Eğitim Fakültesi
Dergisi
http://kutuphane. uludag. edu. tr/Univder/uufader. htm

İlköğretim Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Bilgi Oluşturma Süreçlerinin Matematiksel Güçlerine Göre İncelenmesi

Sibel Yeşildere, Elif B. Türnüklü
Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi
sibel.yesildere@deu.edu.tr, elif.turnuklu@deu.edu.tr

Özet. Bu araştırmanın amacı, farklı matematiksel güce sahip ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerini incelemektir. Matematiksel gücü yüksek ve düşük olan öğrencilerin bilgi oluşturma süreçleri karşılaştırılmakta ve öğrencileri matematiksel olarak güçlü yapan yönler tartışılmaktadır. Bununla birlikte bilgi oluşturma sürecini etkileyen matematiksel güç fikrinde yer alan en önemli becerilerin neler olduğunu ortaya koymak hedeflenmektedir. Araştırma yöntemi olarak örnek olay çalışması seçilmiştir. Örnek olay çalışmasında veri toplama aracı olarak açık uçlu problemler kullanılmıştır. Elde edilen verilerden farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerinde izledikleri yollar arasında bir takım farklılıkların olduğu tespit edilmiştir. Ulaşılan veriden hareketle matematiksel güç bileşenlerinin bilgi yapısının oluşumundaki rolü ve matematiksel güç oluşumunda bilgi yapılarının organizasyonu hakkında modeller oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bilgi oluşturma, soyutlama, matematiksel güç

Abstract. The aim of this research was to investigate knowledge construction processes of primary 8th grade students who have different mathematical power. Students who had low and high mathematical power were compared by means of their knowledge construction. According to results what makes a student mathematically powerful was discussed. Also discussed were some important mathematical skills which effect knowledge construction and mathematical thinking process. Case study was the research method and open ended problems were the data collection tool. It was found that there were some differences between students' mathematical thinking and knowledge construction process as means to their mathematical power. Some models were offered about 'the role of the components of mathematical power on knowledge construction' and 'knowledge constructions' organization to form mathematical power'

Key Words: Knowledge construction, abstraction, mathematical power.

GİRİŞ

Matematiksel güç, 90'lı yıllarda matematiğin gerektirdiği becerilerin günlük yaşamda ve pratik durumlarda kullanımını sağlama amacıyla özellikle Amerika Birleşik Devletleri'nde çalışılan bir konu olmuştur. En genel tanımlama ile matematiksel güç, 'öğrencilerin keşfederek, tahmin ederek ve mantıksal çıkarsamalar yaparak matematiksel bilgiyi bir araya getirmelerini ve kullanmalarını, rutin olmayan problemleri çözmelerini, matematik hakkında ve matematik yoluyla iletişim kurmalarını, farklı durumlardaki matematiksel ve farklı disiplinlerdeki fikirler arasında bağlantı kurmalarını içeren geniş kapsamlı becerilerdir' (NAEP, 2003: 35). Öğrencilerin matematiksel olarak güçlü olmalarını sağlayacak tarz öğrenmenin nasıl gerçekleşebileceğinin yanıtı, öğrenmenin doğası ve matematik öğrenmenin epistemolojik temelleri üzerine odaklanmayı gerektirmektedir. Çünkü matematiksel güçle ilgili alan yazınında ifade edilen matematiksel becerilerin en basit görüneninin bile kazanımı zordur ve belli teoriler çerçevesinde ele alınmaları gerekmektedir. Öğrenmenin karmaşık yapısıyla ilgilenen soyutlama sürecinin araştırılması, matematiksel gücün dayandığı temelleri sağlamlaştırabilir. Matematiksel güce sahip olmada önemli olan ilişkilendirme, akıl yürütme ve iletişim kurma becerilerinin, merkezinde bilgi oluşturma bulunan soyutlama sürecinde ne şekilde kendilerini gösterdiğini ortaya koymak önemli olabilir.

Aristotle'nun çalışmalarında 'alıp götürmek' anlamındaki 'aphairesis' kelimesi ile karşımıza çıkan soyutlama, insanoğlunun düşünmesiyle ilgili felsefi ve psikolojik çalışmalara etkide bulunmuştur. Aristotle'nun ürettiği bu bilgi teorisi daha sonradan İngiliz deneyimci (empiricist) filozoflar tarafından ele alınmıştır (Van Oers, 2001). Bu filozoflardan biri olan Locke soyutlama ile ilgili klasik bir bakış açısının oluşmasını sağlamış ve Aristotle'dan bu yana ele alınan soyutlama fikri 21. yüzyıla kadar taşınmıştır. Bu klasik soyutlama fikrinin sahip olduğu düşünülen varsayımlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Van Oers, 2001):

1. Soyutlamalar, nesnelerin kategorilerle temsil edilmesiyle oluşmaktadır.
2. Soyutlamalar bağlamdan (ortamı çevreleyen koşullardan) bağımsız temsillerdir.
3. Soyut düşünme, düşünce gelişiminin daha ileri adımlarının ayırt edici bir özelliğidir.

Bu varsayımlarda dikkat çeken önemli noktalardan biri soyutlamanın, düşünme yapısı içinde üst düzeylerde gerçekleştiği düşünülen bir süreç olması ve soyutlamanın öğrenmenin gerçekleştiği zamandan, mekândan ve ortamdan bağımsız gerçekleşebileceğine inanılmasıdır.

20. yüzyılda soyutlama üzerine yapılan çalışmaların, yukarıda ifade edilen klasik anlayışın iddia ettiği varsayımlara dayalı olarak ilerletilmeye devam edildiği görülmektedir. Russell (1926), soyut düşüncenin insan zekâsının en üst düzey başarısı ve en güçlü aracı olduğunu belirtmektedir. Cassier'in soyutlama üzerine yaptığı açılımlar da dikkate almaya değerdir. Cassier (1923, 1957), bir süreç sonunda ulaşılan genel bir ifadenin soyutlamanın en son noktası olmadığını, hatta bazı genel ilkelerin sürekli olarak başlamaya hazır olduğunu vurgulamıştır. Sierpinska (1994:61) ise soyutlamayı kısaca "bir kavramdan belli özelliklerin ayrılması eylemi" olarak açıklamaktadır.

Günümüze gelindiğinde soyutlama fikrinin iki değişik bakış açısıyla yorumlandığı görülmektedir. Bunlardan ilki bilişsel soyutlama görüşü, diğeri sosyokültürel soyutlama görüşüdür. Soyutlamayı bilişsel bakış açısı ile ele alan araştırmacılar, öğrenmenin konuyla ilgili sunulan örneklerdeki benzerliklerden hareketle gerçekleşeceğini iddia etmektedir. Bu alanda bahsedilmesi gereken isimlerden ilki, Piaget'dir. Piaget soyutlamayı deneyimsel soyutlama (emprical abstraction) ve sözde-deneyimsel soyutlama (pseudo-emprical abstraction) olarak iki boyutta ele almıştır. Deneyimsel soyutlama, kavramlar arasındaki yüzeysel benzerliklere dayanmaktadır. Daha yalın bir ifadeyle deneyimsel soyutlamanın günlük yaşamdaki kavramları oluşturmaya yönelik bir soyutlama tipi olduğu söylenebilir (Mitchelmore, 2002). Hem deneyimsel soyutlama hem de sözde-deneyimsel soyutlama, kavramların ortak özelliklerini dikkate almaktadır. Ancak sözde-deneyimsel soyutlama bunun yanı sıra eylemler arasındaki çok yönlü ilişkiyi de göz önünde bulundurmaktadır. Piaget'nin soyutlama ile ilgili öne sürdüğü fikirlerden bir diğeri yansıtıcı soyutlamadır ve bu soyutlama fikri daha sonra yapılacak soyutlama araştırmalarına temel oluşturmaktadır (bkz. Tall, 1991). Soyutlamayı bilişsel bakış açısından değerlendiren önemli isimlerden bir diğeri de, Dienes'tir. Dienes (1961) soyutlamayı bitmiş bir ürün olarak değil, bir süreç olarak ele almakta ve soyutlamayı "bir grup farklı durumdan ortak özellik çıkarma süreci" olarak tanımlamaktadır (s.281). Daha ayrıntılı olarak açıklanacak olursa soyutlama, 'belli sayıdaki farklı durumda yer alan ortak noktaların çıkarılmasıdır. Bunu yapmak, bir sınıflamanın oluşturulmasını ve sınıflamaya ait olmayan elemanların özelliklerinin kavranmasında son noktaya ulaşılmasını söylemenin bir başka yoludur' (Dienes, 1963:57)

