



## An effective method for solving one class of integral equations in two-dimensional problems of diffraction theory

Osman Dur\*<sup>ORCID</sup>

Gazi University, Institute of Science and Technology, Advanced Technologies, 06500 Yenimahalle, Ankara, Turkey

### Highlights:

- Perfect Electrical Conductor (PEC) metal strip analysis
- Solving of two-dimensional problems with integral
- Analysis with using of diffraction theory

### Keywords:

- Electromagnetics
- Diffraction Theory
- Perfect Electric Conductor

### Article Info:

Research Article  
Received: 03.02.2021  
Accepted: 12.09.2021

### DOI:

10.17341/gazimmfd.869834

### Correspondence:

Author: Osman Dur  
e-mail:  
osmandur@gazi.edu.tr  
phone: +90 312 969 3700

### Graphical/Tabular Abstract

Two dimensional integral equations are frequently used in various different engineering and scientific studies. In solving these equations using numerical and analytical methods along wide frequency spectrums; the electrical dimensions of the objects and the complexity of their geometric structures are considered as critical computational aspects. This article offers an effective solution to solve some integral equations. Various problems of the theory of diffraction realized by perfectly conductive metal plates are reduced to these integral equations. Diffraction theory, defines the diffraction processes that occur when waves such as in the form of light, encounter different obstacles in multiples of their wavelengths with dimensions. A certain bending and deflection of waves around these barriers is characterized by diffraction theory. In dealing with diffraction theory, advanced numerical and matrix-based solutions such as the moment method and the T-matrix method are used. On the other hand, the integral-based solutions proposed in this study are used effectively.

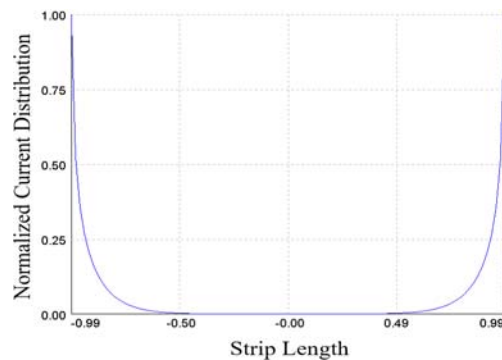


Figure A: Current distribution results  $\rho(\alpha)$  on the strip.

**Purpose:** Understanding of arbitrary values of frequency parameters and strip sizes with solving integral equations.

### Theory and Methods:

The integral-based solution obtained from this study is simulated according to the different medium permeability which is calculated with the electrical dimension varying depending on the frequency of the wave, and a graphical representation is provided. It is seen that the normalized current value at the ends of the strip is maximum for two different cases where the medium permeability is 20 and 30.

### Results:

Numerical results were observed by the solution of the system of linear algebraic equations (S.L.A.E.). Fig.1 shows the normalized current distribution on the strip for  $\epsilon=20$ . Fig.2 shows the normalized current distribution on the strip for  $\epsilon=30$ . In both cases we see that current has maximum on the edges.

### Conclusion:

In this article there was considered the problem of plane electromagnetic wave by the PEC strip. The theoretical background is given and after that theory is optimized for big number of  $\epsilon$ . Some results are also given.



## Kırınım teorisindeki bir takım iki boyutlu problemlerin çözümlenebilmesi için efektif bir metot

Osman Dur\*<sup>1D</sup>

Gazi Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, İleri Teknolojiler, 06500 Yenimahalle, Ankara, Türkiye

### Ö N E Ç İ K A N L A R

- Kusursuz elektrik iletken metal plakaların analizi
- İki boyutlu problemlerin integral ile çözümlenmesi
- Kırınım teorisi ile çözümlenmelerin gerçekleştirilmesi

#### Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi  
Geliş: 03.02.2021  
Kabul: 12.09.2021

#### DOI:

10.17341/gazimmfd.869834

#### Anahtar Kelimeler:

Elektromanyetik,  
kırınım teorisi,  
kusursuz elektrik iletken

#### ÖZ

İki boyutlu integral denklemler günümüzde pek çok farklı mühendislik ve bilimsel çalışmada sıklıkla kullanılmaktadır. Bu denklemlerin nümerik ve analitik yöntemler kullanılarak geniş frekans spektrumları boyunca çözümlenmesinde; cisimlerin elektriksel boyutları ve geometrik yapılarının karmaşıklığı göz önüne alınır. Bu makale bir takım integral denklemlerinin çözümlenmesi için efektif bir çözüm önerisi sunar. Kusursuz elektrik iletken metal plakalar tarafından gerçekleşen kırınım teorisinin çeşitli problemleri bu integral denklemlerine indirgenmiştir. Böylece, frekans parametrelerinin isteğe bağlı değerlerinin ve ekran boyutlarının anlaşılabilmesi için integral denklemlerinin çözümüne dair bir metot önerilmektedir. Kırınım teorisi, ışık vb. formdaki dalgaların, kendi dalga boylarının katlarındaki farklı engeller ile karşılaştıklarında ortaya çıkan kırınım süreçlerini tanımlar. Bu engellerin etrafındaki dalgaların belirli bir şekilde bükülmesi ve yön değiştirmesi kırınım teorisi ile karakterize edilir. Kırınım teorisinin ele alınmasında, moment yöntemi ve T-matrisi yöntemi gibi gelişmiş nümerik ve matris tabanlı çözüm yolları kullanıldığı gibi, bu çalışmada önerilen integral tabanlı çözümler de etkin olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmadan elde edilen integral tabanlı çözüm, dalganın frekansına bağlı olarak değişen elektriksel boyut ile hesaplanan farklı ortam geçirgenliklerine göre simüle edilerek, grafiksel gösterim sağlanmıştır. Ortam geçirgenliğinin 20 ve 30 alındığı iki farklı durum için şeridin uç noktalarında normalize akım değerinin maksimum olduğu görülmektedir.

