onuncu katlamada oluşan iz hakkında kâğıdına Şekil 5c' de ki gibi yazmıştır. Şekil 5c' den görüldüğü gibi toplam formülü ile sonuca ulaşmıştır. Fakat sonuca ulaşırken genel bir kurala ( $2^n - 1$  gibi) durumu bağlamamıştır. Yani n için bir kural yazıp n=10 almamıştır.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; Ö1 soruyu anlamak için her iki şekilde de kâğıdı katlamış fakat bir kural verecek şekilde olanı seçmiştir. Bu aşamada özelleştirmeyi soruyu anlamak için kullanmıştır. Bu aşamadan sonra her bir katlama ile önceki izlere ek olarak gelen kat sayılarını ifade etmiş, yani ekleyerek gitmiştir. Her bir katlamanın  $2^n$  gibi ek bir iz getireceğini düşünmüştür. Deneme kâğıdını birinci, ikinci ve üçüncü kez katlama içinde kullanmış ve sonrasında onuncu katlamada oluşacak iz sayısını ifade etmiştir. Ö1 denediği katlama şekilleri ile oluşacak izlerin düzgün olup olmadığına bakarak, doğru katlamanın Şekil 3a' da ki gibi olacağını anlamıştır. Dolayısıyla izler arasında bir ilişki olacağı düşüncesine varmıştır. Özelleştirmenin amaçlarından olan sorunun ne olduğu hissine sahip olup, soruyu anlamlandırıp, çözüm için kendine güven kazandığı söylenebilir. Ö1'in bu davranışı Mason vd. (2010) "başvurulan

en iyi denemelerden biri sorunun sizden ne istediğini özümsemek ya da kendi cümlelerimizle soruyu yorumlamaktır” sözüyle paralellik içermektedir. Burada dikkat çeken başka bir durum ise Ö1’in “kesin olmasa da...” şeklinde ifadesidir. Ö1 kâğıt ile on kez katlamayı gerçekleştiremeyeceği bilincinde olup, özel olarak denediği birinci, ikinci ve özellikle üçüncü kez katlama sonucundaki izler arasında ki ilişki yardımı ile on kez katlamada ki iz sayısı hakkında bir sonuca varma düşüncesindedir. Bu düşünceye ise özel olarak gerçekleştirmiş olduğu katlamalar sayesinde ulaştığı söylenebilir. Ayrıca soruda verilen bilgi dışında kâğıdı üçüncü kez katlaması da dikkat çekicidir. Bunun yanı sıra katlamaları *sistematik* bir şekilde gerçekleştirdiği görülmektedir.

### Ö2’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okuma işlemini gerçekleştirirken eline bir kâğıt alarak uçlarından tutup Şekil 6a’ da ki gibi katlamıştır.



Şekil 6. Ö2'nin Kağıdı 1., 2. ve 3. Katlaması, 10. Katlama İçin Kâğıda Yazdıkları

Sırası ile gerçekleştirdiği birinci, ikinci ve üçüncü kez katlamalar sonucu oluşan izleri Şekil 6b ve Şekil 6c’deki gibi katladığı kâğıdı açarak saymıştır. Bu katlamalar sonucu oluşan izleri saydıktan bir süre sonra katlama sayısı ile oluşan iz sayısı arasında ki ilişkiyi kâğıdına Şekil 6d’deki gibi yazmıştır. Kâğıdına yazmış olduğu bu ifadeyi ve gerçekleştirmiş olduğu eylemleri ise “Şimdi (*kâğıt üzerinde*) bu 1 ‘di, şu 2, sonra bir daha katladım 3, ondan sonra, açtım dedim ki (*katlama izlerini sayarak*) 1-2-3-4-5-6-7 tane bükülme izi oldu. Yani dedim ki üç kez de  $2^3 - 1 = 7$  tane iz oluyorsa, on kez katlarsam genelleştirirsem yani  $2^{10} - 1$  diye düşündüm.” şeklinde açıklamıştır.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; Ö2 ilk önce bir kez katlama da 1 iz, iki kez katlamada 3 iz ve üç kez katlamada 7 tane iz oluşacağını belirtmiştir. Üçüncü katlamadan sonra çıkarımda bulunmuş onuncu katlama sonucu oluşan iz sayısı sorulduğu için onuncu kez de “ $2^{10} - 1 = 1023$ ” yanıtını vermiştir. Görüldüğü gibi Ö2 katlama işlemini yaparken sağ uç ile sol ucu arasında herhangi bir anlam sıkıntısı yaşamadan doğrudan katlama işlemi gerçekleştirmiştir. Burada üçüncü katlamayı gerçekleştirmesi dikkat çekicidir. Sonuca ulaşırken özelleştirmeden yararlanmış ve özel değerleri *sistematik* bir şekilde gerçekleştirmiştir.

