

# ÇİZGE KURAMININ ORTAÖĞRETİM MATEMATİK DERSİ MÜFREDATINA EKLENMESİ

Nermin YILMAZ ÇİLİNGİR \* (ORCID: 0000-0003-2349-7892)

## ÖZET

Çizge kuramı, güncel araştırmalarda bilim insanları tarafından tercih edilen, disiplinler arası, oldukça önemli bir kuramdır. Matematik, mühendislik, sağlık, biyoloji, kimya, nöroloji, sosyoloji, edebiyat, tarih, mimarlık, istatistik, ekonometri gibi pek çok alanda, problemlerin çözümünde uygulanmaktadır. Çizge kuramı konusu, Türkiye’de ortaöğretim matematik dersi müfredatında bulunmamaktadır. Bu makale, çizge kuramı konusunun müfredata dahil edilmesinin sağlayacağı faydaları ele alır. Araştırma, nitel olarak, belge inceleme yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Makalede konu ile ilgili çalışmalar hakkında kısa bilgiler bulunur. Ayrıca, Türkiye’de çizge kuramı konusunun ortaöğretim ile ilişkisi araştırılmıştır. Çalışmada, çizge kuramını lise öğrencilerine öğretme deneyimine sahip iki eğitmenin görüşlerine yer verilmiştir. Ortaöğretim matematik öğretmenlerine, anket aracılığıyla konu hakkındaki düşünceleri sorulmuştur. Elde edilen verilere göre, çizge kuramının, üniversite öncesinde öğretilmesinin faydalı olabileceği sonucuna varılmıştır. Bu çalışma, Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı’na ve öğretim programlarının belirlenmesine katkıda bulunan komisyon üyelerine yönelik bir öneri niteliğindedir.

**Anahtar Kelimeler:** Çizge Kuramı; Müfredat; Milli Eğitim Bakanlığı; Program Geliştirme; Ortaöğretim; Ayrık Matematik.

## ABSTRACT

Graph theory is an interdisciplinary, highly important theory preferred by scientists in current research. It is applied in solving problems in many fields such as mathematics, engineering, health, biology, chemistry, neurology, sociology, literature, history, architecture, statistics, econometrics. The graph theory subject is not included in the secondary

education mathematics course curriculum in Turkey. This article discusses the benefits of including the graph theory subject in the curriculum. The research was carried out qualitatively, using the document analysis method. The article contains brief information about the studies on the subject. In addition, the relationship between graph theory and secondary education in Turkey has been investigated. In the study, the opinions of two teachers who have experience in teaching graph theory to high school students were included. Secondary school mathematics teachers were asked about their opinions on the subject through a questionnaire. According to the data obtained, it was concluded that it might be beneficial to teach graph theory before university. This study is a proposal for the Ministry of Education Board of Education and the commission members who contribute to the determination of the education programs.

**Keywords:** Graph Theory; Curriculum; Ministry of Education; Program Development; Secondary Education; Discrete Mathematics.

## 1.GİRİŞ

Öğretim programları (müfredatlar), bilimsel gelişmelerin izinde, güncel ve çağa uygun olmalıdır. Bu sebeple Millî Eğitim Bakanlığı bünyesinde Öğretim Programlarını İzleme ve Değerlendirme Sistemi vardır. Program geliştirme sürecinde, ilgili bakanlık birimlerinden temsilciler, eğitim uzmanları, öğretmenler ve akademisyenler dahil edilerek oluşturulan komisyonlar, gerekli işlemleri yürüterek müfredatların gelişimini ve değişimini sağlar. Bu araştırma, müfredatın gelişimine katkıda bulunmak ve ortaöğretim matematik müfredatına çizge kuramı konusunun eklenmesini önermek için yapılmıştır.

Çizge kuramı, pek çok bilim dalında başvurulan önemli bir kuramdır ve var olan bir problemin tanımlanmasında, modellenmesinde, çözümünde değerli katkılar sağlar (Baydemir, 2020). Çizge kuramı hakkında yazılan ilk Türkçe kitap olan: Çizge Kuramı Üzerine Kısa Bir İnceleme ’de, yazar Doç. Dr. Yurdakul Ceyhun, önsöz bölümünde, hedef okuyucu kitlesini, sadece elektrik mühendisleri

\* Nermin YILMAZ ÇİLİNGİR, 20202109015@ogr.msgsu.edu.tr, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Enformatik Bölümü

değil, soyut düşünmeye ilgili, bulmaca çözmeyi seven kişiler olarak nitelendirmiştir. Ceyhun'un bu kitabı yazma amacı: çizge kuramını tanıtmak, sevdirmek ve okuyucularına somut sorunları için çözüm buldurmaktır (Ceyhun,1976). Benzer şekilde,