## An effective method for solving one class of integral equations in two-dimensional problems of diffraction theory

### H I G H L I G H T S

- Perfect Electrical Conductor (PEC) metal strip analysis
- Solving of two-dimensional problems with integral
- Analysis with using of diffraction theory

#### Article Info

Research Article  
Received: 03.02.2021  
Accepted: 12.09.2021

#### DOI:

10.17341/gazimmfd.869834

#### Keywords:

Electromagnetics,  
diffraction theory,  
perfect electric conductor

#### ABSTRACT

In nowadays, two dimensional integral equations are frequently used in various different engineering and scientific studies. In solving these equations using numerical and analytical methods along wide frequency spectrums; the electrical dimensions of the objects and the complexity of their geometric structures are considered as critical computational aspects. This article offers an effective solution to solve some integral equations. Various problems of the theory of diffraction realized by perfectly conductive metal plates are reduced to these integral equations. Thus, a method for solving integral equations is proposed to understand arbitrary values of frequency parameters and strip sizes. Diffraction theory, defines the diffraction processes that occur when waves such as in the form of light, encounter different obstacles in multiples of their wavelengths with dimensions. A certain bending and deflection of waves around these barriers is characterized by diffraction theory. In dealing with diffraction theory, advanced numerical and matrix-based solutions such as the moment method and the T-matrix method are used. On the other hand, the integral-based solutions proposed in this study are used effectively. The integral-based solution obtained from this study is simulated according to the different medium permeability which is calculated with the electrical dimension varying depending on the frequency of the wave, and a graphical representation is provided. It is seen that the normalized current value at the ends of the strip is maximum for two different cases where the medium permeability is 20 and 30.

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Radar ve ilgili teknolojiler son yıllarda farklı amaçlarla yaygın olarak kullanılmaktadır [1-2]. İki boyutlu integral denklemlerin, uzaktan algılamadan, plazma fiziğine; görüntü işlemeden [3], şeritlerden düzlemsel dalganın kırınımına [4] ve farklı kırınım teorisi uygulamalarına kadar pek çok mühendislik ve bilim disiplininde geniş çaplı uygulama alanları bulunmaktadır [5-7]. Kesirli sınır koşulu ile yarım düzlemde kırınımın integral denklemler kullanılarak hesaplanması sonucu, yakın alanda Poynting vektörü ve enerji yoğunluğunun dağılımı belirlenmiştir [5]. Benzer şekilde empedans şeridinden hat kaynağı saçılmasının akım dağılımları ve radar kesitlerinin kesirli türev yöntemi ile analizi yapılırken integral denklemler kullanılarak ele alınan özel durumlar için analitik çözümler ortaya konmuştur [6]. Özellikle doğrusal olmayan iki boyutlu integral denklemlerin, analitik çözümlerinin ortaya konması oldukça zordur. Bu sebepten dolayı, bu problemlerin ele alınmasında yaklaşık çözümlerin bulunması amaçlanmaktadır [8].

Bilgisayar ve hesaplama teknolojilerinde yaşanan hızlı gelişmelere paralel olarak, yansıma ve kırınım problemlerinin nümerik yöntemler kullanılarak çözülmesinde gelişmeler ortaya çıkmıştır. Nümerik yöntemler matris dönüşümü uygulamalarını kullanmaları sebebiyle her ne kadar analitik çözümlere göre daha kolay olarak adlandırılırsalar da, hesaplama adımlarında kullanılan bilgisayar kapasiteleri çözülebilecek problemin ebadı üzerinde doğrudan etki etmektedir [9]. İntegral denklemler kullanılarak, farklı kırınım problemlerin çözülmesi mümkündür. Literatürde, empedans şeridi üzerindeki silindirik dalganın kırınım probleminin çözümü için kesirli türev yaklaşımının kullanılmasında integral denklemler kullanılmıştır [10]. Benzer şekilde, sonsuz periyodik şerit ızgarasından bir şeridin çıkarılması ile oluşturulan saçılım objesi üzerindeki kırınım probleminin çözülmesi için tekil integral denklemler kullanılmıştır [11]. İntegral denklemlerin çözülmesinde, nümerik yöntemlerin kullanılmasının yanı sıra, bu denklemlerin bir takım cebirsel eşitliklere dönüştürülmesi ve elde edilen bu matris eşitliklerinin standart matris dönüşüm algoritmaları kullanılarak çözülmesi mümkün olacaktır [12].