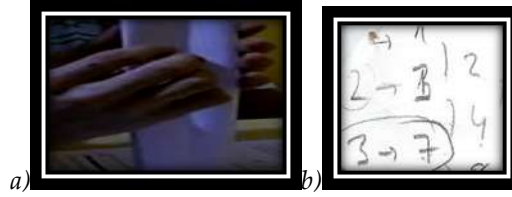
### ÖA1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okurken aynı zaman da soruyu somutlaştırarak bir kâğıt üzerinde sırasıyla Şekil 7. deki gibi üç kez katlama işlemi gerçekleştirmiştir.



Şekil 7 ÖA1’in Kâğıdı İlk 3 Katlaması

Katlama işlemlerini gerçekleştirdikten sonra yaptığı işlemleri aşağıda ki şekilde açıklamış ve Şekil 8b' deki gibi kâğıdına yazmıştır; "1-2-3-4-5-6-7 tane. İki kez katladığımızda ne oluşmuştu 1 izdi. Yani aslında 2-kere katladığım da 1 olmuştu. Yok pardon bir kez kere katladığımda 1 iz olmuştu (Şekil 8b) Bir kez katladım 1 iz oldu,(aynı kağıt üzerinde katlamaları tekrar gerçekleştirerek) şimdi bir daha katlıyorum, ortaları görmeyeceğim tabi, şöyle katladığımı düşünürsem (Şekil 8a) şeklinde açıklama yapmıştır. "1-2-3 tane olacak, üç kez katladığımda az önce 7 tane demiştim. 1-3-7 yani her seferinde (Şekil 8a) 2-4 şeklinde artıyor" şeklinde açıklamalarına devam etmiştir.



Şekil 8. ÖA1'in Son Katlaması, Sorunun Çözümü İçin İlk 3 Adımda Yazdıkları

Şekil 8b dekini ifade ederek "böyle aritmetik gideceğini düşünürsek onuncu kez katlamada ne olur. 6-7-8-9-10 desek. En iyisi hesaplayarak gitmek ya dördüncü katlamada 6 artacak, beşinci kez katlamada 8 artacak en iyisi hesaplayarak gitmek ya. hmmm 2-4-6 diye mi gidecek? Yoksa 2'nin kuvvetleri şeklinde mi artarak gidecek? yani 2-4-16 falan diyerek mi gidecek. Bunu bir daha katladığımızı düşünsek (kâğıt üzerinde dördüncü kez katlamasını gerçekleştirmiş) ne olacak her seferinde 2 tane daha mı gelmiş olacak yoksa dur bakalım. Bir daha katladık dördüncü kez katlamadayım, eğer benim yazdığım doğruysa 13 tane olmalı 1-2-3...-15 oldu hah!" demiştir. Dördüncü kez katlama sonrası oluşan iz sayısının beklediğinden farklı çıkması sonucu bir müddet duraksayıp düşünmüştür. Daha sonra düşüncülerini "Daha bir tuhaf oldu 8 oldu. 2 kat 2 kat artıyor desek; 4-8 muhtemelen de öyle artacaktır, çünkü her seferinde 2'ye katlıyorum ben bunu 2-artacak 4 artacak 8 artacak, o zaman 16 artacak, 32 artacak diyelim, bu şekilde gidecek, her seferinde 2 kat 2 kat artacak o sayı" şeklinde açıklamıştır. Daha sonra ilk başta katlayarak hesaplamış olduğu ve kâğıdına yazdığı katlanma izleri üzerinde Şekil 9'daki gibi hesaplamalar yapmıştır. Bu hesaplamaları "8 arttırdım 15, 16 arttırdım 31 oldu, ondan sonra ne yapıyorum 31 daha sonra 32 arttıracam 63 oldu bu sefer bunu 64 arttıracam, yani 1 fazlası kadar arttırıyorum öylemi!" şeklinde açıklamıştır.