Literatürde çizge kuramının eğitimle ilişkilendirilmesi üzerine çalışmalar mevcuttur. Bunlardan biri Daniel Lessner'in yazdığı "Lise Eğitiminde Çizge Kuramı (Graph Theory in High School Education)" adlı makaledir. Bu makalede, çizge kuramının Çekya'da lise müfredatına dahil edilmesi önerilir. Tüm lise derslerinde, çizgelerin sezgisel bir şekilde kullanılmakta olduğunu yazan Lessner, öğrencilerin, derslerde karşılaştıklarının ardındaki birleştirici teorilerden habersiz olduklarını belirtir. Bu durum, öğrencilerin, herhangi bir bilgi veya beceriyi farklı bir alanda kullanabilme yeteneklerini sınırlayacaktır (Lessner, 2011). Bir başka çalışmada, Gaio ve arkadaşları, herhangi bir görevin, tamamen olmasa da en azından bir kısmının, ilkökul çağındaki öğrencileri soyutlama yeteneği açısından teşvik edip edemeyeceğini öğrenmek için bir çalışma yaparlar. Bu çalışmada, ilkökul öğrencilerine yönelik, çizge kuramı temelli bir matematik etkinliği hazırlamıştır. Etkinliğin bir kısmı, Gerçekçi Matematik Eğitimi yaklaşımı kapsamında, öğrencilerin fiziksel olarak dahil olacakları bir açık hava etkinliği olarak tasarlanmıştır. Makalede, matematik ve bilgisayar bilimleri öğretmenlerinin, çizge kuramının düşük sınıf düzeylerinde kullanılma olasılığını, uzun zamandır inceledikleri belirtilmiştir (Gaio, Branchetti ve Capone, 2020). Çizge kuramı konusu benzer bir çalışma ile okul öncesi sınıflarının etkinliklerine dahil edilebilir.

Dünyanın en büyük matematik eğitim organizasyonu olan Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM), Okul Matematiği için Prensipler ve Standartlar (Principles and Standards for School Mathematics) adlı yayınında, ayrı matematik ve çizge kuramının önemine şu şekilde değinmiştir: "Çağdaş matematiğin iş ve endüstride yaygın olarak kullanılan aktif bir dalı olarak ayrı matematik, okul matematiği müfredatının ayrılmaz bir parçası olmalıdır ve bu konular doğal olarak matematiğin diğer dallarında da ortaya çıkar.". Ayrı matematik üç önemli alanından birinin çizgeler olduğu ve bu konuların okul öncesi düzeyden itibaren 12. sınıfa kadar sistematik olarak geliştirilebileceği belirtilmiştir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). NCTM'nin web sayfasında "çizge kuramı" aramasıyla çıkan 2020 yılına ait 11 adet içerik sonucundan 10 tanesi ortaöğretim ile ilgilidir (NCTM, 2020). Buradan çizge kuramının ortaöğretim ile ilişkisinin önemiyle ilgili bir çıkarım yapılabilir. NCTM, çizge kuramının dahil olduğu ayrı matematik dersinin müfredata alınması konusunda teşvik edici bir role sahiptir. Debellis ve Rosenstein, öğretmenlerin bu konuda gösterecekleri çaba ile

bu makale de çizge kuramının lise öğrencilerine tanıtılmasını, sevdirmesini hedefler ve bu sebeple ortaöğretim matematik müfredatına dahil edilmesini önerir.

matematiği sadece formülleri ve teknikleri hatırlamak olarak değil, problem çözme ve akıl yürütme faaliyetleri şeklinde görebileceklerini belirtir (Debellis ve Rosenstein, 2004). Çizge kuramının Türkiye'de ortaöğretim müfredatına eklenmesinde de öğretmenlerin gayreti önemli ve gereklidir.

NCTM, ortaöğretim öğrencilerinin öğrenmesi gereken beş standardı: problem çözme, iletişim, muhakeme, bağlantı ve temsil olarak tanımlamıştır. Çizge kuramının bu standartları kapsadığına dikkat çeken Asghari ve arkadaşları, çizge kuramının öğretilmesiyle, öğrencilerin belirtilen standartlardaki kazanımlara sahip olabileceklerini düşünmüşlerdir ve bu doğrultuda etkinlikler hazırlamışlardır (Asghary, Shahvarani, ve Haghghi, 2012).