Sosyokültürel perspektifle ele alınan soyutlama görüşüne sahip araştırmacılar, öğrenmenin çevreden, araç kullanımından, sosyal etkileşimden ve ortamı çevreleyen koşullardan ayrı gerçekleşemeyeceği düşüncesine sahiptirler. Bu bağlamda soyutlamaya yaklaşan çeşitli araştırmacılar bulunmaktadır (örn. Noss ve Hoyles,1996; Van Oers, 2001; Ohlsson ve Lehtinen, 1997). Hoyles ve Noss, soyutlamayı, öğrencilerin sahip oldukları kavramsal bilgileri ilişkilendirmeleri boyutunda ele almışlar ve on dört yıl önce durumsal soyutlama (situated abstraction) fikrini üretmişlerdir. Onlara göre öğrenciler aktiviteleri başarılı olarak gerçekleştirerek ilerlediklerinde, bir önceki aktivitelerle yenileri birleştirmeyi öğrenirler. Van Oers, 'soyut'un bir kavramın yeni, daha önce fark edilmemiş bir özelliği değil, düşünmemize katkı sağlayan bir özellik olduğunu ifade ederek soyutlamayı "belli bir bakış açısından hareketle ilişkilerin oluşturulması süreci" olarak tanımlamıştır (2001:285). Ohlosson ve Lehtinen (1997) soyutlamanın bilişsel fonksiyonunu, daha büyük ve daha karmaşık bilgi yapılarını bir araya getirmeyi kolaylaştırmak olarak belirtmiştir. Onlara göre öğrenme bilgilerin özetlenmesi değil, genişletilmesidir. Araştırmacılar deneyimsel soyutlamaya gönderme yaparak, soyutlamanın bir bilgi yapısının niteliği olduğunu ve bu niteliğin uygun örneklerin sayısıyla ilişkili olmadığını ifade etmektedirler.

Soyutlamayı açıklamaya yönelik var olan bakış açıları incelenerek, soyutlamaya sosyokültürel perspektifle yaklaşan teorilerin bu araştırmaya daha uygun olduğu düşünülmüştür. Bunlardan biri olan Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) tarafından üretilen RBC (Recognizing-Building with-Constructing) soyutlama teorisi, soyutlama sürecini gözlemlenebilir üç epistemik eylemin gerçekleşmesi ile açıklaması nedeniyle araştırmanın teorik yapısı olarak seçilmiştir.

Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) soyutlama sürecini Davydov'un (1990) bilgi oluşturma felsefesinin ve Leont'ev'in (1981) aktivite teorisinin ilkelerine dayandırarak açıklamaktadır. Soyutlamayı daha önce oluşturulmuş matematiksel bilgilerin dikey olarak yeniden düzenlenerek yeni bir matematiksel yapı oluşturulması aktivitesi olarak görmektedirler. Hershkowitz vd. (2001), soyutlamanın tanımının daha iyi anlaşılması için sözü edilen bazı kavramları açıklamışlardır. Tanımlamada sözü geçen aktivite, Leont'ev'in (1981) ortaya koymuş olduğu şekli ile "aktivite teorisi"nde geçtiği anlamda kullanılmaktadır. Yani matematiksel soyutlama surecinin gerçekleştiği ortamın önemine ve aktiviteyi çevreleyen koşulların tamamının göz önüne alınması gerektiğini ima etmektedir. Önceden oluşturulmuş matematik, iki noktaya gönderme yapmaktadır: Birincisi daha önceki soyutlama sürecinin sonucunda ulaşılan matematiksel yapıların yeni bir soyutlama sürecinde kullanılabilirliğidir. İkincisi ise matematiksel soyutlama sürecinin arıtılmamış bir ilk formdan gelişmiş bir yapılandırmaya doğru ilerleyeceğine işaret etmektedir. Yeni yapı için yeniden düzenleme ifadesi, matematiksel ilişkilerin kurulmasını, yeni bir hipotez üretme, bir matematiksel genelleme, bir ispat veya bir problemin çözümü için yeni bir strateji keşfetme gibi üst düzey matematiksel eylemleri içermektedir. Dikey matematikleştirme, matematiksel elementlerin aktivite surecinde bir araya getirilmeleri, aralarında bağlantılar kurulmaları, yeni ilişkiler kurularak elementlerin (bileşenlerin) orijinal hallerine göre daha soyut olacak şekilde düzenlenmesi anlamına gelmektedir. (Hershkowitz, Parzysz ve Van Dormolen'den akt. Hershkowitz ve diğer., 2001). Yeni ifadesi ile soyutlama sonucunda aktivitedeki katılımcılar için daha önce ulaşılabilir olmayan matematiksel bir yapının ulaşılabilir olması kastedilmektedir. Hershkowitz ve diğer. (2001), öğrenmenin gerçekleştirildiği ortamdaki koşullardan bağımsız olarak soyutlamanın gerçekleşemeyeceğini ve soyutlama sürecinin soyut düşünceden hareketle meydana geldiğini belirtmektedirler.

RBC soyutlama teorisine göre soyutlama üç epistemik eylemden oluşur (epistemik eylemler, bilginin oluşturulması ve kullanılması ile ilgili eylemler olarak ifade edilebilir). Bu eylemler *tanıma, kullanma* ve *oluşturma*dır. Tanıma, daha önce oluşturulan bir yapının kullanılmasıdır. Kullanma, verilen bir hedefi gerçekleştirmek için eskiden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılması (Schwarz ve diğer., 2004), benzer bilgilerin bir araya getirilerek bir amacı gerçekleştirmek üzere kullanılmasını ifade eder (Bikner-Ahsbahs, 2004:120). Oluşturma, 'var olan matematiksel bilgi bileşenlerinin bir araya getirilmesi ile bu bilgiler arasında yeniden bir düzenlemeye gidilmesi neticesinde yeni bir anlam oluşturulması süreci'dir (Bikner-Ahsbahs, 2004:120).

Öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerinin gözlemlenebilir eylemlerle incelenmesi, matematik öğrenmede sorun yaşayan bir öğrencinin hangi bilişsel adımda takıldığını anlamlandırmada yararlı olabilir. Matematik öğrenmede yaşanan sıkıntıların giderilmesinde bu sürecin belli bir öğrenme teorisi çerçevesinde derinlemesine incelenmesi, matematik eğitiminde yapılan çalışmalara katkı sağlayabilir. Bu araştırmada farklı matematiksel güce sahip ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçleri arasındaki benzerlik ve farklılıklar incelenmektedir. Burada öğrencilerin düşünsel süreçlerine ilişkin bir genellemeye varmak değil, bu süreci oluşturan bileşenleri derinlemesine incelemek, öğrencilerin düşünsel süreçlerini etkileyen ilişkiler ağını belirli bir sistematik yaklaşımla açıklamak ve yorumlamak amaçlanmaktadır.

YÖNTEM

Araştırma Modeli

Araştırmada örnek olay çalışması yöntemi kullanılmıştır. Öğrencilerin matematiksel bilgiyi nasıl oluşturduğunu anlamak amaçlandığından örnek olay çalışmasında odaklı görüşme yapılmıştır. Çalışmada açık uçlu bir matematiksel problem kullanılmıştır. Öğrencilerin bir problemi doğal ortam içerisinde çözmeleri sürecinde gözlemlenmesi bilgi oluşturma biçimlerini anlamaya katkı sağlayabilir. Bu nedenle örnek olay çalışmasında katılımcı gözlem yoluyla da veri toplanmıştır. Bu amaçla öğrenciler bu problemi çözerken görüşmeler gerçekleştirilmiş ve kaydedilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplama aracı olarak matematiksel güç ölçeği ve örnek olay çalışması problemi kullanılmıştır. Matematiksel güç ölçeği; çoktan seçmeli sorulardan oluşan matematiksel bilgi ölçeği ve öğrencinin akıl yürütme sürecinin açığa çıkarılmasını amaçlayan açık uçlu problemlerden oluşmaktadır. Çalışmada, NAEP (2003) tarafından matematiksel gücün belirlenmesine yönelik kullanılan yapı, temel olarak alınmıştır. Ölçek, örnek olay çalışması gerçekleştirilecek grubu belirleme amacıyla uygulanmıştır.

Örnek olay çalışmasında aşağıdaki problem kullanılarak veri toplanmıştır: *"Bir ikizkenar üçgenin tabanı üzerinde alınan bir noktadan ikizkenarlara inilen dikmelerin uzunlukları ile ikizkenarlara ait yükseklikler arasındaki ilişkiyi araştırınız."*

Problem öğrencilerin üçgenin elemanlarından olan dikme ve yükseklik arasındaki ilişkiyi verilen problem durumunda araştırırken gerekli bilgileri tanıma, kullanma ve problemin hedeflediği yapıyı oluşturma süreçlerini gözlemlemeyi amaçlamaktadır. Genel anlamda bakıldığında problemde öğrencilerin istenen şekli oluşturduktan sonra, zihinlerinde var olan yapıları tanıyarak ve kullanarak problemin çözümüne ulaşmaları söz konusudur. Bu nedenle problemde öğrencilerin özellikle tanıma ve kullanma eylemleri üzerinde odaklanıldığı söylenebilir.