Şekil 9. ÖA1'in Sorunun Çözümü İçin Yazdıkları

Bundan sonra "10 kez yaptığımda ise 1023 tane, o zaman 2'nin kuvvetinin 1 eksiğiymiş aslında, hmm o zaman formülü  $2^n - 1$  miş. Zaten de hepsi de öyle. 4'üncü kuvvetinin 1 eksiği 5'inci kuvvetinin 1

eksiği kadarmış” biçiminde ifade etmiştir. En son olarak yaptığı işlemleri “ilk başta birkaç adımı kağıdı kullanarak yaptım garanti olsun diye sayılarım. Ondan sonra ilk gördüğüm şey aslında 2-4-6-8 diye gitmesiydi orda acaba öyle mi diye düşündüm. İkinci düşündüğüm şey ise 2-4’den sonra acaba 2’nin üsleri şeklin de mi gidecek. Bir o vardı birde 2-4-8 şeklinde mi gidecek diye. O zaman dördüncü adımı da yaptım 8 olduğunu gördüm, muhtemelen 2’nin katları şeklinde gidecek, ilerleyecektir diye düşündüm. Ekleye ekleye geldikten sonrada şunu fark ettim. Aslında burada ki katlama sayılarını “n” olarak alırsak  $2^n - 1$  formülüyle de katlama sayısına göre bükülme izi oluşmasını hesaplayabiliyormuşuz.” şeklinde kendince özetleyerek açıklamıştır.

Bu sorudan elde edilen bulgular özetlenirse; ÖA1 bir kâğıt alarak soruyu somutlaştırmıştır. Sırası ile birinci, ikinci ve üçüncü kez katlama sayılarını gerçekleştirmiştir. Bu üç katlama sonunda oluşan izleri sırasıyla 1,3,7 şeklinde kâğıdına yazmıştır. Kâğıdına yazmış olduğu iz sayılarına uzunca bir süre bakmış ve bu katlanma izlerinin sayıları arasında bir öncekilere ek olarak gelen iz sayılarının “2-4-6” şeklinde artacağını ifade etmiştir. Buradan görüldüğü üzere iz sayıları arasında ki artışı “2n” şeklinde bir kurala bağlamıştır. Bu oluşturduğu kuralın doğruluğunu göstermek adına dördüncü kez katlama sonucunda 13 iz oluşacağını ifade etmiştir. Bu ifadesini kanıtlamak adına ise dördüncü katlama işlemini gerçekleştirmiştir. Bu katlama ile oluşan 15 iz sonucu, bir süre sesiz bir şekilde düşünmüştür. Bu sırada kağıdına yazmış olduğu iz sayılarını incelemiştir. Bu incelemeler sonucunda izler arasında ki artışın 2’nin katları şeklinde değil, 2’nin kuvvetleri şeklinde artacağı düşüncesini dile getirerek onuncu kez katlama sonucu oluşacak iz sayısını tek tek hesaplayarak 1023 yanıtını vermiştir. Sonuca ulaştıktan sonra ise katlama sayıları ve oluşan iz sayıları arasında  $2^n - 1$  genellemesinde bulunmuştur.