Çizge kuramı, ayrı matematik bir konudur. Hart ve Martin'e göre ayrı matematik, 21. yüzyıl okul müfredatı için temel matematiktir. Çalışmalarında ayrı matematik alanına dahil olan beş problem türüne değinmişlerdir ve bunlardan biri çizge kuramı ile ilgilidir. Problem çözme, modelleme, düşünme becerilerini geliştirme gibi hususlarda ayrı matematik konularının faydalarına dikkat çekmişlerdir. Ayrıca ayrı matematik, temel çağdaş problemleri modellemek ve çözmek için güçlü bir araç olduğunu belirtirler (Hart ve Martin, 2018). Gaio ve Paola, araştırmalarında çizge kuramı konusunun da bulunduğu ayrı matematik konularının İtalya'da işlenmesini ele alarak bir anket çalışması yapmışlardır (Gaio ve Paola, 2018).

Hart ve Sandefur, çizge kuramının, matematiksel modellemeye, tartışmaya ve gerçeklikle bağlantı kurmaya yönelik yaklaşımlara izin vermesinden dolayı, okul öğretiminde bulunmayı hak ettiğine inanırlar. Ferrarello ve Mammana da benzer şekilde, Sicilya'da bazı okullarda, ilkökul, ortaokul ve lise düzeyindeki öğrencilerle deneysel bir öğretim gerçekleştirmişlerdir. Bu deneyde çizge kuramını tanıtmak için her düzeye göre ayrı ayrı hazırladıkları içeriği öğrencilere sunmuşlardır (Ferrarello ve Mammana, 2018). Santoso ise, çalışmasında Endonezya'da ortaöğretimde çizge kuramının olmadığını fakat çizge kuramının çeşitli etkinliklerle öğrencilere tanıtılmasının faydalı olabileceğini belirtmiştir. Santoso, çizge kuramının, eleştirel düşüncenin gelişimi için ilköğretim ve lise öğrencilerine faydalı olacağını düşünmektedir (Santoso, 2018).

Amerika Birleşik Devletleri'nde bazı okullar, öğrencilerini ayrı matematik dersi dahilinde çizge kuramı konusu ile tanıştırmışlardır. Örneğin, çizge kuramı, 1996'dan itibaren New Jersey Matematik Standartları'na dahil edilmiştir. 2007'de New Jersey

için önerilen ayrıık matematik standartları, NCTM tarafından önerilen matematik konularından da içermektedir (Rosenstein, 2018). 2007’de New Jersey için önerilen ayrıık matematik standartlarına ait tablosunda çizge kuramı ile ilgili olan konular Tablo 1’deki gibidir. Fakat çizge kuramı, ulusal bir müfredatın planlandığı Ortak Çekirdek (Common Core) döneminde neredeyse hiç bulunmamaktadır.

Seviye	Konu
3. sınıf	Somut çizge örneklerinde kenarların bulunması En az sayıda renk kullanılarak haritaların boyanması (ör. New Jersey ilçeleri)
5. sınıf	Problem çözüme durumlarının çizgelerin kullanılmasıyla temsil edilmesi ve bir çizgenin herhangi bir düğümünün derecesinin (bitişik düğümlerinin sayısının) belirlenmesi. Rasgele bir düğümden, başka bir düğüme gidilebilir mi? Bir düğümden diğerine kaç farklı yol vardır?
7. sınıf	Problemlerin temsil edilmesi ve problemlere makul çözümler bulunması için çizgelerin kullanılması: Haritadaki bir sahadan diğerine giden rota Belirtilen yerlerde duran teslimat rotası Bir kenarı tekrarlamadan tek bir çizgi ile bir çizge çizme Proje toplantılarını planlama (çatışmaları önlemek için) çizge renklendirme kullanma
8. sınıf	Sorunlara çözüm bulunması için çizgelerin ve algoritmik düşünmenin kullanılması: Belirli siteleri birbirine bağlayan en kısa ağı bulma Haritadaki bir yerden diğerine en kısa seyahat rotasını bulma Her düğümü tam olarak bir kez ziyaret eden düşük maliyetli bir devre bulma
Lise	Pratik problemlerin temsili ve çözülmesi için çizgelerin ve algoritmik düşünmenin kullanılması: Bir çizgede her kenarı yalnızca bir kez içeren bir devre var mı (ör: teslimat yolları)? Bir çizgedeki her tepe noktasını yalnızca bir kez içeren bir devre var mı? Kritik yol analizi

Tablo 1. 2007’de New Jersey için önerilen standartlarda çizge kuramı (Rosenstein, 2018).

New Jersey müfredatında çizge kuramının varlığıyla ilgili güncel durumun ne olduğu konusunda bilgi almak için 28 Ocak 2021 tarihinde, Matematik Profesörü Joseph G. Rosenstein ile e-posta aracılığıyla iletişime geçildi. Kendisinin verdiği

bilgi, İngilizce’den şu şekilde çevrilmiştir:

“ABD’de 10 yıldan daha fazla bir süre önce ülke çapında bir dizi standart kabul edildiğinden beri, çizgeler ve uygulamaları ABD okullarında matematik müfredatından kaldırıldı. Eğer bir öğretmen konuyu dersine dahil etmek için inisiyatif almadıkça, müfredatta çizge kuramı olmayacaktır. Bu New Jersey’de olduğu gibi ABD genelinde de geçerlidir.