Yansıma ve kırınım problemlerinin ele alınmasına, cismin elektriksel büyüklüğü nümerik yöntemler kullanılarak çözümün elde edilmesini zorlaştırmaktadır. Diğer taraftan cismin geometrik yapısının karmaşık olması, analitik yöntemlerin uygulanabilir olmasının önündeki en büyük engeldir. Nümerik yöntemlerin rastgele şekillerdeki cisimler üzerindeki kırınım problemlerinde uygulanması üzerindeki sınırlayıcı unsur cisim büyüklüğüdür. Bu problemlerin çözümünde lineer denklem setlerinin oluşturulması mümkündür. Ancak bu denklemlerin çözülemeyecek büyük olması uygulanabilir olmasını engellemektedir [1, 12].

Farklı şekil, boyut ve malzemelere sahip saçıcılar üzerinden oluşan kırınım problemlerinin çözülmesinde çok sayıda

analitik model geliştirilmiştir. Bu metotlar, kesin ve yaklaşık yöntemler olmak üzere iki grupta toplanabilir. Kırınımın meydana geldiği objenin geometrisi, ayrılabilir dalga denklemlerine sahip bir koordinat sistemine karşılık geldiğinde, kesin hesaplama yöntemlerinin kullanılması mümkün olacaktır [13]. Bu kesin hesaplama yöntemleri genellikle karmaşık integral ifadeleri içerirken, yakın alan ya da uzak alan hesaplamalarından kaynaklı kısıtlamalar nedeniyle uygulamada pek çok problemin kesin çözümleri olmadığı görülmektedir [13, 14].

Kırınım teorisi problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan yaklaşık analitik yöntemler, Geometrik Kırınım Teorisi (GTD - Geometrical Theory of Diffraction) ve Fiziksel Kırınım Teorisi (PTD - Physical Theory of Diffraction) kullanılarak klasik optik yasalarının genişletilmesinden elde edilmiştir [13]. Geometrik optikte sıfır dalga boyu yaklaşımı uygulanır ve kırınım problemi üzerinde çalışılan alan farklı aydınlatılmış ve gölge şeklinde kalmış bölgelerine bölünür. Enerjinin ışın demetleri şeklinde yayıldığı modelde önceleri kırınım etkileri yapılan hesaplamalarda göz ardı edilirken, ilk olarak GTD ile yapılan çalışmalarda kırınım etkileri hesaplamalarda yer almıştır [14]. Fiziksel optikte, yüzey akımlarının yalnızca saçılan alanın beslemesi olarak işlev gören saçıcının aydınlatılmış kısmında indüklendiği varsayılır. Bu tekniğin doğruluğu, varsayılan akım dağılımları geliştirilerek yükseltilebilir [14]. Yüksek frekanslarda elektromanyetik alan ve akım temelli olarak hesaplama yapılan bu yöntemlerde, model boyutu arttıkça, doğruluğun artırılabilmesi hesaplama süresinin ve işlemci kabiliyetlerinin artırılmasını zorunlu kılmaktadır [13, 15].

Bu çalışmada, geniş bir spektrum üzerinde hesaplama süresini düşürecek ve kırınım teorisindeki iki boyutlu problemlerin çözümünde yüksek doğrulukla çözümler üretecek efektif bir analiz yöntemi ortaya konmuştur. Çalışmanın ikinci bölümünde problemin formülasyonu çıkarılmış ve gerekli integrallerin oluşturulması sağlanmıştır. Bu kapsamda önce logaritmik çekirdek farkı kullanılarak integral denklemlerin çözümüne gidilmiştir. Akabinde rastgele  $\varepsilon$  değerleri üzerinden ortogonal polinomlar yöntemiyle integral denklemlerin çözülmesi sağlanmıştır. Üçüncü bölümde elde edilen integral denklemlere göre nümerik sonuçlar ortaya çıkarılırken, son bölümde makalede yapılan çalışmalar ile ilgili değerlendirmelerde bulunulmuştur.

## 2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU (FORMULATION OF THE PROBLEM)

Bu makalede aşağıda belirtilen tipteki integral denklemleri (İ.D.) ele alınmıştır (Eş. 1).

$$\int_{-1}^1 \rho(\xi) [\ln|\xi - \eta| + N_1(\xi, \eta; \varepsilon)] d\xi = f_1(\eta), \eta \in [-1, 1] \quad (1)$$