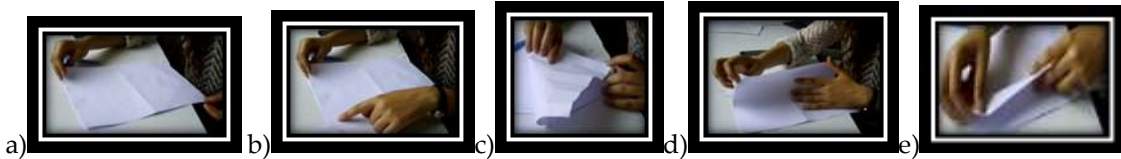
Görüldüğü gibi ÖA1 katlama işlemini yaparken sağ uç ile sol ucu arasında herhangi bir anlam sıkıntısı yaşamadan direk olarak katlama işlemi gerçekleştirmiştir. ÖA1 ilk 3 katlamayı gerçekleştirdikten sonra *izler arasında bir ilişki düşünüp*, bu düşüncesini *anlamlandırmak* için dördüncü katlamayı gerçekleştirmesi dikkat çekmektedir. Dolayısıyla gerçekleştirmiş olduğu birinci, ikinci ve üçüncü kez katlamalar soruyu *anlamlandırmak* içinken, dördüncü katlama ise *genellemesini ispatlama*, kuralının geçerli olup olmadığını *kontrol etmek* için olduğu söylenebilir. ÖA1 yukarıda ki ifadesine bakıldığında onuncu kez katlamada kaç iz oluşacağını tek tek hesapladıktan sonra genellemeye varmıştır. ÖA1 *sistemantik* bir yol izleyerek ve verilen sayılar arasında ki ilişkiyi belirleyip, en son istenen sayıyı doğru bulduğu görülmektedir.

#### ÖA2’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu okuduktan sonra sağ ucu ile sol ucu hakkında dönüt alma ihtiyacı duymuştur. Bu aşamada araştırmacı ile aşağıdaki diyalog geçmiştir.

ÖA2: “bir kağıdı sağ ucundan tutup sol ucuna... ama hangisi olacak bu mu (Şekil 10a.), bu mu (Şekil 10b)?”

Araştırmacı: “iki şekilde de düşünebilirsiniz”



Şekil 10. ÖA2'nin Soruyu Anlamak İçin Yaptığı 1.,2.,3.,4., 5. Katlama

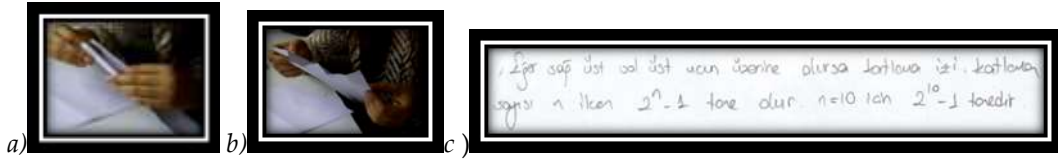
Bu diyalogdan sonra Şekil 10b deki gibi üst uçları birleştirerek katlama işlemlerini gerçekleştirmeye karar vermiştir. En son soruyu cevaplandırdıktan sonra ise; “Bir de diğer türlü deneyelim mi? O zaman ama kare olması lazım” ifadesinde bulunmuştur. Daha sonra Şekil 10c deki gibi katlama işlemini gerçekleştirmiş “yok böyle olmaz” şeklinde açıklamada bulunmuştur. Katlama biçimini “ üst uçlar olsun. Diyelim ki üstü üste olsun, Sağ üst sol üst olsun” şeklinde ifade etmiş, Şekil 10d ve 10e ile göstererek ve açıklayarak katlama işlemini gerçekleştirmiştir.