Problem iki bölümde ele alınabilir. İlk bölümde öğrencilerin taban üzerinde alınan noktalardan ikizkenarlara inilen dikmelerin uzunlukları ile ikizkenarlara ait yükseklikler arasındaki ilişkiyi araştırmaları beklenmektedir. Problemin ikinci bölümünde ise öğrencilerin ilk bölümdeki soruda sözü geçen üçgen ikizkenar değil de eşkenar üçgen olsaydı sonucun nasıl değişeceğini yorumlamaları beklenmektedir. Bu bölüm her ne kadar ilk bölüme gönderme yapsa da, öğrenciler ilk bölümden bağımsız olarak; ikizkenar ve eşkenar üçgen arasındaki ilişkiden yararlanarak yorum yapabilirler.

Problemde öğrencilerin bir matematiksel ispat yapmaları beklenmemektedir. Bulundukları sınıf seviyesi, problemde kullanmaları gereken bilgi yapılarına sahip olmalarını gerektirmektedir. Problemin var olan matematiksel bilgilerinden hareketle problemin cevabıyla ilgili tahminde bulunmalarını ve akıl yürüterek yorum yapabilmelerini mümkün kıldığı pilot çalışma ile belirlenmiştir. Öğrencilerin yaptıkları araştırmaların sonuçlarını kaydettikleri veri kayıt formu, problemde sorulan ilişkinin yönünün keşfedilmesine yardımcı olmaktadır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Veri Toplama Araçlarının Geçerlik ve Güvenirlikleri

Matematiksel güç ölçeği açık uçlu problemlerden ve bilgi ölçeğinden oluşmaktadır. Matematiksel güç ölçeğinde yer alan açık uçlu problemlerin geçerlik ve güvenirlikleri, uzman görüşü alınarak ve pilot çalışma gerçekleştirilerek sağlanmıştır. Çoktan seçmeli sorulardan oluşan bilgi ölçeğinin güvenirliği 181 öğrenciyle gerçekleştirilen pilot çalışma ile (Cronbach α) .83 olarak bulunmuştur. Örnek olay çalışması probleminin geçerlik ve güvenirliği, uzman görüşü alınarak ve pilot çalışma gerçekleştirilerek sağlanmıştır.

Örnek Olay Çalışması Analizlerinin Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik terimleri nicel araştırma ile benzerlik gösteren farklı terimlerle sağlanmaktadır. Guba ve Lincoln (1989) "inandırıcılık" (credibility) ifadesi ile iç geçerliği, "aktarılabilirlik" (transferability) ifadesi ile dış geçerliği, "güvenirlik" (dependability) ifadesi ile güvenirliği, "teyit edilebilirlik" (confirmability) ifadesi ile tarafsızlığı eşdeğer görmektedir. İnandırıcılığı sağlamada uzman incelemesi (peer debriefing), negatif olay analizi (negative case analysis) ve çeşitleme stratejileri kullanılmıştır.

Campbell ve Fiske (1959) çeşitlemenin nitel araştırmalarda geçerliği sağlamada güçlü bir yol olduğunu belirtmiştir (akt. Cohen, Manion, Morrison, 2002). Örnek olay çalışmalarında katılımcı gözlem ve görüşme yöntemleri kullanarak yöntem çeşitlemesi kullanılmıştır. Yin (1994), örnek olay çalışmalarında çoklu durum deseni kullanımının sonuçların dış geçerliğini arttırdığını belirtmektedir. Araştırmada öğrencilerin bilgi oluşturma ve matematiksel düşünme süreçleri, matematiksel gücü yüksek ve düşük olan öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Örnek olay çalışmasının tutarlığı, araştırma verilerin ve verilerin ele alınması ile oluşturulan rapordan oluşan örnek olay çalışması veritabanının oluşturulması ile sağlanabilir(Yin, 1994). Dört öğrenciyle gerçekleştirilen örnek olay çalışmasının görüşmeleri çözümlenmiştir ve her biri için rapor hazırlanmıştır. Her bir görüşmenin orijinal halinden ve araştırmacı raporundan veri tabanı oluşturulmuştur. Araştırmada öğrencilerin matematiksel güçlerine göre bilgi oluşturma süreçleri görüşme metinleri takip edilebilmektedir. Örnek olay çalışmasında teyit edilebilirlik, "delil zinciri"nin oluşturulması ile sağlanabilir (Yin, 1994). Araştırmada farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgi oluşturma süreçleri incelenerek bazı örüntüler ortaya konulmuştur. İncelemelerde delil olarak görüşme ve katılımcı gözlem notları kullanılmıştır. Bu örüntülere dayanarak kuramsal olarak ulaşılan fikirler, görüşme metinlerine atıfta bulunarak desteklenmekte ve delil zinciri oluşturulmaktadır. Araştırmada bulunan dört olayın ikisi çapraz olay analiziyle sunulmuştur. Geri kalan iki olay için negatif olay analizi gerçekleştirilmiş ve ulaşılan bulguların bu olaylar için de geçerli olduğu belirlenmiştir.

Evren ve Örneklem

Matematiksel güç ölçeğinin evreni İzmir merkezde yer alan 200 ilköğretim okuludur. Örneklem seçiminde olasılık tabanlı örnekleme yöntemlerinden tabakalı örnekleme ile İzmir merkez ilçelerinde yer alan toplam 20 okul seçilmiştir. Örneklemde 262 öğrenci bulunmaktadır.

Örnek olay çalışmasının evrenini, matematiksel güç ölçeği uygulanan ve değerlendirilmeye alınan 262 ilköğretim 8. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Örnek olay çalışmasında çoklu durum deseni kullanılmıştır. Örneklem, amaçlı örnekleme ile seçilmiştir. Evrendeki matematiksel gücü düşük ve yüksek öğrenciler seçilerek amaçlı örnekleme yöntemlerinden aykırı durum örnekleme yöntemi kullanılmıştır.

İşlem

Matematiksel güç ölçeği uygulanan 262 öğrenci içinden iki matematiksel gücü düşük, iki matematiksel gücü yüksek; toplam dört öğrenci ile örnek olay çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Örnek olay çalışmaları, içinde sadece öğrenci ve araştırmacının bulunduğu bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı öğrencilerin düşünme şekillerini etkilemeyecek kadar uzak, elde edilebilecek geçerli bilgileri kaybetmeyecek kadar yakın olmuş ve tarafsız rol oynamıştır.

Verilerin Analizi

Matematiksel Güç Ölçeği

Matematiksel güç ölçeği 10 açık uçlu problemden ve bilgi ölçeğinden oluşmaktadır. Açık uçlu problemlere verilen cevaplar nicel veri haline dönüştürülüp analiz edilmiştir. Nicel analizde aralığı 0 ile 4 arasında değişen derecelendirilmiş puanlama anahtarı kullanılmıştır. Buna göre açık uçlu problemlerden alınabilecek en yüksek puan 40, en düşük puan 0'dır. Puanlama sonrasında toplam puanı 0 ile 19 arasında olan öğrencilerin performansı düşük, 20 ile 27 arasında puan alan öğrencilerin performansı orta ve 28 ile 40 arasında puan alan öğrencilerin performansı yüksek olarak belirlenmiştir. Sekizinci sınıf bilgi ölçeğinde 0 ile 10 arasında soruyu doğru yanıtlayan öğrencilerin performansı düşük, 11 ile 15 arasında soruyu doğru yanıtlayan öğrencilerin performansı orta ve 16 ile 22 arasında soruyu doğru yanıtlayan öğrencilerin performansı yüksek olarak belirlenmiştir.

Matematiksel güç ölçeğinde yer alan açık uçlu problemler ilk bileşeni, bilgi ölçeği ikinci bileşeni ve Y yüksek, O orta, D düşük performansı göstermek üzere (Y,Y), (Y,O) ve (O,Y) alan öğrencilerin matematiksel güçleri yüksek, (D,D), (O,D), (D,O) alan öğrencilerin matematiksel güçleri düşük olarak belirlenmiştir. Analizle ilgili daha ayrıntılı bilgi Yeşildere'nin (2006) çalışmasından edinilebilir.

Örnek Olay Çalışması

Örnek olay çalışmasında öğrencilerin anlamaları üzerinde durulmuştur. Nitel veri analizlerinden içerik analizi yapılmıştır. Veriler raporlaştırılarak sunulmuştur. Araştırmada çoklu örnek olay çalışması yazılı raporu kullanılmıştır. Öğrencilerin bilgi oluşturma süreçlerini incelemede RBC teorisi analitik araç olarak kullanılmıştır. Tanıma, kullanma, oluşturma başlıkları altında farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgi oluşturma süreçleri, görüşme metinleri verilerek incelenmiştir. Örnek olay çalışmalarında fark edilen örüntüler belirlenerek yorumlanmıştır. Pilot çalışma bulguları problemin, öğrencilerdeki bilgi yapılarını tanıma ve kullanmalarını gözlemlemede uygun olduğunu göstermiştir.