Burada  $\rho(\xi)$  bulunacak fonksiyon olup ;  $N_1$  ve  $f_1$  bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca  $\varepsilon$  gerçek bir parametredir. Buna ek olarak  $(N_1) \in C$  ve  $(f_1) \in C$  fonksiyonları sürekli fonksiyon sınıfına aittir. Kırınım teorisinin çok sayıda iç ve dış problemi Eş. 1 tipinde integral denklemlerini çözmeye indirgenmiştir [16, 17]. Bu denklemlerin çözümünde  $\varepsilon$  parametresi, integral denkleminin (İ.D.) çözümünü oluşturabilmek için çok önemli bir rol oynar. Örneğin, düz bir şerit üzerinde dalga kırınımı probleminde  $\varepsilon = ka = 2\pi a/\lambda$  parametresi kullanılır. Bu parametre, dalga boyu  $\lambda$  ve şerit boyutu  $a$  ile doğrudan ilişkilidir. Aşağıda integral denklemin çözümü için iki yol verilmektedir ve bu yollar frekans parametresinin farklı değerlerinin anlaşılması için etkililerdir. Eş. 1 birinci derecede logaritmik fark çekirdek tipi bir integral denklemdir.

Sonsuz ince bir Kusursuz Elektrik İletken (KEİ) şeridi ile düzlem dalga kırınımı problemi Eş. 2 özümüne indirgenebilir.

$$\int_{-1}^1 \rho(\xi) H_0^1(\varepsilon|\xi - \eta|) d\xi = f_1(\eta) \quad (2)$$

Burada bilinmeyen fonksiyon  $\rho(\xi)$  ekrandaki mevcut yoğunluk ile orantılıdır ve  $a$  ekranın geometrisini nitelendirir. Bir fonksiyon olarak Eş. 3'te  $H_0^1(x)$  (Sıfır derece ve birinci tür Hankel Fonksiyonu)

$$H_0^1(x) = \frac{2i}{\pi} \ln x + N(x) \quad (3)$$

Burada  $N(x)$  sürekli bir fonksiyon olduğunda ve Eş. 2' nin Eş. 1'e indirgenebileceği açıktır. Burada İ.D. 1 için oldukça basit ve genel ortogonal polinomlar yöntemi ile çözüm yöntemi kurgulanacaktır. Bu yöntem, Bubnov'un İ.D.'e uygulanan yönteminin daha genel şemasının özel bir örneğidir. Ancak iki faktöre göre farklılık gösterir. Öncelikle entegrasyon alanının kenar noktasına yakın çözümün yapısını araştırmasına ihtiyaç duyar. İkinci olarak öz fonksiyonlar olarak ortogonal polinomlar (O.P.) ile çekirdeklerin tekil kısımları için spektral ifadeler oluşturması gerekir.

Ortogonal polinomlar yöntemi elastisite ve sürekli medya mekanikleri teori problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır [18-20].

### 2.1. Logaritmik Çekirdek Farkı ile İntegral Denklemler (I.E. with Logarithmic Difference Kernel)

İ.D. 1'i ele alalım. Çözüm yapısının,  $\rho(\xi)$  ile koşulu karşılayacak şekilde olduğunu varsayalım.

$$\rho(\xi) \xi \rightarrow \pm 1 (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Bu, aralığın sonunda  $\rho(\xi)$  'nın karekök tekilliğine sahip olduğu anlamına gelir [-1,1]. Kırınım problemlerinde-Eş. 4 koşulunun Meixner koşulundan geldiği iyi bilinmektedir. [16, 21]. Burada bilinmeyen fonksiyon olan Eş. 5'de  $\rho(\xi)$  'u aşağıdaki gibi açık olarak gösterebilir.

$$\rho(\xi) = (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi(\xi) = (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n T_n(\xi) \quad (5)$$

Burada  $\{T_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$  Chebyshev çok terimlerinin birinci derecelerinden olduğunda ,  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  katsayıları bulunmuş olur.

$\rho(\xi)$  için Eş. 5 içindeki genişletme Chebyshev çok terimlisi olan ve Eş. 6'da gösterilen  $T_n(\xi)$  integral operatörünün (İ.O.) öz fonksiyonları olmasından kaynaklanır [18,20].

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln|\xi - \eta| = \omega_n T_n(\eta), |\eta| \leq 1 \quad (6)$$

Burada  $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$  değerleri İ.O. için öz fonksiyonlardır ve Eş. 7'de şu şekilde verilmiştir;

$$\omega_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (7)$$

Sonraki türevler için Chebyshev polinomlarının ortogonalite koşullarına ihtiyaç duyulmaktadır;

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta) T_k(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{1}{\beta_n} \pi \delta_{kn}; \beta_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}, \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (8)$$

Eş. 6 ve Eş. 8 kullanılarak Eş. 6' nın çekirdeğinin bir yakınsak çift doğrulama genişlemesine sahip olduğu Eş. 9 ile gösterilebilir.