**ÖA2;** bunu bir kere yaptım. (Şekil 10d) Sonra bir kere daha yaptım (Şekil 10e) sonuç olarak katlama izim 1-2-3. Yani  $2^n - 1$  olur mu? Olur.”

ÖA2'nin gerçekleştirdiği katlamalar sonucu birden cevabı genel bir kurala bağlaması üzerine aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

**ARAŞTIRMACI:** “hemen öyle söyleyebilir misin?”

**ÖA2:** bir daha katlasam, yine aynısı 7 iz olacak çünkü (3. kez katlıyor, Şekil 11a). (Şekil 11b deki gibi sayarak) 1-2-3-4-5-6-7 gördün mü yine aynısı oldu.”



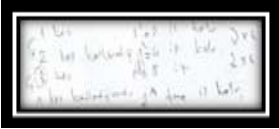

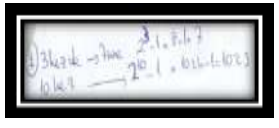
Şekil 11. ÖA2'nin Sonucunu açıklarken Yaptığı 6. Katlama, Yaptığı İzleri Sayma, Çözümü İçin Kâğıda Yazdıkları


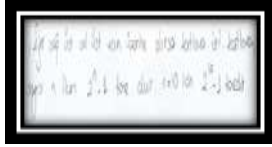
Bu diyalogdan sonra kağıdına Şekil 11c deki gibi sonucunu açıklayarak yazmıştır. Şekil 11c de görüldüğü üzere onuncu katlama sonucu oluşacak iz sayısını  $n=10$  için almış,  $2^{10}-1$  şeklinde soruyu cevaplandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulgular özetlenirse; ÖA2 soruyu okuduktan sonra her iki şekilde de kâğıdı katlamıştır. Daha sonra sağ üst ucu ile sol üst ucun üst üste geleceği düşüncesinden hareketle sistematiik bir şekilde birinci ve ikinci kez katlama işlemlerini gerçekleştirmiştir. Katlanmalar sonucu oluşan iz sayıları ile katlama sayıları arasındaki ilişkiyi çok kısa bir sürede  $2^n-1$  gibi bir şekilde çıkarımda bulunmuştur. Bu çıkarımının doğruluğunu göstermek için, üçüncü kez katlama işlemini gerçekleştirmiştir. Üçüncü kez katlama sonucu oluşan iz sayısı ile beklentisinin, yani oluşacak iz sayısının aynı olması üzerine,  $n=10$  için  $2^{10}-1$  tane iz oluşur cevabını vermiştir. Tüm süreç göz önüne alınırsa ÖA2 kâğıdı nasıl katlayacağı konusunda ilk başta tereddüt yaşamıştır. Bu tereddüdünü soruyu anlamlandırmak için yapmış olduğu özel birinci ve ikinci katlama işlemlerini gerçekleştirerek ortadan kaldırmıştır. Dolayısıyla gerçekleştirmiş olduğu özelleştirme ÖA2'nin soruyu anlamasına yardımcı olduğu söylenebilir. Daha sonra oluşan izler ile katlama sayısı arasında çok kısa bir sürede  $2^n-1$  çıkarımında bulunması (genellemesine ulaşması) dikkat çekicidir. Bu genellemeyi ise iki özel değer ile gerçekleştirmiştir. Daha sonra bu çıkarımının doğruluğunu göstermek adına üçüncü özel değerini kâğıt üzerinde denemiş, özelleştirme aşamasını; düşüncesinin doğruluğuna kendini ikna etmek için gerçekleştirdiği söylenebilir. Son olarak ise özelleştirme işlemini başarı ile gerçekleştirmiş, doğru sonuca ulaşmıştır.

Tüm katılımcılardan elde edilen bu veriler ortak bir şekilde değerlendirildiğinde ise Tablo 1'deki gibi bir durum ortaya çıkmaktadır.