BULGULAR

Sekizinci sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilen örnek olay çalışmalarında benzer örüntüler elde edilmiştir. Dört öğrencinin de bulgularına yer vermek mümkün olmayacağından bu bölümde çalışmalarda daha konuşkan olmaları nedeniyle örüntülerin okuyucu tarafından daha kolay gözlemlenebileceği Ethem (E) ve Nurettin (N)'in olayları sunulmaktadır. Bu öğrencilerden E matematiksel güç ölçeğinde yüksek, N düşük performans göstermiştir. *Tanıma*, *kullanma*, *oluşturma* başlıkları ile öğrencilerin bilgiyi oluşturma şekilleri incelenmektedir.

Tanıma

E sesli olarak problemi okumuş ve ne anladığını açıklayarak problemi çözmeye başlamıştır (1A-19E). Daha sonra herhangi bir ikizkenar üçgen çizmiştir.

20E:Yükseklikle buluşan bir de dikme ineceğim ama bir şey anlamadım aynı nokta üzerinden mi yapacağım kenarlara dikmeleri?

21A: Soruda ne sormuş?

22E: Dikmelerin uzunlukları ile diyor, herhangi bir noktadan… Diyor…

23A: Nerede herhangi bir nokta?

24E: Tabandaki

25A: Taban neresi?

27E: Burası.*(Parmağıyla tabanı doğru şekilde gösteriyor)*

28A: Tamam. Taban üzerindeki hangi noktayı almayı düşünüyorsun?

29E: Burayı.

30A: Bunun bir nedeni var mı?

31E: Daha kolay olsun diye.

32A: Tamam.

33E: *(Şekil çiziyor)*…Şu an dikmeleri çizdim.

34A: Evet, senden ne soruyor peki şekille ifade edecek olursan?

35E: Şimdi…. Bu dikmelerle bu yüksekliğin nasıl olduğunu söylüyor.

36A: Hı hı…

37E: uzunluğa göre bulacağım ben.

E tabana ait yüksekliğin tabanla kesiştiği noktayı seçmiştir (29E). Problemde verilen diğer elemanlardan sadece tabana ait yüksekliği çizmiş, ikizkenarlara ait yükseklikleri belirtmemiştir.

38A: Peki bir üçgenin kaç tane yüksekliği vardır?

39E:Üç.

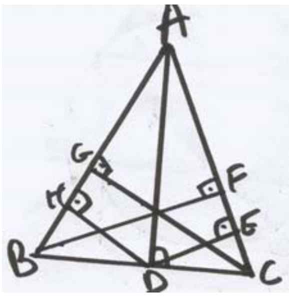
40A: Peki sende kaç tane var şu an?

41E: Bir.

42A: Senden istenenin hangi yükseklik olduğunu biliyor musun?

43E: Tabana gelen yükseklik galiba… Hayır! İkizkenarlara ait yüksekliklermiş. Yani yanlış yaptım*(Tekrar şekil çiziyor)*

E, problemde kendisinden istenen şekli doğru olarak çizebilmiştir. E'nin çiziminde harflendirme yapması dikkat çekmektedir.



Şekil 1. *E'nin Çizdiği Şekil*

44A: Şimdi senden cebirsel olarak neyin hangi uzunluklarla ilişkili olduklarını yazmanı istesem?

45E: Cebirsel olarak derken hani…

46A: Harflerle belirterek diyelim.

47E:F uzunluğuyla DE ve DH uzunluklarının ilişkilerini istiyor.

48A: Tamam.

49E:O zaman şimdi ölçü olarak mı bakayım?

50A: Nasıl bakmayı düşünürsün?

51E: Ya bence bir ilişki varsa, ölçüsel olarak da meydana gelmesi, çıkması gerekiyor.

E'nin çizdiği şekilde tabanın neresi olduğunu belirtmesi, bir üçgende üç tane yüksekliğin olduğunu söylemesi ve aranan ilişkinin ölçüsel olarak ortaya konulması gerektiğini açıklaması tanıma eyleminin gerçekleştiğine verilebilecek örneklerdir (27E, 39E, 51E). Aynı problem üzerinde çalışan N, şekli oluşturmada zorluk çekmiştir. N'nin şekli oluşturarak problemi ele alma şekli aşağıdaki metinlerde verilmektedir.

1A: Problem senden ne istiyor?

2N: *(Soruyu okuyor)* Bir ikizkenar üçgenin tabanı üzerinde alınan herhangi bir noktadan ikizkenarlara inilen dikmelerin uzunlukları ile ikizkenarlara ait yükseklikler nasıl ilişkili, araştırınız.

3A: Sen ne anlıyorsun, onu açıklar mısın?

4N: Önce bir şey çizeceğim, ikizkenar üçgen çizeceğim. Onun içerisinde bir nokta seçeceğim.

5A: İçerisinde?

6N: Üçgenin tabanı üzerinde. Tabanı üzerinde bir nokta çizeceğim ve kenarlara dik ineceğim. Sonra ikizkenara ait yükseklikler ile ilişkilerini bulacağım. Benden istenilen, üçgen üzerindeki bir üçgenin tabanındaki bir noktadan indirilen dikmelerle üçgene ait uzunluklar arasındaki ilişki.

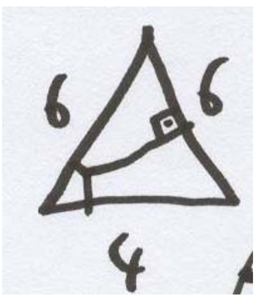
7A:Şekil olarak gösterebilir misin?

8N:*(Bir üçgen çiziyor)* Peki bizden şey mi istiyor, bildiğimiz üçgen istiyor değil mi? Yani üç boyutlu demek istiyor değil mi? Taban üzerinde değil, değil mi?

9A:Üçgen iki boyutlu mu, üç boyutlu mu?

10N:Üçgen iki boyutlu. *(Çizdiği üçgenin iç bölgesinde bir nokta işaretliyor).*

N'nin oluşturduğu şekil aşağıdaki gibidir.



Şekil 2. *N'nin Çizdiği Şekil*

N'nin üçgenin üç boyutlu mu istendiğini sorması (8N) ve noktayı taban üzerinde değil üçgensel bölgenin içinde alması (10N) zihnindeki taban kavramının ne olduğunu sorgulamak gerektiğini düşündürtmektedir (11A).

11A: Taban neresi?

12N: Taban *(üçgenin tamamını tarayarak gösteriyor),* bu bütünün hepsi taban. *(soruyu tekrar okuyor)* bir nokta ikizkenara indirilen dikmelerin uzunlukları… Yani...*(çiziyor)* dik olarak indirdiğimiz uzunluklar ikizkenara ait yükseklikler nasıl ilişkilidir?...

N'nin zihnindeki taban kavramının, üçgensel bölge ile aynı anlamda yapılandığı gözlemlenmektedir (12N). N, üçgen prizma veya üçgen piramit gibi üç boyutlu bir yapının tabanı ile bir üçgenin tabanını karıştırmaktadır. N problemi, önceden yanlış oluşturulan bir yapıyı tanıyarak çözmeye başlamaktadır. N'nin bu davranışının kullanma ve oluşturma eylemlerini ne ölçüde etkilediği daha sonraki bölümlerde görülecektir.

N ile E'nin problemi resmetme noktasında farklılıkları dikkat çekmektedir. E, cetvel ve iletki ile ölçümlü olarak yükseklik ve dikmeyi oluştururken N bu gereçleri kullanmadan göz kararı dikme çizmiştir (bkz Şekil 1 ve 2).

Kullanma

Kullanma, verilen bir hedefi gerçekleştirmek için eskiden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılmasıdır (Schwarz ve diğer., 2004). Bu bölümde öğrencilerin kullanma eylemini gerçekleştirme şekilleri incelenmektedir. E çizim yapmış (43E) ve ölçüm yaparak araştırmaya devam edeceğini belirtmiştir (51E). Bu planını uygulayarak problemi çözmeye devam etmektedir.

53E:(*Şekil çiziyor…)* Tamam, bu 2 cm.

54A: Bunları şu veri kayıt formuna istersen kaydedebilirsin.

55E:2. kenarın uzunluğunu bulursak… *(şekil çiziyor…)* o da 2 cm'dir.

56A: Evet.

57E: Uzunluklar toplamı 4 oluyor.

58A: Evet.

59E: Uzunluklar farkı sıfır oluyor.

60A: Evet.