Ulusal standartları değiştirmek için toplu bir çaba yoktur ve bir süre daha olmayacaktır, çünkü şimdiki odak noktası, öğrencilerin okullara nasıl güvenli bir şekilde döneceğinin çözülmesidir ve bu sorun sağlık sorununun çözülmesine bağlıdır.

Lise öğrencilerine yönelik (new-math-text.com) ‘Ayrıık Matematik ile Problem Çözme ve Akıl Yürütme’ adlı bir ders kitabı yayınladım, ancak henüz ABD’deki herhangi bir okulda kullanılmıyor; belki birkaç yıl içinde bu durum değişecek.”

Rosenstein’in ayrıık matematiğın ve dolayısıyla çizge kuramının okul müfredatlarında bulunmasıyla ilgili gelecekte umutlu olması ve ilgili bir kitap yazması konunun önemine olan inancının bir göstergesidir.

Amerika Birleşik Devletleri Tennessee eyaletinden Smithers, Ortaöğretim Sınıfı için Çizge Kuramı (Graph Theory for the Secondary School Classroom) adlı yüksek lisans tezinde, bir öğretim deneyi gerçekleştirdi. Üniversitede öğrendiği çizge kuramını çok seven Smithers, bu konuyla daha önce tanışma fırsatına sahip olmayı düşledi ve bu düşü lise öğrencileri için gerçekleştirmeye karar verdi. Bir lise sınıfında öğretmenle iş birliği içinde yürüttüğü çalışmanın sonucunda, öğrencilerden aldığı geri bildirimler son derece olumludur. Öğrenciler en çok köşe renklendirmeyi sevdiklerini belirtmiştir (Smithers, 2005).

Almanya’da 16 federal devlet vardır ve her birinde eğitim sistemi farklıdır. Araştırmada tüm müfredatlar incelenmemiştir fakat, çizge kuramının izlerine rastlanmıştır. Örneğin, Baden-Württemberg eyaletinin birleşik okullarının ortaöğretim müfredatında 8. sınıf öğrencileri, çizge kuramı konusunu işler (Baden-Württemberg Eğitim Planları). Avustralya’ya bakıldığında, Avustralya Müfredatı adlı resmi web sitesinde, Kıdemli Ortaöğretim Müfredatı’nda, Genel Matematik bölümünün üçüncü ünitesinde çizge kuramı konusunun yer aldığı görülür (Avustralya Müfredatı, 2020). Detaya erişilemeye de Fransa’nın müfredatlarında da çizge kuramı konusunun varlığı bilinmektedir. Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Teşkilatı (Organisation for Economic Co-operation and Development-OECD), Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (Programme for International Student Assessment - PISA) test sonuçlarını yayınlamıştır. Bu sonuca göre Almanya,

Avustralya ve Fransa matematik alanında ortalamasının üzerinde olan ülkelerdendir. Milli Eğitim Bakanlığı Öğretim Programlarını İzleme ve Değerlendirme Sistemi'ne göre, taslak öğretim programlarını geliştirme kriterlerinden biri, uluslararası karşılaştırmaların yapılması ve farklı eğitim sistemlerinin analiz edilmesidir. Ayrıca, PISA sonuçlarına değer verdiklerini özellikle belirtmişlerdir (Millî Eğitim Bakanlığı Öğretim Programlarını İzleme ve Değerlendirme Sistemi). Çizge kuramının müfredata dahil edilmesi fikri, bu açıdan da olumlu bir şekilde değerlendirilebilir.

Türkiye'de devlet okulundan mezun olan bir öğrenci eğer istisnai bir durum yoksa, çizge kuramı ile en erken üniversitede tanışır. Bu tanışma, eğer alanı ya da araştırma konusu çizge kuramı ile kesişirse gerçekleşir. Oysaki, öğretim programlarını geliştirme çalışmalarında önemsenen kriterlerden biri: öğrencilerin bir üst öğrenim kurumuna geçtikleri zaman sahip olmaları gereken becerileri onlara kazandırmaktır. Çizge kuramını lisede öğrenen bir öğrenci, üniversitede alanı ne olursa olsun, çalışmalarında çizge kuramını kullanabilir. Bu sebeple çizge kuramının erken yaşlarda tanıtılması gelecek için önemli faydalar sağlayacaktır. Gupta (2015), pek çok bilimsel alanda yer alan çizge kuramının önemine dikkat çekmiş, hayati değeri olan uygulamalarından söz etmiştir. Örneğin 2012 yılında, L. Shapley ve A. E. Roth, Nobel Ekonomi Ödülünü kazanmışlardır ve kararlı eşleşme kuramını, bağışlanan böbreklerin uygun hastalarla eşleştirilmesi probleminde uygulamışlardır (Ekim, 2020). Kararlı eşleşme kuramı çizgelerle ilgilidir. Dafik ve arkadaşları ise, bilimsel çalışmalarda kullanım sayısının hızla arttığı çizge kuramının, 21. yüzyılda çok daha önemli olan üst düzey düşünme becerilerinin yükselmesi için bir tetikleyici olabileceğini vurgulamıştır (Dafik, Agustín, Alfarisi, Kurniawati, 2020).