Tablo 1 Kağıt Şerit Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Katılımcı	Özel Değer Sayısı	Süreç içindeki davranışlar	Ulaşılan Sonuç	Verdiği cevap	Özelleştirme Kullanma Amacı
A1	2	2 katlama (2. de yanlış katlama )	2n		Soruyu anlama- Anlamlandırma
		n için kural bulma			İlişki- örüntü arama
		n=3 için ve n=10 için cevabı söyleme			Kuralı doğrulatma - kendini ikna etme (güven kazanma)
Ö1	5	2 katlama-anlamak için	2 <sup>10</sup> - 1 sonra 1023		Soruyu anlama - Anlamlandırma
		3 katlama ilişkisi aramak için			İlişki- örüntü arama
		10 katlama için cevabı söyleme			Kuralı doğrulatma - kendini ikna etme (güven kazanma)
		<b><u>(n katlama için kural ifade edilmemiştir.</u></b>			
Ö2	3	3 katlama	2 <sup>10</sup> - 1 sonra 1023		Soruyu anlama - Anlamlandırma
		10 katlama için cevabı söyleme			İlişki- örüntü arama
		<b><u>n için kural ifade edilmemiştir.</u></b>			Kuralı doğrulatma - kendini ikna etme (güven kazanma)

ÖA1	4	3 katlama yanlış kural bulma	1023 sonra		Soruyu anlama - Anlamlandırma
		4. katlamada yanlış olduğunu görme	$2^{10} - 1$		İlişki- örüntü arama
		10 katlama için bulma			Kuralı doğrulatma - kendini ikna etme (güven kazanma)
		n için genelleme yapma			Tüm olası durumları göz önüne alma
ÖA2	6	3 katlama anlamak için	$2^{10} - 1$		Soruyu anlama - Anlamlandırma
		2 kez katlama			İlişki- örüntü arama
		n için kuralı söyleme			Kuralı doğrulatma - kendini ikna etme (güven kazanma)
		n=10 alma cevabı söyleme			
		sağlama yapmak için 6. katlama			

Tablo 1'den görüldüğü gibi her bir katılımcı sonuca ulaşırken farklı bir düşünme şekli gerçekleştirmiştir. Fakat görüldüğü gibi A1, ÖA1 ve ÖA2 n için bir genelleme yaparken Ö1 ve Ö2, n için bir kural ifade etmemişlerdir. Öğretmenlerin çözümleri farklı olmasına rağmen problem çözme davranışları paralellik göstermektedir. Her iki öğretmen de 10. adım sorulduğu için direk olarak sorulan adıma yoğunlaşmışlardır. Buna rağmen akademisyen ve öğretmen adayları n için bir genelleme yapmışlardır. A1 ve ÖA2 iki katlamadan sonra hemen kural söylemelerine rağmen A1 yanlış bir kural ifade ettiği için sonucu yanlış söylemiştir. Cevabın doğru olduğunu test etmek içinde 3. katlamayı yapmamıştır. ÖA2 ise 3. katlamayı cevabının doğru olduğunu göstermek için yapmıştır. ÖA1 ise 3 katlama ile yanlış kural bulup 4. kez cevabının doğru olup olmadığını kontrol etmiş, bunun sonucu olarak doğru yanıtı ulaşmıştır. Tüm katılımcılar soruyu anlamak, anlamlandırmak, bir örüntü aramak veya varsayımlarının doğruluğunu kontrol etmek amacı ile özel durumlara bakmışlardır. Fakat yalnızca A1 özel durumları yeterince incelememiş için yani özelleştirmeyi yeterince yapmadığı için farklı sonuca ulaşmıştır.