61E:Şimdi yüksekliklere bakacağım. Bu tabana inilen…

62A: Kendin belirleyebilirsin yaz istersen üzerlerine karıştırmamak için…

63E:*(Gerekli bilgileri kayıt ediyor)* buraya inilen 4 cm, burası da 4 cm… bana yanlış hatırlamıyorsam bunları soruyordu. Bence… Dikmelerin toplamları orada bulunana şeye eşit… Dike eşit, yüksekliğe eşit.

64A: Peki tek bir nokta seçimi ile böyle bir genellemeye varman yeterli mi?

65E: Ben bir tane daha deneyeyim bence, bir nokta alsam belki farklı bir şey bulabilirim.

66A: Peki.

67E: Ama yani… Sonuçta buradan 1 cm uzaklıkta alsam sıfır buradan da uzaklığı 1 cm artacak toplamaları yine aynı olacak. Çok farklı olacağını sanmıyorum.

E çizimler, ölçümler ve hesaplamalar yapmaktadır. Bunları yapması kullanma eylemini gerçekleştirdiğini göstermektedir (57E, 59E). Bu süreçte E'nin zihninde ilişkinin ne olabileceği ile ilgili bir fikrin oluşmaya başlandığı söylenebilir çünkü bir tahminin olduğu gözlemlenmektedir (63E). Ancak yöneltilen soruyla E'nin hipotezini tekrar doğrulamaya ihtiyaç duyduğu da gözlemlenmektedir (65E). Fark ettiği ilişkide değerlerin birinin değişmesi halinde diğerlerinin nasıl değişeceğini belirlemesi de yeni bir yapının oluşmaya başladığının göstergesi olabilir (67E). E yeniden çizim ve ölçüm yapar.

70A: Neleri ölçüyorsun şu an?

71E: Dikmeleri bir daha ölçüyorum.

72A:*(Şekil çizmeye devam ediyor)…*Tahmin ettiğim gibi oldu.

73A: Peki ikizkenarlara ait yüksekliklerin uzunlukları aynı mı kalacak?

74E:*(Ş ekil çizmeye devam ediyor…)* Demin bu sonucu bulurken yuvarlamıştım…

75A:Hım… Yine bu yeni noktaları kaydedebilirsin.

76E: Yine toplamaları buna eşit olmuş oldu, ikizkenarlara ait olan dikmeler… Yüksekliğe eşit oldu.

E denemelerine devam ederek hipotezinin doğruluğunu araştırmaya devam etmektedir. Araştırma yaparken ikizkenarlardan birine ait yüksekliği çizerek kontrol etmektedir. E'nin ikizkenar üçgende ikizkenara inilen yüksekliklerin uzunluklarının eşit olduğunu düşünüp düşünmediği kontrol edilmiştir (79A).

79A: Bir ikizkenar üçgende ikizkenarlara ait yükseklikler her zaman eşit midir?

80E: Hayır. İkizkenarların uzunlukları değiştiği sürece bence değişir.

81A: Hayır, birbirine eşit midir? Demek istiyorum. Aynı ikizkenar üçgende ikizkenara inilen yüksekliklerin uzunlukları eşit midir her zaman?

82E: Evet.

E'nin bu yanıtı ikizkenar üçgende yükseklikle ilgili bilgilerini yeni bilgiye ulaşmada kullandığını göstermektedir (82E).

E'nin çizimlerinde araçları etkili kullandığı, dikmeleri ve yükseklikleri iletkiden doğru şekilde yararlanarak oluşturduğu gözlemlenmiştir. Bu davranış aynı problem üzerinde çalışan N'de görülmemektedir. Ancak N, problemde tabanı üçgensel bölgenin tamamı olarak aldığından problemi ilerletmekte güçlük çekmektedir.

14N:*(Düşünüyor ve çeşitli hesaplamalar yapıyor)*Başka bir şey ne olabilir?

15A: Kafanda nasıl ilişkili olabileceklerine dair bir şey var mı? Gözünde canlandırdığında…

16N:Gözümde canlandırdığımda benim aklıma şu geliyor. Şimdi bu nokta tam şu iki kenarın üzerinde olsaydı *(üçgenin tabanını kastediyor)* Yüksekliğe bu uzunluğu indirirsek tam şey oluyor işte, yükseklikle eşit oluyor toplanırsa. Bunu biraz daha ileriye götürürsek *(yukarıyı, üçgenin iç bölgesindeki kısmını gösteriyor)* dikme indirdiğimiz zaman aynı şey olur mu diye düşünüyorum ama aklıma gelmiyor. Ne olabilir?

17A: Noktanın yerini başka yerde alıp yeniden denesen?

18N: Noktayı bu sefer şurada bir yerde alayım *(noktayı yine üçgenin iç bölgesinde alıyor)* Şunla şunun *(iki dikmeyi gösteriyor)* toplamı şuna eşit mi? Böyle bir şey üzerinden gidelim. Kenar 6 ise buralar 3, 3 olur. *(Dikmeler kenarları ikiye bölüyor gibi düşünerek verdiği değerleri ona göre hesaplama yapıyor.)*

N kendince olası sonuçtan bahsetmekte ancak bu düşüncelerini matematiksel olarak açıklayabilmeye yönelik hiçbir girişimde bulunmamaktadır. Çizdiği üçgende göz kararı bir sonuç oluşturmaya çalıştığı görülmektedir. Bu çalışmada N'nin kullanma eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir mi? N'nin zihninde yanlış oluşmuş üçgen yapısı bulunmaktadır. Bu yapının özelliklerinin problemi çözmede yanlış olarak tanınması, yanlış olarak kullanılmasına neden olmaktadır. Çünkü N noktaları üçgenin iç bölgesinde alarak bir sonuca ulaşmaya çalışmaktadır (16N, 18N).

Oluşturma

Oluşturma, var olan matematiksel bilgi bileşenlerinin bir araya getirilmesi ile bu bilgiler arasında yeniden bir düzenlemeye gidilmesi neticesinde yeni bir anlam oluşturulması sürecidir (Bikner-Ahsbahs, 2004:120). Bu bölümde öğrencilerin (eğer gerçekleşmişse) oluşturma süreçleri incelenmektedir. E, ölçülü çizimler, ölçümler ve hesaplamalar yapmış ve elde ettiği ölçüm sonuçları arasında örüntü arayarak bir sonuca ulaşmıştı.

87A: Peki, bu bulduğun sonuçtan emin misin? Yaptığın araştırmaya göre.

88E: Aslında tam değilim şu an.

89A: Neden değilsin?

90E: Sanki büyük yükseklikte de denesem yüksekliklerin eşit olup olmadığına baksam daha iyi olur.

91A: Tamam.

92E: *(Yeni şekil çiziyor,ölçümler ve hesaplamalar yapıyor*)…Aynı.

93A: Hı, Hı… Peki, senden bu araştırmanda ulaştığın genellemeyi şu çalışma kağıdına ifade etmeni istesem matematiksel olarak senden sana verilen soruyu inceleyerek bu ilişkiyi yazabilir misin?

94E: Yazacağımı sesli anlatmam gerekiyor mu?

95A: Hayır, genel anlamda sesli çözmeni istedik ama, genellemeni zaten söyledin.

96E: İyi o zaman. (Düşüncelerini yazıyor…)

97A: Tamam, Sesli okur musun?

98E: Bence ikizkenarlara inilen dikmelerin toplamı ikizkenarların yüksekliklerin toplamına eşittir.

99A: Peki her üçgende mi?

100E: Evet çizdiğim her ikizkenar üçgende.

101A: ikizkenar üçgenler için geçerli…

Yaptığı çizimler ve ölçümler sonrasında E: "İkizkenarlara inilen dikmelerin toplamı ikizkenarların yüksekliklerin toplamına eşittir." şeklinde bir yapı oluşturmuştur (98E). Bunun yanı sıra E, oluşturduğu yapıyı geometrik olarak da ifade edebilmiştir.

$$|BF| = |DE| + |DH| = |CG|$$

E'nin doğru bir yapıya ulaşması sonrasında bu bilgiyi yeni bir problem durumunda kullanıp kullanamayacağı araştırıldı. E'ye "Problemde sözü edilen üçgen ikizkenar değil de eşkenar üçgen olsaydı sonuç değişir miydi? Değişirse nasıl değişirdi?" sorusu yöneltildi (1E-3A).

4E: Bölüm 1 de sözü edilen üçgen ikizkenar değil de eşkenar üçgen olsaydı sonuç nasıl değişirdi? Deneyebilir miyim?

5A: Tabi deneyebilirsin. Kâğıt vereyim sana. O kâğıda deneyebilirsin.

6E: *(Şekil çiziyor…)*

7A: Şu anda ne yapıyorsun?

8E: Yüksekliğinden dikme ineceğim şimdi. *(ölçüm ve hesaplamalar yapmaya devam ediyor…)* Evet doğru çıktı.

9A: Değişir mi değişmez mi?

10E: Değişmez.