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n T_n(\xi) T_n(\eta) \quad (9)$$

Burada Eş. 5'in, Eş. 1'de verilen İ.D. içerisine yerleştirilmesinin ardından spektral ifade olan Eş. 6 hesaba katılabilir. Ardından, sürekli fonksiyonun seri ifadesi ile Eş.10'daki gibi temsil edileceği varsayılır.

$$f_1(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(\eta) \quad (10)$$

Ardından arama katsayıları  $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$  'in Eş. 8 koşullarının diklik koşullarını kullanarak Eş. 11'deki gibi Sonsuz Doğrusal Cebirsel Denklemler (S.D.C.D.) elde edilebilir.

$$\rho_k - \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn} \rho_n = \gamma_k, k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Buradan Eş. 12 ye gidilir;

$$a_{kn} = \frac{\beta_k}{2\omega_k} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_k(\eta) T_n(\xi)}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\xi^2)}} N_1(\xi, \eta; \varepsilon) d\eta d\xi, \gamma_k = \pi \frac{f_k}{2\omega_k} \quad (12)$$

Bu  $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in l_2$  şeklinde gösterilebilir. Bunun yanında seri Eş. 13 gibi gösterilebilir;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}|^2 < \infty \quad (13)$$

Bu  $\{a_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$  matrisin  $l_2$  'den  $l_2$  'ye kadar kesin bir sürekli operatör olan  $A$  'yı oluşturduğu anlamına gelmektedir. Sonuç olarak bu operatör bir sonlu-boyutlu yöntem bir yöntem ile yakınsanabilir. Başka bir deyişle, S.D.C.D. Eş. 11 kesinleştirme ve kesmenin anlamları ile çözümlenebilir.

Ayrıca, matris elemanları içerisinde olan ikili integral  $\{a_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$  bir tek boyutlu çözüm içerisine aşağıda gösterilen  $N_1(\xi, \eta; \varepsilon)$  denklemi kullanılarak dönüştürülebilir.

$$N_1(\xi, \eta; \varepsilon) = \int_0^{\infty} \delta(\alpha) \cos[\varepsilon(\eta - \xi)] \frac{d\alpha}{\alpha};$$

$$\delta(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\sim} O(\alpha^{-s}), s > 1 \quad (14)$$

Bunu gösterebilmek için Eş. 14, Eş. 12'nin içerisine yazılabilir ve hesaplanabilir.

$$\int_0^1 \left\{ \frac{T_{2k}(\eta) \cos(\varepsilon\alpha\eta)}{T_{2k+1}(\eta) \sin(\varepsilon\alpha\eta)} \right\} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} =$$

$$(-1)^k \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{J_{2k}(\varepsilon\alpha)}{J_{2k+1}(\varepsilon\alpha)} \right\} \quad (15)$$

(Eş. 15 içerisindeki  $J_k(x)$  Bessel fonksiyonlarıdır).

Ardından  $a_{kn}$  'in bulunabilmesi için Eş 16 oluşturulur;

$$a_{kn} \sim \frac{[1+(-1)^{k+n}]}{\omega_k} \beta_k \int_0^{\infty} \frac{\delta(\alpha)}{\alpha} J_k(\varepsilon\alpha) J_n(\varepsilon\alpha) d\alpha \quad (16)$$

Pratik içerisinde [20] verilen çözüm yönteminin İ.D. 1 'in sadece küçük  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \sim 0 \div 10$ ) değerleri için etkili olduğu belirtilmiştir. Kural olarak, bu parametre saçılmanın bazı dalga boyutları ile ilgilidir.

### 2.2. $\varepsilon$ İhtiyari Değerleri İçin Ortogonal Çok Terimli Yöntemi (Method of O.P. Effective for Arbitrary Values of $\varepsilon$ )

Burada İ.D. 1'in çözümü için alternatif bir yöntem verilmelidir. Bu algoritma ortogonal çok terimlilik yöntemi üzerine kurgulanmıştır. Ancak tüm  $\varepsilon$  değerleri, için kullanılabilir durumdadır ve buna  $\varepsilon$  'in geniş aralık değerleri de dâhildir.

Burada İ.D. üzerindeki değişimler Eş. 17 de gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir,

$$\eta = \frac{\text{th}(\frac{\varepsilon\xi}{2})}{\text{th}(\frac{\varepsilon}{2})} = \alpha; \quad \xi = \frac{\text{th}(\frac{\varepsilon\xi_0}{2})}{\text{th}(\frac{\varepsilon}{2})} = \beta \quad (17)$$

Ardından İ.D. çekirdeği Eş. 18'deki formu alır;

$$\ln|\xi - \eta| = \ln \left| \frac{\text{sh}(\frac{\varepsilon}{2}[\xi - \xi_0])}{\text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi) \cosh(\frac{\varepsilon}{2}\xi_0)} \right| - \ln \left( \text{th} \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (18)$$

$\varepsilon$ 'nun rastgele değerler olarak alınması durumunda, ortogonal polinomlar yönteminin kullanılması ile bilinmeyen fonksiyon olan  $\rho(\alpha)$  fonksiyonu Eş. 19'daki şekilde gösterilebilir;

$$\rho(\alpha) = \frac{\text{ch}(\frac{\varepsilon\xi}{2})}{\sqrt{2[\text{ch}(\varepsilon) - \text{ch}(\varepsilon\xi)]}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n T_n(\alpha) \quad (19)$$

Eş. 19 içerisindeki açılım ve genişlemeler, Chebyshev çok terimliliğinin  $T_n(\alpha)$  İ.O.'nün Eş. 18'in çekirdeği ile birlikte öz fonksiyonları olduğu gerçeğinden kaynaklanır ve aşağıdaki spektral ifade gerçekleşir [16, 22].