#### Sonuç ve Öneriler

Mason ve vd. (2010) kâğıt şerit sorusunun çözümünü vermemiştir. Bunun yerine bir kâğıt parçası olarak soruyu özelleştirin, iki katlamadan sonra kat yerlerini sayarak zihinsel olarak özelleştirin, bir diyagram yapmak zihinsel imaj oluşturmak için yardım edebilir, 3-4 kere

katlamayı deneyin bir örüntü arayın şeklinde yönergeler vermiştir. Bu sorunun sorulmasının amacı katılımcıların özelleştirmeyi neden kullanacaklarını yani kaç özel durum alacaklarını, bu özel durumları alma nedenleri (soruyu anlama, sorunun ne istediğini fark etme, örüntü arama,...) görmek ve karşılaştırmalar yapmak içindir. Bu nedenle katılımcıları birlikte değerlendirmek, süreç boyunca benzer ya da farklı davranışları ortaya çıkarmak için önemlidir.

ÖA2 ve Ö2 en kısa sürede sonuca ulaşan kişiler olmuştur. Bunun nedeni sonuca ulaşırken özel değerler ile bu özel değerler arasında doğru ilişkiler kurmaları, hızlı şekilde genel kural bulmaları olduğu söylenebilir. Bu kural ile de diğer katılımcılara göre soruyu hızlı cevaplandırmışlardır. Bunun yanı sıra A1 de genel bir kurala ulaşarak (genelleme yaparak) soruyu cevaplandırmış, fakat yanlış kural çıkarımında bulunmuş olduğu için farklı sonuç bulmuştur. Aslında bunun nedeni özelleştirme yaparken iki durum göz önüne alması ve ikinci durumda da iz sayısını yanlış bulması ve hemen genelleme yapmaya çalışmış olmasıdır. Bu nedenle de yanlış sonuca ulaşmış olduğu söylenebilir. Buradan yola çıkarak A1, Ö2 ve ÖA2'nin öncelikle genel bir kurala ulaştıkları söylenebilir. Ö1 ve ÖA1 ise farklı olarak, genel bir kurala ulaşmadan doğru sonuca ulaşmışlardır, bu nedenle cevaplama süreleri Ö2 ve ÖA2 göre yaklaşık iki katı kadar sürmüştür. Ayrıca A1 ve ÖA1 soruyu diğerlerine göre geç cevaplandırmasındaki diğer bir etken ise özel değerler ile buldukları sonuçlar arasında sırası ile anlamlı bir ilişkiyi oluşturamaması ve birden çok ilişki kurmuş olmasından kaynaklandığı söylenebilir. Diğer taraftan Ö1 ise diğer katılımcılara nazaran soruya en şüpheli yaklaşan kişi olmuştur. Doğru sonuca ulaşmasına rağmen bir genellemede bulunmamış, "kesin olmasa..." ifadesinde bulunmuş, soruyu cevaplandırmıştır. Katılımcıların kâğıt katlama sayıları, diğer bir ifade ile gerçekleştirdikleri özel değerler dikkate alındığında; A1 iki, Ö1,Ö2,ÖA2 üç ve ÖA1 ise dört özel değer vererek çözümü gerçekleştirmiştir. Fakat ÖA1'in dördüncü ve ÖA2'nin üçüncü vermiş olduğu özel değerleri, bulmuş oldukları genel kurallarını ispatlama düşüncesinden hareketle gerçekleştirdikleri söylenebilir. Tüm katılımcıların özel değerleri sistematik bir şekilde almaları başka bir dikkat çekici ortak durum olmuştur. Arslan ve yıldız (2010) tarafından yapılan çalışmanın sonuçlarının da da öğrenciler özelleştirmede iyi performans sergiledikleri ve genellikle sistematik bir yol izledikleri bulunmuştur. Bu nedenle bulgular paralellik göstermektedir. Benzer olarak da Keskin vd. (2013) tarafından yapılan çalışma da da öğrenciler zorlanmadıkları ve genellemeye ulaşmak için özel durumları test ettikleri bulunmuştur. Lane ve Harkness (2012) ve Lane (2011) ifade ettiği gibi özelleştirmede ne kadar zaman harcanırsa yani ne kadar fazla özel durumlara bakılırsa genelleme becerilerini de olumlu etkilenecektir.