11A: Peki böyle bir deneme yapmadan eşkenar üçgen ve ikizkenar üçgen bilgilerini gözden geçirsen ve ölçüm yapmadan bu konu hakkında fikir üretmeni istesem.

E en baştan alıp yeniden üçgen çizerek ve ölçümler yaparak araştırma yapmaktadır (4E-8E). Kendisinden deneme yapmadan üçgenlerle ilgili bilgileri ile yeni oluşturduğu bilgiyi ilişkilendirmesi istense de farklı üçgenlerle denemeler yapmaya devam etmiştir (12E-28E) ve önceden ulaştığı genellemenin eşkenar üçgen için de doğru olduğunu belirtmiştir. E'ye yeniden deneme yapmadan yorum yapıp yapamayacağı sorulmuştur (29A).

30E: Orada, tam olarak ben söyleyemiyorum çünkü…yani…taban uzunluklarının aynı olduğunu düşünmem gerekiyor onun için.

Her ne kadar E adım adım ilerleyerek bir yapı oluşturduysa da oluşturduğu bu yapıyı hemen kullanmakta güçlük çekmektedir. Bu durum yeni oluşturulan bir yapının pekiştirilmeye ihtiyaç duyduğu, pekiştirme sonrasında soyutlamanın gerçekleşebileceği şeklinde yorumlanabilir ki soyutlamanın gerçekleşmesinde pekiştirmenin önemine dikkat çeken başka araştırmalar da bulunmaktadır (Özmantar, 2005; Monaghan ve Özmantar, 2006).

N, noktaları üçgenin iç bölgesinden almış ve bu noktalardan ikizkenarlara dikme inmişti. Bu dikmelerle ikizkenarlara ait yüksekliklerin toplamı arasında "İkizkenara inilen dikmelerin uzunlukları, ikizkenarlara ait tüm yüksekliklerin üçte biri kadardır" şeklinde bir ilişki bulmuştur (23N). Ancak N problemi çözerken dikmeleri ve yükseklikleri inmede hiçbir geometrik gereçten yararlanmadan, göz kararı çizim yapmıştır. N bu gereçlerin kullanımının sonuca ulaşması için gerekli olduğunun ve sonucu etkileyeceğinin farkında olmayabilir. Eğer bu durum geçerliyse, yeni bir bilgi yapısının oluşturulması sürecinde farklı bilgilerin tanınmasının ve kullanımının önemi ortaya çıkmaktadır.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematiksel gücü oluşturan becerilerin ne ölçüde ve nasıl matematiksel gücü oluşturduğu araştırmalarla kanıtlanmamıştır. Matematik öğrenmenin çok çeşitli boyutlarda ele alınabilecek yapısı vardır. Bu nedenle bir teoriye dayandırarak ele alınması gerekmektedir. Teoriler, araştırmacıların daha güvenilir ve anlaşılabilir sonuçlara ulaşmasını sağlar. Sfard (1998) eğitimsel başarı veya başarısızlıkların teorik tartışmaların yardımıyla anlaşılabilir ve açıklanabilir olduğunu belirtmiştir. Matematik eğitimindeki teoriler ise;

- tahminleri destekler,
- açıklama gücüne sahiptir,
- karmaşık ve başka şeylerle de ilişkili olaylar hakkında düşünmeyi kolaylaştırır,
- verileri analiz etmede bir araçtır,
- öğrenme hakkında yüzeysel tanımların ötesinde iletişim kurmak için bir ortak dil oluşumunu sağlar (akt. Dubinsky and McDonald, 2001: 273).

Araştırmada matematiksel bilgi oluşumunun incelenmesinde RBC teorisi, hem teorik yapı olarak hem de bilgi oluşumunun gözlemlenmesinde metodolojik bir araç olarak kullanılmıştır. Öğrencilerin bilgi oluşturma süreçleri RBC teorisinde yer alan epistemik eylemler bağlamında sunulmaktadır.

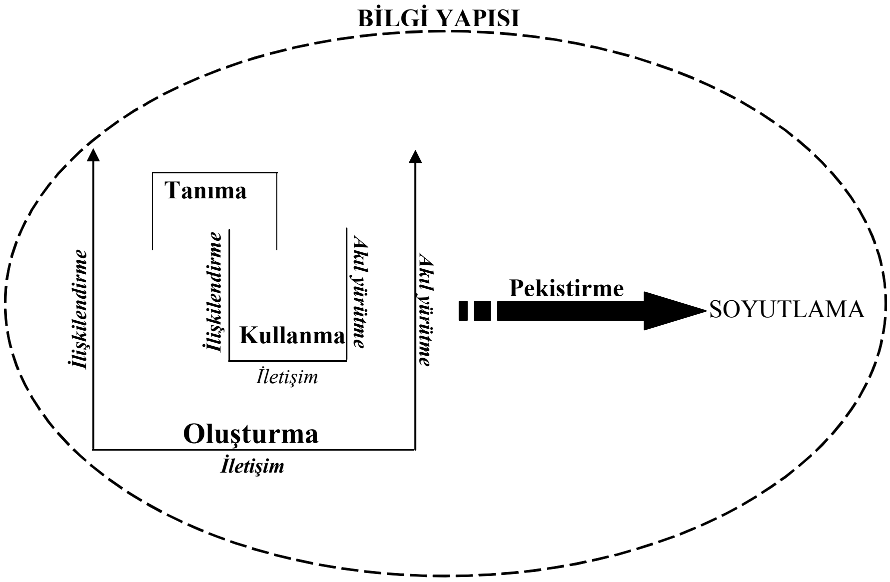
Tanıma eyleminin gerçekleşme şekline bakıldığında öğrencilerin verilen bir problemi çözme sürecinde gerekli olan bilgileri tanımalarının matematiksel güçlerine göre değişmeksizin gerçekleştiği görülmektedir. Yukarıda görüşme metinleri verilen iki öğrencinin de problemi çözmede başlangıç olacak birtakım bilgileri tanıdığı görülmektedir (27E, 12N). Ancak burada önemli olan öğrencilerin doğru bilgileri tanıması ve tanınan bilgilerin önceden doğru şekilde oluşturulmuş olmasıdır. Matematiksel gücü yüksek olan E'nin problemleri çözmede gerekli olan doğru bilgileri tanıdığı gözlemlenmektedir. Matematiksel gücü düşük olan N ise önceden yanlış oluşturulmuş olan yapıları tanımıştır (12N). Problemin kendilerinden istenileni resmetme noktasında farklılıkların olduğu göze çarpmaktadır (bkz. Şekil 1 ve Şekil 2). Önceden yanlış olarak oluşturulan bilgilerin tanınmasının bu farklılığa neden olduğu düşünülebilir. Örneğin N'nin tabanı önceden yanlış oluşturması problemde isteneni resmetmesini engellemiş olabilir.

Kullanma eyleminin gerçekleşme şekline genel olarak bakıldığında ipuçlarının yakalanması ve ilişkilendirme noktalarında farklılıkların olduğu göze çarpmaktadır. Daha önceden de belirtildiği gibi, öğrenciler problemin çözümüne ilişkin ürettiği hipotezlerin doğruluğunu, kullanma eylemi sürecinde araştırır ve mevcut matematiksel yapılarını problemi çözmek için kullanır. Kullanma eylemi, öğrenciye ipucu verilmesi gibi bir kaynağın öğrenciye hatırlatılması ile de gerçekleşebilir (Hershkowitz, ve diğer., 2001). Öğrencilerin verilen ipucunu değerlendirerek çözümlerine yön vermeleri noktasında farklılık gösterdikleri gözlemlenmiştir. Matematiksel gücü yüksek olan öğrenciler ipuçlarını kullanarak hatalarını fark etmekte ya da çözümlerini ilerletmektedir. E ile gerçekleştirilen çalışma bu duruma örnek gösterilebilir (38E-43E). İpuçlarını fark ederek kullanma matematiksel gücü düşük olan öğrencilerde gözlemlenmemiştir(16N-18N). Bu durumun nedeni öğrencilerin ipucunu yakalamalarını sağlayacak yapılara sahip olmamaları veya yanlış oluşturmuş olmalarından ötürü tanımamalarından kaynaklanıyor olabilir.

Öğrencilerin matematiksel güçlerine göre kullanma eylemini gerçekleştirmeleri arasında görülen farklılıklardan bir diğeri, tanınan bilgilerin ilişkilendirilmesi noktasında görülmektedir. Kullanma sürecinde öğrenci yeni ve daha karmaşık yapısal bilgi ile zenginleşmez, problemde uygulanabilir bir çözümü oluşturmak için mevcut yapısal bilgisini kullanır. Öğrenciler bir hedefi başarmak için daha önceki aktiviteler aracılığıyla tanıdıkları yapıları kullanırlar. Öğrencilerin daha önceden oluşturdukları bilgi yapılarını tanımaları önemli olabilir. Bununla birlikte bu bilgi yapılarını doğru şekilde ilişkilendirerek oluşturmaya hazırlık niteliğinde kullanmaları da önemlidir.