Türkiye'de çizge kuramı konusunun ortaöğretim müfredatı ile ilişkisine bakıldığında, kuramın matematik müfredatlarına dahil edildiği iki yer olduğu görülmüştür: Robert Koleji, Bilim ve Sanat Merkezleri.

Robert Koleji'ne göre, seçmeli ders olarak sunulan ayırık matematik dersi Türkiye'de sadece Robert Koleji'ndedir ve bu derste çizge kuramı öğretilmektedir (Robert Koleji). Ağustos 2020'de hazırlanan Bilim ve Sanat Merkezi Matematik Dersi Öğretim Programı'ndaki, Matematik Tarihi ve Felsefesi, Matematik ve Bilgisayar, Oyun Teorisi, Çizge Teorisi ve Topoloji adlı modüllerde çizge kuramı konusu geçmektedir. Matematik Tarihi ve Felsefesi modülünde kısaca ele alınmıştır; diğer iki modülde ise detaylı alt başlıklarla bulunmaktadır. Çizge kuramını içeren söz konusu modüller Özel Yeteneklerini Geliştirme Programı 2 (ÖYG 2) düzeyi için yazılmıştır.

Türkiye'de çizge kuramı ile ilgili seminer ya da yaz

okulu şeklinde düzenlenen ortaöğretim düzeyindeki etkinliklerin varlığı ve kalitesi dikkat çekicidir:

Matematiğe gönül veren kişilerden oluşan 'Matematiğin Peşinde' adlı topluluğun düzenlediği etkinliklerden biri, Boğaziçi Üniversitesi'nden Tınaz Ekim'in verdiği "Çizge Kuramı: Matematiksel Oyunlardan Hayat Kurtaran Çözümlere" başlıklı seminerdir. Bu seminer, 15 Şubat 2020 tarihinde Galatasaray Lisesi'nde gerçekleştirilmiştir (Matematiğin Peşinde). Ekim: "Bir çoğunuz belki yepyeni bir şeyden bahsedeceğimi düşünüyorsunuz. Hiç öyle değil, aslında çok aşina olduğunuz bir kavram; günlük yaşamınızda çeşitli alanlarda karşılaştığınız bir kavram çizge" demiştir (Çizge Kuramı Tınaz Ekim, Seminer). Gerçek hayat problemlerinin çözümünde kullanılan çizge kuramı, öğrencilerin ilgisini çekmenin yanı sıra eğitime etkin öğrenme açısından da nitelik kazandırır.

Nesin Matematik Köyü, lise öğrencileri için açılan yaz okullarının amaçlarından birini: "Daha önce muhtemelen görmedikleri bir matematik göstererek gençlere lisede gördükleri matematiğin dışında olağanüstü güzel bir dünyanın varlığını hissettirmek" olarak belirtmiştir (Nesin Matematik Köyü). 2008, 2009, 2011, 2012, 2013, 2014, 2016, 2017, 2019, 2020 yıllarında Nesin Matematik Köyü programlarında çizge kuramı konusu yer almıştır (Nesin Matematik Köyü Tüm Etkinlikler). Nesin Matematik Köyü Lise Yaz Okulları programına göre Ağustos 2021'de Boğaziçi Üniversitesi'nden Doç. Dr. Özlem Beyarslan, lise öğrencileri için çizge kuramı konusunu işleyecektir (Nesin Matematik Köyü Lise Yaz Okulları). 2014 yılında, çizge kuramının anlatıldığı dersin başında bir öğrencinin "Bunu neden öğreniyoruz?" sorusu üzerine dersi veren Matematikçi Salih Durhan: "...hayatın kendisi ile ilgili baya bir şey söyleyeceğiz, ilginç uygulamalar yapacağız." şeklinde cevap verip, ardından çizgelerin başka türlü bir düşünme yeteneği gerektirdiğini söylemiştir. Bu da düşünme becerilerinin geliştirilmesi anlamını taşır (Çizgeler Kuramı 1.1).

Bilkent Üniversitesi, 2012 yılında, Lise öğrencileri için Matematik Yaz Kampı kapsamında çizge kuramı konusunu işlemiştir (Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü).