#### KAYNAKLAR

- Alkan, H. ve Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşünmenin Gelişimi. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3), 221- 236.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010) 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35 (156).
- Aydın M. ve Köğçe D. (2008). Öğretmen Adaylarının Denklem Ve Fonksiyon Kavramlarına İlişkin Algıları. *Yüzyüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* 5.1,



- Breen, S., & O'Shea, A. (2011). The Use of Mathematical Tasks to Develop Mathematical Thinking Skills in Undergraduate Calculus Courses—A Pilot Study. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 31(1), 43-48
- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 35-49.
- Busbridge, J. ve Özçelik, D. A. (1997). İlköğretim Matematik Öğretimi. YÖK/Dünya Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi, Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara: Ajans-Türk Basın ve Basım A.Ş.
- Hacısalıhoğlu, H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). Matematik Öğretimi: Matematikte Yapılandırıcı Öğrenme ve Öğretme. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.
- Keskin, M., Akbaba Dağ, S. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Aşamalarındaki Davranışlarının Karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences*. 33-50.
- Lane, C.P. (2011). *Mathematical Thinking and the Process of Specializing*. Doctoral dissertation. University of Cincinnati.
- Lane, C.P., Harkness, S.S. (2012). Game show mathematics: Specializing, conjecturing, generalizing, and convincing. *Journal of Mathematical Behavior* 31, 163– 173
- Liu, P. H. (2003). Do Teachers Need To Incorporate The History of Mathematics In Their Teaching?. *The Mathematics Teacher*, 96(6), 416-421.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. New York: Prentice Hall.
- Stacey, K. (2006). What is Mathematical Thinking And Why is it Important. *Progress Report Of The APEC Project: Collaborative Studies on Innovations For Teaching And Learning Mathematics In Different Cultures (II) – Lesson Study Focusing on Mathematical Thinking*
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Yeşildere, S. (2006). Farklı Matematiksel Güce Sahip İlköğretim 6, 7 Ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

#### SUMMARY

*Mathematical thinking is not only important for solving mathematical problems and for learning/teaching mathematics (Stacey, 2006). Mathematical thinking is difficult to define precisely (Breen and O'Shea, 2011). Burton's (1984) description of mathematical thinking as a helical model consisting of four processes: specializing, conjecturing, generalizing, and convincing. The repetition of the process allows students to circle around to the beginning and either increase the generality of the pattern or increase the refinements of the articulation. This process of looking at examples to find patterns, articulating the pattern, and then either verifying the pattern or finding a more accurate description is "the essence of mathematical thinking" (Mason et al., 1985; Lane, 2011) Specializing is the process through which one be-*

comes more familiar with the question at hand and prepares the way for creating a conjecture or a generalization. This process includes approaches such as looking at particular examples related to the problem, modeling the problem with some type of manipulative or diagram, and simplifying the problem, to name a few (Lane, 2011).

The purpose of this study was to evaluate the Specializing skills exhibited during problem solving by prospective mathematics teachers, by an academic, and by teachers with different levels of experience and teaching at different levels. The study was performed during the 2013-2014 academic year with five participants, which included two prospective teachers in their fifth year at Department of Secondary School Mathematics Education; two mathematics teachers working at an Anatolian High School in the Silifke district of Mersin province; and an academic currently performing his doctorate studies at a university. The case study method – which is one of the qualitative research methods – was used to examine the customization skills of the participants. Data were deciphered and processed by examining the video recordings taken during the meetings, and then converted into a written form. This data was then transferred to a computer environment together with the written solutions/answers submitted by the study participants.

The study findings showed that while teachers tended to solve a problem without resorting to generalizations, the prospective teachers and academic expressed that they normally try to find answers to a problem after using generalizations. In addition, it was observed that while the teachers were able to solve problems by using three specific cases, the academic was able to do the same by using two specific cases. Prospective teachers, on the other hand, had to examine a larger number of specific cases than the teachers and the academic in order to solve the same problems.