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\text{sh}(\frac{\varepsilon}{2}[\xi - \xi_0])}{\text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi) \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi_0)} \right| \frac{T_n(\alpha)}{\sqrt{2[\text{ch}(\varepsilon) - \text{ch}(\varepsilon\xi)]}} =$$

$$\lambda_n T_n(\alpha) \quad (20)$$

Burada İ.O.'un öz değerleri olan  $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$  ler Eş. 21'deki eşitlikten bulunabilir.

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2})} \ln \left( 2 \text{cth} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \right), & n = 0 \\ \frac{1}{n \varepsilon \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2})}, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (21)$$

Ayrıca, Chebyshev çok terimliliğinin ortogonu karşılması durumuna dikkat edilmelidir.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\alpha) T_k(\alpha)}{\sqrt{2[\text{ch}(\varepsilon) - \text{ch}(\varepsilon\xi)] \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi)}} d\xi = \frac{1}{\beta_n \varepsilon \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2})} \delta_{kn} \quad (22)$$

Şimdi İ.D. 1 içerisinde Eş. 19 alınabilir ve Eş. 20 içerisindeki spektral genişleme hesaba katılabilir durumdadır. Burada  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  katsayılarının arayışı için Eş. 22 ortogonal olma koşulları kullanılır ve sonsuz S.D.C.D. elde edilir.

$$x_k + \sum_{n=0}^{\infty} c_{kn} x_n = q_k, \quad k = 0, 1, 2, \quad (23)$$

Burada Eş. 24' ün sonucu olarak  $c_{kn}$ ;

$$\frac{\varepsilon \beta_k \cosh(\frac{\varepsilon}{2})}{8\pi \lambda_k} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{N_1 T_n(\beta_n) T_k(\alpha)}{\sqrt{[\text{ch}(\varepsilon) - \text{ch}(\varepsilon\xi)] \sqrt{[\text{ch}(\varepsilon) - \text{ch}(\varepsilon\xi_0)]}} =$$

$$\frac{d\xi d\xi_0}{\text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi) \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi_0)} + \delta_{k0} \delta_{n0} \frac{\ln(\text{th}(\frac{\varepsilon}{2}))}{\ln(2 \text{cth}(\frac{\varepsilon}{2}))} \quad (24)$$

olarak ifade edilir. Eş. 25 içerisinde  $q_k$  belirtilmiştir.

$$q_k = -\frac{\beta_k}{2\lambda_k} \text{sh} \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_{-1}^1 \frac{f_1(\beta) T_k(\beta)}{\sqrt{2[\text{ch}(\varepsilon) - \text{ch}(\varepsilon\xi_0)] \text{ch}(\frac{\varepsilon}{2}\xi_0)}} d\xi_0 \quad (25)$$

$$N_1(z) = \frac{2i}{\pi} \ln z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{(k!)^2} + J_0(z) - \frac{2i}{\pi} \ln 2 J_0(z)$$

$$+ \frac{2i}{\pi} \gamma J_0(z) + i \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{(k!)^2} \left( \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \right) \right]$$

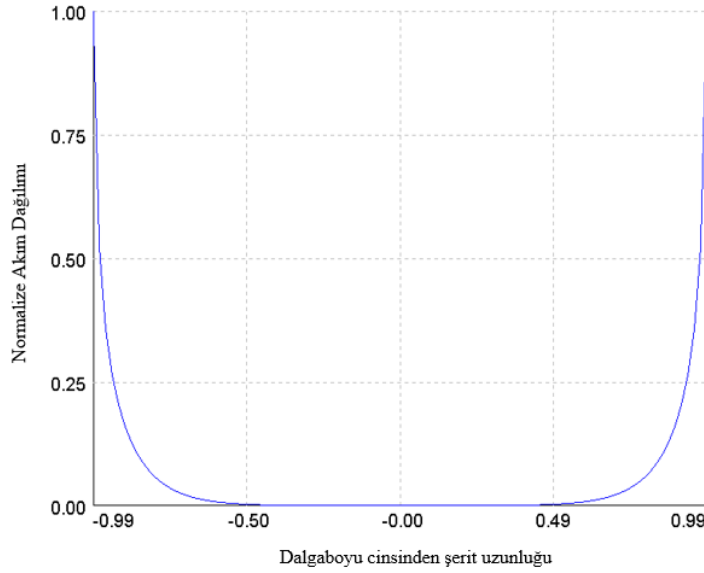
Burada sayı dizisi  $\{q_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_2$ , ve operatör  $c$ 'nin matris  $\{c_{kn}\}_{k,n=0}^{\infty}$  'in  $l_2$  ve  $l_2$  arasında kesin sürekli olarak çalışması sonucunda elde edilmesi gösterilmektedir. Bu nedenle sonlu boyutlu bir operatör tarafından yaklaşık olarak tahmin edilebilir. S.D.C.D. indirgeme yöntemi kullanılarak çözülebilir durumdadır.