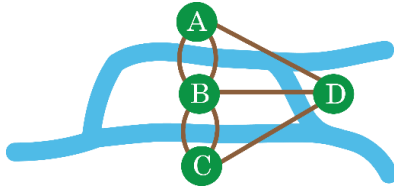
TÜBİTAK tarafından gerçekleştirilen 51. Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması'nda, İzmir Özel İzmir Bahçeşehir Koleji Ellinci Yıl Fen ve Teknoloji Lisesi öğrencisi Olcay Oransoy, çizge kuramı ile ilgili olan "Çizgelerin Kesme Sayısı (Crossing Number) İçin Dinamik Bir Kesin Algoritma Önerisi" adlı projesiyle Matematik alanında birinci olmuştur (TÜBİTAK 2020 Yılı Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Sonuçları).

Çizge kuramı, lise öğrencilerine yönelik TÜBİTAK Türkiye Ulusal Bilgisayar Olimpiyatları 1. Aşama Sınavı Müfredatında ayrı bir alt başlık olarak bulunmaktadır ve makaledeki konu başlıkları bu müfredattan alınmıştır (TÜBİTAK, Türkiye Ulusal Bilgisayar Olimpiyatları 1. Aşama Sınavı Müfredat ve Kaynaklar).

Çizge kuramı oldukça geniş ve detaylıdır. Bu çalışmada, lise öğrencilerine aktarılacak üzere konuyla ilgili temel başlıklara yer verilmiştir.

## 2.ÇİZGE KURAMI

18. yüzyılda, Doğu Prusya'nın başkenti Königsberg'de, Pregel nehri üzerinde bulunan yedi köprü için bir soru düşündü: "Aynı köprüden iki kez geçmemek koşuluyla tüm köprülerden birer kez geçilen bir yürüyüş yolu mümkün mü?". Önde gelen bilim insanlarından Leonard Euler, 1735 yılında bu soruyu cevaplamıştır ve böyle bir yol olamayacağını ispatlamıştır. Bu da çizge kuramının başlangıcı kabul edilir. Şekil 1'de Königsberg Köprülerinin çizge ile temsili görülmektedir.



Şekil 1. Königsberg Köprülerinin çizge ile gösterimi

Çizge kuramında ağ yapısı, düğüm (köşe) ve bunlar arasındaki bağlantıları gösteren kenarlardan oluşur. Bu temsil, farklı sistemleri incelemek için ortak bir dil sunar (Barabási, 2015).

Çizge kuramında, varlıklar ve aralarındaki ilişki, görsel bir şekilde, düğümler ve kenarlar ile temsil edilir. Bu teoride, gerçek bir hayat probleminin çizge ile modellenmesi amaçlanır (Şeker, 2015).

Çizgeler, her zaman gözle görülmesi de hayatın her anında mevcuttur. Örneğin Brown ve arkadaşları, gerçekleştirdikleri nörolojik bir araştırmada, beyin bağlantılarını üç boyutlu olarak modelleyerek beyin içinde gerçekleşen reaksiyonları ve beyindeki bağlantıları çizge ile göstermişlerdir (Brown, Rudie, Bandrowski, Horn ve Bookheimer, 2012).

Ulaşım açısından bakıldığında, çizge kuramının etkilerine sıklıkla rastlanabilir. Örneğin hava yolu şirketlerine ait uçuş noktaları ve bağlantıları, uçuş noktaları haritası adıyla çizge şeklinde görselleştirilir.

### 2.1. Tanım

Bir çizge, boş olmayan bir köşe (düğüm) ve bir kenar dizisinden oluşur (Rosen, 2019).

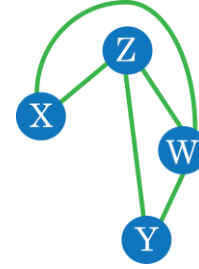
$G = (V, E)$   
G: çizge (graph)  
V: düğüm/köşe (vertex)  
E: kenar (edge)

Şekil 2'deki çizge incelenirse: dört adet düğüm ve beş adet kenar vardır. X, Z, W, Y düğümleri, düğüm dizisinin elemanlarıdır. Kenarlar ise bağladığı düğümler ile ifade edilir. Örneğin X ile Z arasındaki kenar, (X, Z) olarak yazılır. Bu örnekte:

Düğümler,  
 $V = \{X, Z, W, Y\}$

Kenarlar,  
 $E = \{(X, Z), (X, W), (Z, W), (Z, Y), (W, Y)\}$

Çizge,  
 $G = (V, E)$   
 $G = (\{X, Z, W, Y\}, \{(X, Z), (X, W), (Z, W), (Z, Y), (W, Y)\})$

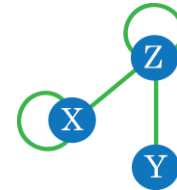


Şekil 2. Çizge örneği

Basit çizge (Simple graph): Her kenarın iki farklı köşeyi birbirine bağladığı ve iki kenarın aynı çift köşeyi birbirine bağlamadığı çizgedir. Şekil 2'deki çizge bu özellikte olduğu için basit çizgedir (Rosen, 2019).