Tanıma ve kullanma eylemlerinin gerçekleşmesinde öğrencilerin matematiksel güçlerine bağlı olarak görülen farklılıkların, öğrencilerin oluşturma eylemini gerçekleştirmesine etki ettiği söylenebilir. Bunun nedeni bu eylemlerin gerçekleşmesi sürecinde aslında oluşturma sürecinin de başlaması olasılığıdır. Öğrenciler problemle ilgili atılabilecek adımları araştırma sürecinde tanıma ve kullanma eylemleri gerçekleşirken, çözümle ulaşılabilecek bir yapıda yavaş yavaş oluşmaktadır. Öğrenciler sahip oldukları yapıları kullanırken yani hipotezlerinin doğruluğunu test ederken oluşturma hep gerçekleşmektedir. Oluşturmanın tam belirgin bir noktada başladığı ve tam olarak belirgin bir noktada sona erdiği söylenemez. Çünkü öğrenci test ettiği düşüncesinin doğruluğundan emin olmadığında veya yanlış ilerlediğinde ulaştığı bilgiler de aslında onun bir sonraki adımını belirlemesine, dolayısıyla oluşturmasına yardımcı olmaktadır.

Matematiksel güç oluşumunda temel olan ilişkilendirme, iletişim ve akıl yürütme becerileri ile RBC teorisinin bilgi oluşumunu gözlemlemede yararlandıkları tanıma, kullanma ve oluşturma eylemlerinin, bir bilgi yapısını oluşturma sürecinde birlikte hareket ettiği ve iç içe yer aldığı düşünülebilir. Bu ilişki, aşağıdaki şekil ile daha açık olarak ortaya konulmaktadır.



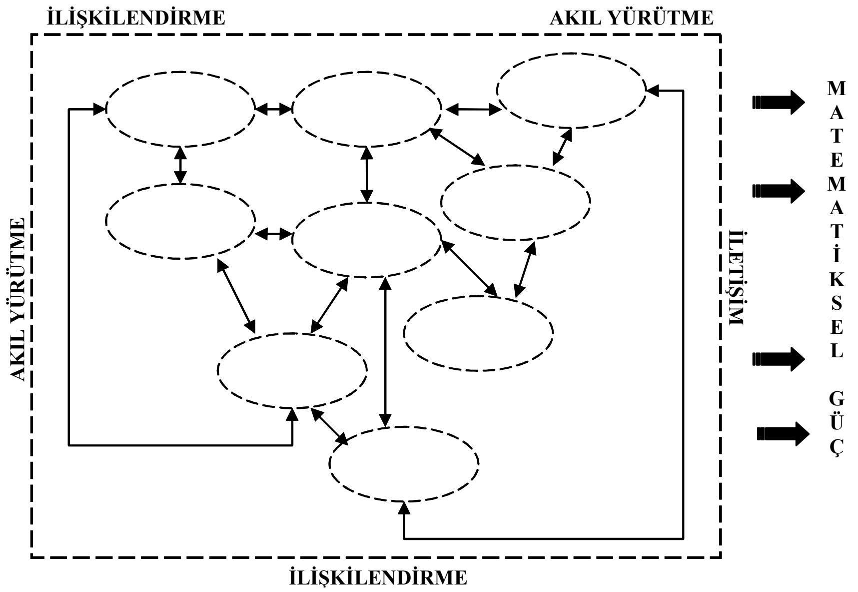
Şekil 3. *Matematiksel Güç Bileşenlerinin Bilgi Yapısının Oluşumundaki Rolü*

Bu şekilde matematiksel güç'le ilgili üç önemli becerinin epistemik eylemlerin gerçekleşmesi sürecine ne ölçüde eşlik ettiğine işaret edilmektedir. Tanıma eyleminin gerçekleşmesinde akıl yürütme, ilişkilendirme ve iletişim becerilerinin varlığı mutlaka gerekmemektedir. Akıl yürütme olmaksızın da matematiksel yapılar kendi başlarına ve diğer bilgilerden bağımsız olarak tanınabilir. İlişkilendirmenin yapılması kullanma veya oluşturma eylemlerinin varlığını akla getirmektedir. Bu nedenle tanıma eylemini çevreleyen bir beceri yoktur. Kullanmaya bakıldığında, bu süreçte akıl yürütme bilinçli ve/veya bilinçsiz bir şekilde kendini ortaya koyabilir. İlişkilendirme kaçınılmaz olarak bulunmak zorundadır. İletişim ise her zaman olmasa da duruma göre bulunması gerekebilir. Bu nedenle şekilde kalın olarak yazılmamıştır. Oluşturma sürecinde matematiksel gücün üç bileşeni de mutlaka olmalıdır. Epistemik eylemlerin iç içe yerleşmiş olmasından kaynaklanan ilişki dikkate alınarak, epistemik eylemlerin matematiksel gücün bileşenleri ile çerçevelenmiş olduğu söylenebilir. Bu çıkarımlar elde edilen veriler dikkate alınarak yapılmıştır.

Bilgi oluşturma süreçleri incelenen öğrencilerden matematiksel gücü düşük olan öğrencilerin hiçbiri kullanma ve oluşturma eylemlerini gerçekleştiremeniştir. Bununla birlikte pek çoğu tanıma eylemini gerçekleştirebilmiştir. Matematiksel gücü düşük olan öğrencilerin, genel bir bakışla, iletişim, ilişkilendirme ve akıl yürütme becerilerinin düşük olduğu göz önüne alındığında kullanma ve oluşturma eylemlerinin gerçekleşmesinde bu üç beceriye sahip olmanın önemli olduğu söylenebilir.

Tanıma, kullanma ve oluşturma epistemik eylemlerinin iç içe yerleştiği iddia edilmektedir. Esas beklenen eylemin 'oluşturma' olmasından ötürü, şekilde oluşturmanın temel ve kapsayan görüntüsü vurgulanmak istenmiştir. Oluşturma eylemin gerçekleşmesi sürecinde ilişkilendirme, akıl yürütme ve iletişim becerileri rol oynamaktadır. Oluşan bilgi yapısı pekiştirilmeye ihtiyaç duymaktadır. Hershkowitz vd. (2001) pekiştirilmeyen bilginin kırılgan bir yapısı olduğunun altını çizmişlerdir. Süreç sonunda bilgi yapısı oluşmaktadır. RBC teorisinin ortaya koymuş olduğu soyutlama modeline göre, soyutlama sürecinde önceden oluşturulan yapılar tanınır ve aktivitenin gereklerini yerine getirmek için yeni bir yapıya ulaşmak üzere tekrar düzenlenir. Hershkowitz ve diğer. (2001) eğer oluşturma soyutlama ise, genellikle öğrencinin yeni bilgisini ifade etmek için bir dil geliştirdiğini ve soyutlanan bilginin 'kırılgan' olduğunu, bu nedenle pekiştirmeye ihtiyaç duyduğunu iddia etmektedir. Bununla birlikte Monoghan ve Özmantar (2006) yeni ortaya çıkan matematiksel bilgi yapılarının ancak pekiştirildikten sonra soyutlama olarak değerlendirilebileceğini iddia etmektedir. Şekil, ikinci görüş temel alınarak oluşturulmuştur.

Öğrencilerin oluşturdukları bilgi yapıları arasında kurulan bağlantılar neticesinde bir 'ağ' oluştuğu söylenebilir ki matematiksel gücün ortaya çıkmasının bu ağ ile yakından ilişkili olduğu ve hatta mümkün olduğu düşünülebilir. Bilgi yapılarının düzenlenmesi ile matematiksel gücün oluşumu aşağıdaki şekil ile özetlenebilir.



Şekil 4. *Matematiksel Güç Oluşumunda Bilgi Yapılarının Organizasyonu*

Şekil 4'teki elipsler, Şekil 3'de oluşumları açıklanan bilgi yapılarını göstermektedir. Bilgi yapılarının birbiriyle bağlantılarının kurulması sürecinde ilişkilendirme, iletişim ve akıl yürütme becerileri yine kullanılmaktadır. Bu sürecin devamı matematiksel güce ulaştırabilir. Yukarıdaki iki şekille matematiksel gücün varlığının, bilgi oluşturma sürecindeki rolü açıklanmak istenmektedir. Ancak bu şekillerin mutlak doğruluğu tartışılabilir, şekildeki ilişkiler araştırma verilerinden yapılan çıkarsamalar ile oluşturulmuştur.