### 3. NÜMERİK SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

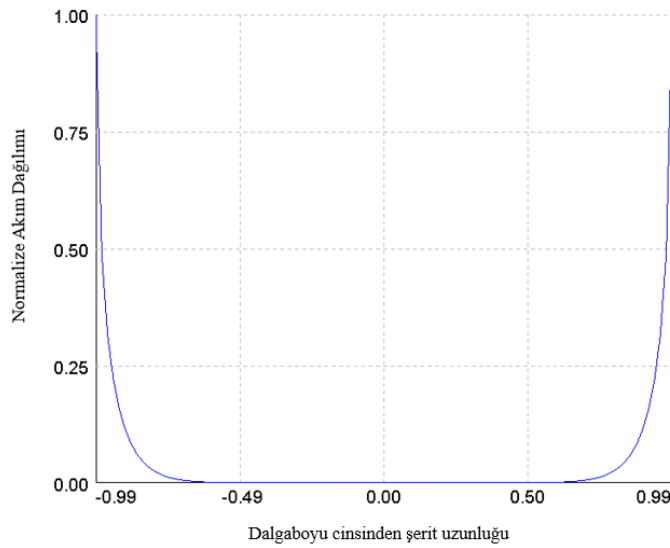
Bu kısımda S.D.C.D. Eş. 23'ün değişik  $\varepsilon$  değerleri için çözülmesi ile elde edilen sonuçlar paylaşılmaktadır. Şekil 1 içerisinde  $\varepsilon=20$  için şerit üzerinde normalize edilmiş akım dağılımı gösterilmiştir. Şekil 1'de dikey eksen akım yoğunluğunun normalize edilmiş halini göstermektedir. Yatay eksen ise, dalga boyu cinsinden şerit uzunluğunu

göstermektedir. Grafikler incelendiğinde, normalize akım yoğunluğunun şeridin kenar noktalarında en yüksek değere ulaştığı görülmektedir. Çalışmada çıkarılan integral denklemleri üzerinden yapılan hesaplamanın,  $\varepsilon=20$  için beklenen kenar şartlarını sağladığı görülmektedir.

Benzer şekilde Şekil 2 içerisinde  $\varepsilon=30$  için şerit üzerinde normalize edilmiş akım dağılımı gösterilmiştir. Dikey eksenin akım yoğunluğunun normalize edilmiş halini gösterdiği, yatay eksenin ise, dalga boyu cinsinden şerit uzunluğunu gösterdiği bu grafikte normalize akım yoğunluğunun  $\varepsilon=30$  için şeridin kenar noktalarında en yüksek değere ulaştığı görülmektedir. Her iki durumda da akım grafiğin şeridin kenarlarında maksimum değerlere ulaştığı ve beklenen kenar şartlarını sağladığı görülmektedir.



Şekil. 1  $\varepsilon=20$  için şerit üzerindeki akım dağılımı  $\rho(\alpha)$  (Current distribution  $\rho(\alpha)$  on the strip for  $\varepsilon=20$ )



Şekil. 2  $\varepsilon=30$  için şerit üzerindeki akım dağılımı  $\rho(\alpha)$  (Current distribution  $\rho(\alpha)$  on the strip for  $\varepsilon=30$ )

Elde edilen sonuçların Neumann serisi sonuçları ve Barkeshli ve Volakis'in [23] elde ettiği sonuçlar ile karşılaştırılması sonucu, şeridin kenar noktalarında akım yoğunluğunun en yüksek değere yükseldiğinin, şeridin orta noktasında ise akım yoğunluğunun sıfıra düştüğünün integral denklemler üzerinden gösteriminin sağlandığı belirlenmiştir.

#### 4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

İki boyutlu integral denklemlerin nümerik ve analitik yöntemler kullanılarak çözümlenmesi, uzaktan algılama, plazma fiziği, görüntü işleme, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve kırınım teorisi vb. mühendislik alanlarında çoğunlukla karşılaşılan sorunlardan biridir. Bu denklemlerin farklı yöntemler ile çözülmesinde, üzerinde çalışılan cisimlerin elektriksel boyutları ve geometrik yapılarının karmaşıklığı önem kazanmaktadır.

Bu makalede kusursuz elektrik iletken şeritlerde düzlem elektromanyetik dalga problemlerinin iki boyutlu integral denklemler kullanılarak çözümlenmesi için efektif bir çözüm önerisi sunmuştur. Önerilen denklem çözümlerinin büyük elektriksel geçirgenlik değerleri için şeritler üzerindeki akım dağılımı incelenmiştir. Akım değerlerinin şeritlerin kenarlarında maksimum değerlere ulaştıkları görülmektedir.