Çoklu çizge (Multigraphs): Aynı köşeleri birbirine bağlayan birden fazla kenara sahip olabilen çizgedir. Örneğin Şekil 1'de A ile B düğümlerini birbirine bağlayan iki adet kenar olması, bu çizgenin çoklu çizge olduğunu gösterir (Rosen, 2019).

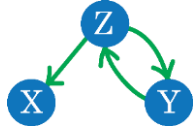
Döngü (Loop): Bir düğümü kendisine bağlayan özel bir kenar türüdür. Şekil 3'te X ve Z düğümlerinde kendilerine geri dönen kenarlar görülmektedir.



Şekil 3. Döngüye sahip bir çizge.

Kenarların durumuna göre çizgeler "yönlü (directed)" ya da "yönsüz (undirected)" olarak adlandırılır. Şekil 2 ve Şekil 3'teki çizgeler, yönsüz çizgeye, Şekil 4'teki çizge ise yönlü çizgeye örnektir.

Burada Z'den X'e bir ulaşım varken, X'ten Z'ye bir ulaşım yoktur. Z'den Y'ye ve Y'den Z'ye ulaşılabilir.



Şekil 4. Yönlü bir çizge.

Eğer bir çizge hem yönlü hem de yönsüz kenarlar içeriyorsa bu çizgeye “karma çizge (mixed graph)” denir.

Sözde çizge (pseudograph): Çoklu çizge, aynı düğümler için birden çok kenara sahip olabilir ancak döngü içeremez. Hem döngüleri hem de çoklu kenarları olan çizgeler için “sözde çizge (pseudograph)” terimi kullanılır (Zwillinger, 2003).

Bir çizgenin türünü, kenarlarının yönlü olup olmadığı, çoklu kenar durumu ve döngü içerip içermediği belirler. Tablo 2’de çizge terminolojisi yer alır.

Çizge Türü	Kenarlar	Çoklu kenar olabilir mi?	Döngü olabilir mi?
Basit	Yönsüz	Hayır	Hayır
Çoklu	Yönsüz	Evet	Hayır
Sözde	Yönsüz	Evet	Evet
Basit yönlü	Yönlü	Hayır	Hayır
Çoklu yönlü	Yönlü	Evet	Evet
Karma	Yönlü ve yönsüz	Evet	Evet

Tablo 2. Çizge terminolojisi (Rosen, 2019).

Derece (degree): Yönsüz bir çizgede, bir düğümün derecesi, kendisine gelen kenarların sayısıdır. V düğümünün derecesi  $deg(v)$  ile gösterilir (Zwillinger, 2003). Şekil 2’deki düğümlerin dereceleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} deg(X) &= deg(Y) = 2 \\ deg(Z) &= deg(W) = 3 \end{aligned}$$

Eğer bir düğümde döngü varsa, döngü özelliğindeki kenar derece hesaplamasına 1 yerine 2 değerliğinde dahil edilir. Şekil 3’teki düğümlerin dereceleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} deg(X) &= 3 \\ deg(Y) &= 1 \\ deg(Z) &= 4 \end{aligned}$$

## 2.2. Çizge Temsil Yöntemleri

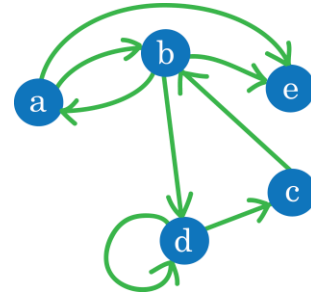
Bir çizgeyi temsil etmenin iki yöntemi vardır: Komşuluk listesi ve komşuluk matrisi.

Komşuluk listesi: Bir çizgedeki her bir düğüme ait komşu düğümlerin belirtilmesidir. Şekil 2’deki çizgenin komşuluk listesi Tablo 3’teki gibidir.

Düğüm	Komşular
X	Z, W
Z	X, Y, W
W	X, Y, Z
Y	Z, W

Tablo 3. Komşuluk listesi örneği

Yönlü bir çizgede komşuluk listesi oluşturulurken, her bir düğüm başlangıç olarak kabul edilerek, ok yönüne göre, o düğümden hangi düğümlere gidilebileceği yazılır. Örneğin Şekil 5’teki çizgeye ait komşuluk listesi Tablo 4’teki gibidir.