Yapılan örnek olay çalışmaları, oluşturma süreciyle ilgili birtakım gözlemlerin yapılmasını sağlamıştır. Araştırmada oluşturmanın belli bir noktada başlayıp biten bir süreç olmadığı, tanıma, kullanma ve oluşturma eylemlerinin birlikte ilerledikleri gözlemlenmiştir. Bulgular, matematiksel gücü yüksek olan öğrencilerin bilgi oluşturma eylemleri arasında geliş gidişleri daha hızlı gerçekleştirdiğini göstermektedir. RBC eylemlerinin hızlı gerçekleşmesi, bilgi oluşturma sürecinin kendiliğinden meydana gelmesini sağlamaktadır. Matematiksel güç için önemli olan akıl yürütme, ilişkilendirme ve iletişim becerilerinin matematiğin öğrenilmesinde ve bilgi oluşturmada rol oynadığı söylenebilir. Bu nedenle matematik derslerinde öğrencilerin bu becerileri kazanıp kazanmadıklarının da dikkate alınması yararlı olabilir. Bilgi oluşturma eylemlerinden tanıma, her ne kadar hemen hemen her öğrencide sıkça gözlemlenebilir bir aşama olarak görülse de, araştırma bulguları tanımanın bilgi oluşturmada ilk adım olduğunu göstermektedir. Bu özelliğinden ötürü basit ancak temel olan bu aşama üzerinde de dikkatle durulması uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). *Towards the Emergence of Constructing Mathematical Meanings*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2:119-126.

Cassier, E. (1923). *Substance and function Einsteins theory of relavity*. NY: Dover.

Cassier, E. (1957). *The philosophy of symbolic forms* (Vol.3). The phenomenology of knowledge. London: Yale university Pres.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: an exploratory study, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 34(5), 719-737.

Cohen, L., Manion, L., Morrison, K. (2002). Research Methods in Education, London: Routledge.

Davydov, V.V.: 1990, *Soviet Studies in Mathematics Education: Vol. 2. Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*, J. Kilpatrick (ed.) and J. Teller (Trans.), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Dienes, Z.P. (1961). On abstraction and generalization. *Harward Educational Review.*31(3), 281-301.

Dubinsky, E., McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Hilton et.(Eds.) The teaching and learning of mathematics at University level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Guba, E.G. ve Lincoln, Y.S. (1989). *Fourth Generation Evaluation*. Newbury Park, CA:Sage.

Hershkowitz, Hadas, Dreyfus, 2006). Diversity in the construction of a group's shared knowledge. In Novotna, J., Moraova, M. Ve Stehlikova, N. (Eds). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Sayı:2, 297-304, Prague.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T., (2001). Abstraction in Context: Epistemic Actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2): 195-222.

Leont'ev, A.N. (1981). *The problem of activity in psychology*, in J.V. Wertsch (ed. And Trans.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology*, M.E. Sharpe, Armonk, NY, 37-71.

Mitchelmore, M. (2002). The role of abstraction and generalization in the development of mathematical knowledge, East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Singapore.

Monaghan, J. ve Ozmantar, M. F. (2006). Abstraction and consolidation. *Educational Studies in Mathematics,* 62(3), 233-258.

NAEP (2003). Mathematics Framework for the 2003 National Assessment of Educational Progress

Noss, R. ve Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer, Dordrecht: The Netherlands

Ohlsson, S. and Lehtinen, E. (1997). Abstraction and the acquisition of complex ideas, *International Journal of Educational Research* 27, 37–48.

Özmantar, M. (2005). An Investigation of the Formation of Mathematical Abstractions through Scaffolding, Doktora Tezi, University of Leeds.

Russell, B. (1926). *Education and Good Life.* NY: Boni and Liveright.

Sid, R. (1998). Learning to see the wind, *Mathematics Teaching in The Middle School*, 3(7).

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics,* London: Falmer.

Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R. (2004). *Teacher Guidance of Knowledge Construction*, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4: 169-176.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, The Netherlands: Kluwer.

Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly,* 1(3), 279-305.

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, DEÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2000). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*, Ankara:Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods,* USA:Sage.

The Investigation of Knowledge Construction Processes of Primary 8th Grade Students According to Their Mathematical Power

Summary

Abstraction is searched from many philosophers from Aristotle to Russell. Hershkowitz, Schwarz and Dreyfus (2001) identified RBC model of abstraction and they attempt to analyze students' construction of knowledge when they are investigating problem-situations in context. They hypothesize that tracing the genesis of an abstraction passes through three stages:

1. A need for a new structure,
2. The constructing of a new abstract entity in which recognizing and building-with already existing structures are nested dialectically, and
3. The Consolidation of the abstract entity facilitating one's recognizing it with increased ease and building-with it in further activities.

Recognizing, building-with and constructing are the elements of a model for processes of abstraction, called the *dynamically nested RBC model of abstraction*. Recognizing a familiar mathematical structure occurs when a student realizes that the structure is inherent in a given mathematical situation. Building-with consists of combining existing artifacts in order to meet a goal such as solving a problem or justifying a statement. Constructing refers only to the first time a learner reorganizes knowledge into a novel structure. According to the model, constructing is central to the process of abstraction while the other two actions are dynamically nested within it. In this model, constructing incorporates the other two epistemic actions in such a way that building-with actions are nested in constructing actions and recognizing actions are nested in building-with actions and in constructing actions.

The aim of this research was to investigate knowledge construction processes of primary 8^{th} grade students who have different mathematical power. The emergence of mathematical constructions was discussed by using RBC as an analytical tool.

Method

Case study was conducted with four students. Two of them had a high and the others had low mathematical power. They were asked to work on a task that was unfamiliar to them. The interviewer's task was to ask students some questions to cause them explain what they were doing and why.

Findings

The cases showed that each of the principal components of the model, the three epistemic actions, is important for constructing. Although constructing is the central epistemic action among them, recognizing a needed structure for a mathematical construction is also crucial. Recognizing a previously wrong constructed structure may cause to construct a wrong structure. According to findings two models were constructed. First one shows the organization of knowledge structures to form mathematical power (figure 1) and the second one shows knowledge constructions' organization to form mathematical power (figure 2):

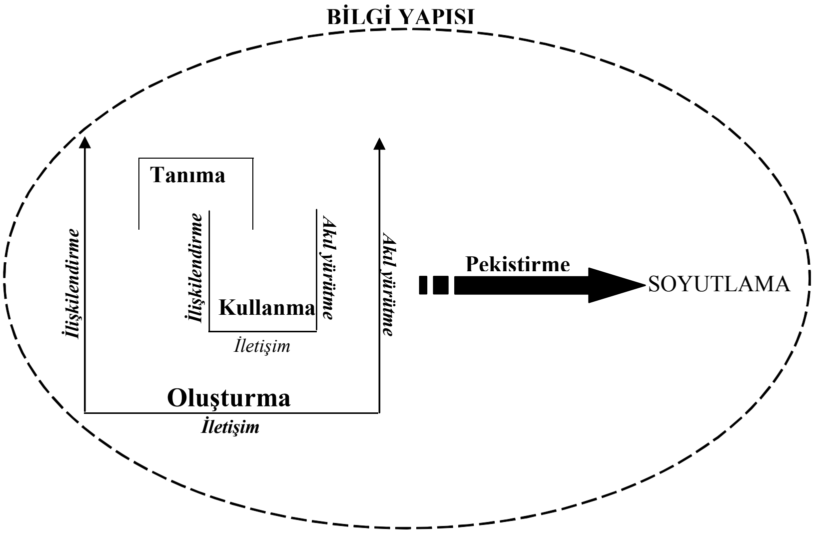


Figure 1. *The role of the components of mathematical power to form knowledge structures*

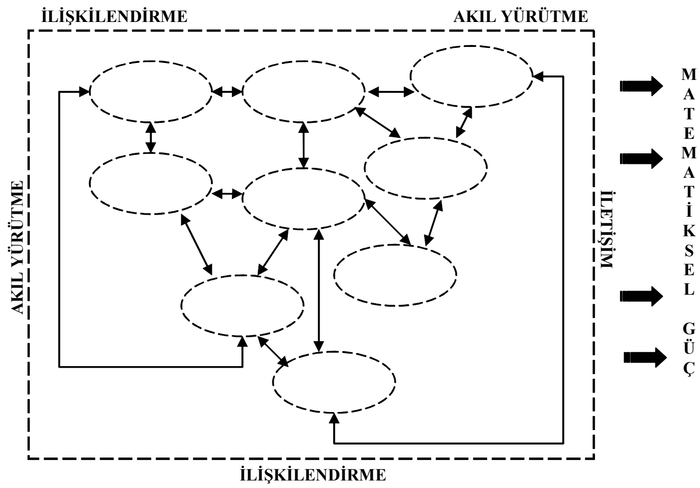


Figure 2. *Knowledge constructions' organization to form mathematical power*

Ellipses in figure 2 show the knowledge structures given in figure 2. Communicating, connecting ideas and reasoning abilities are used through the knowledge construction process. Continuation of this process may convey to mathematical power.