Problem formülasyonu bölümünün girişinde verilen ve kırınım teorisinin farklı iç ve dış problemlerinin ifade edilebilmesi için kullanılan integral denklem, bu çalışma boyunca logaritmik çekirdek farkı ve ortagonal polinomlar yöntemleri ile ele alınmıştır. Bu denklem formu ile ifade edilemeyen problemler için, bu çalışmada önerilen yöntem kullanılmamaktadır. Çalışmada önerilen yöntemin elde edilmesinde kullanılan bilinmeyen fonksiyon  $\rho(\xi)$  doğrudan bu denklem formunun bir alt parametresi konumundadır.

Bu elde edilen değerlerin önceki çalışmalar ile kıyaslanması sonucu, önerilen integral çözümünün kırınım teorisinde iki boyutlu problemlerin çözümünde efektif bir yöntem olarak kullanılabilirliği görülmektedir.

#### KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Tüysüz B., Development of semi-real time multi-frequency band supported passive radar system for aerial target detection, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 34 (1), 191-200, 2019.
2. Kıvanç Ö., Mungan T., Atila B., Tosun G., An integrated approach to development of unmanned ground vehicle: design, analysis, implementation and suggestions, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 34 (4), 1957-1974, 2019.
3. Rajan, D., Chaudhuri, S., Simultaneous Estimation of Super-Resolved Scene and Depth Map from Low Resolution Defocused Observations, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell, 25, 1102–1117, 2003.
4. Basdemir, H. D., Scattering Of Plane Waves By A Rational Half-Plane Between DNG Media, Optik, 179, 47–53, 2019.
5. Veliyev, E. I., V. Tabatadze., K. Karacuha., and E. Karacuha, The Diffraction By The Half-Plane With The Fractional Boundary Condition, Progress In Electromagnetics Research M, 88, 101–110, 2020.
6. Karacuha, K., E. I. Veliyev., V. Tabatadze., and E. Karacuha., Analysis Of Current Distributions And Radar Cross Sections Of Line Source Scattering From Impedance Strip By Fractional Derivative Method, Advanced Electromagnetics, 8 (2), 108–113, 2019.
7. Karacuha, K., V. Tabatadze., and E. I. Veliyev., Plane Wave Diffraction By The Strip With An Integral Boundary Condition, Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences, 28 (3), 1776–1790, 2020.
8. Li, X.F., ve Rong., E.Q. Solution of A Class of Two-Dimensional Integral Equations, J. Comput. Appl. Math., 145, 335–343, 2002.
9. Atkinson, K.E., The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind, Cambridge University Press, 1997.
10. Kaliberda, M., Lytvynenko, L., Pogarsky, S., Method Of Singular Integral Equations In Diffraction By Semiinfinite Grating E-Polarization Case. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Science, 26 (5), 2406-2416, 2018.
11. Mstislav E. Kaliberda, Leonid M. Lytvynenko & Sergey A. Pogarsky. Singular Integral Equations In Diffraction Problem By An Infinite Periodic Strip Grating With One Strip Removed, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 30, 1-16, 2016.
12. Assari, P., Adibi, H., Dehghan, M., A Meshless Method For Solving Nonlinear Two-Dimensional Integral Equations Of The Second Kind On Non-Rectangular Domains Using Radial Basis Functions With Error Analysis, Journal of Computational and Applied Mathematics, 239, 72-92, 2013.
13. Aydin, E. A., ve İkiz, T., An Approximate Solution for The Plane Wave Diffraction by an impedance strip: H-Polarization Case. Tehnicki Glasnik-Technical Journal, 10 (3-4), 79-97, 2016.
14. Ishimaru, A., Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering: From Fundamentals to Applications. Hoboken, NJ, USA: John Wiley and Sons, 2017.
15. Veliyev, E. I., Karacuha, K., Karacuha, E., and Dur, O., The Use of the Fractional Derivatives Approach to Solve the Problem of Diffraction of a Cylindrical Wave on an Impedance Strip, Progress In Electromagnetics Research Letters, 77, 19-25, 2018.
16. Honl, H., Maue A.W., ve Westpfahl, K., Theorie der Beugung, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
17. Shestopalov, V.P., Series Equations in Modern Diffraction Theory, Naukova Dumka, Kiev, 1983.
18. Popov, G. Y., Concentration of Elastic Tensions Near Stamps, Cuts, Thin Inhomogeneities and Supports, Nauka, Moscow, 1982.

19. Aleksandrov V.M., ve Mkhitarian, S.M., Contact Problems for Bodies with Thin Substrates and Superstrates, nauka, Moskow, 1983.
20. Aleksandrov V.M., ve Kovalenko, E.V., Continuous Media Mechanics Problems with Mixed Boundary Conditions, Nauka, Moskow, 1986.
21. Mittra R., ve Lee, S.W., Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, McMillan Co., NY, 1971.
22. Kress, B., Linear Integral Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
23. Barkeshli K., and Volakis, J. L., Electromagnetic scattering from thin strips—Part I: Numerical Solution For Strips of Arbitrary Size, IEEE Transactions on Education, 47 (1), 100–106, 2004.