Şekil 5. Yönlü çizge örneği.

Başlangıç düğümü (initial vertex)	Son düğümler (terminal vertices)
a	b, e
b	a, d, e
c	b
d	c, d
e	

Tablo 4. Şekil 5’teki çizgeye ait komşuluk listesi

Komşuluk matrisi: Çok sayıda kenarı olan bir çizgenin komşuluk listesi yöntemiyle temsil edilmesi, çizge algoritmalarının gerçekleştirilmesinde zor olabilir. Hesaplamayı basitleştirmek için çizge, matrisle temsil edilebilir (Zwillinger, 2003).

$G = (V, E)$  çizgesi için,  $|V| = n$  yani  $n$  adet düğüm ( $V$ ) olduğu düşünülün ( $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ );

G çizgesine ait komşuluk matrisi A veya  $A_G$  şeklinde ifade edilir ve  $n \times n$ 'lik sıfır-bir matrisi olarak gösterilir. Eğer  $v_i$  ile  $v_j$  komşu ise  $(i,j)$ . girişe 1 (bir), komşu değil ise 0 (sıfır) yazılır. Diğer bir deyişle eğer komşuluk matrisi  $A[a_{ij}]$  ise,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} G \text{ çizgesinin bir kenarı ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Şekil 3'teki çizgenin komşuluk matrisi ile temsil edilmesi şu şekildedir:

Düğümlerin, soldan sağa ve yukarıdan aşağıya sırasıyla W, X, Y, Z olduğu düşünülerek, komşu olan düğümlerin kesişimine 1, olmayanların kesişimine 0 yazılır (Tablo 5).

	W	X	Y	Z
W	0	1	1	1
X	1	0	0	1
Y	1	0	0	1
Z	1	1	1	0

Tablo 5. Komşuluk matrisinin bulunması

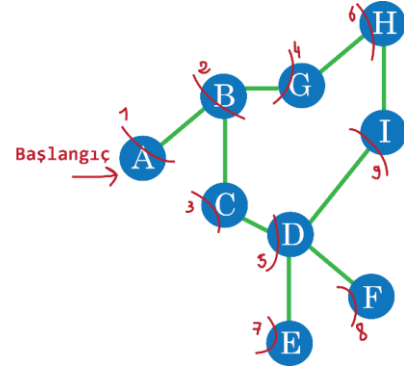
Sonuç olarak verilen çizgeye ait komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir:

$$A[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.3. Genişlik Öncelikli Arama (Breadth First Search)

Bir çizge üzerindeki tüm düğümleri dolaşan arama algoritmalarından biridir. İlk önce çizge üzerindeki düğümlerden rasgele biri, başlangıç düğümü olarak kabul edilir. Bu düğümden başlamak üzere bir dolaşım gerçekleştirilir. Dolaşım da ziyaret edilen düğümler, üzerlerinden tekrar geçilmemek üzere işaretlenir. Dolaşım sırası şu şekildedir: başlangıç düğümü işaretlendikten sonra, onun komşuları ziyaret edilir, daha sonra komşularının ziyaret edilmemiş komşuları...

Şekil 6'da verilen çizgenin genişlik öncelikli arama algoritmasına göre ziyaret sıralaması görülmektedir. Bu aramada önce komşulara daha sonra o komşuların ziyaret edilmemiş komşularına bakıldığı için enlemesine bir ziyaret söz konusudur. Algoritmanın adı buradan gelir. Şekle göre BFS (Breadth First Search) algoritmasına göre dolaşma sıralaması: A, B, C, G, D, H, E, F, I olur. Bu sıralama aynı komşuluk düzeyinde bulunan düğümlerin seçim önceliğine göre değişiklik gösterebilir.

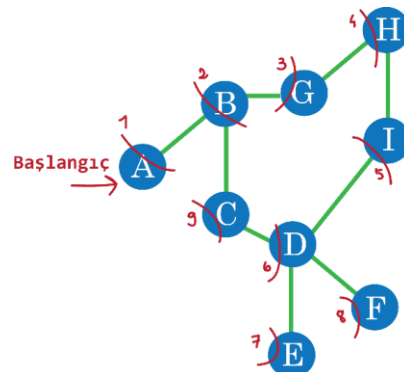


Şekil 6. Genişlik Öncelikli Arama Örneği

### 2.4. Derinlik Öncelikli Arama (Depth First Search)

Çizgelerde tercih edilen arama algoritmalarındandır. BFS'de olduğu gibi, seçilen bir düğüm, başlangıç düğümü olarak kabul edilir. Yine aynı şekilde, ziyaret edilen düğümler, tekrar ziyaret edilmemek üzere işaretlenir. DFS (Depth First Search)'nin, BFS'den farkı, adından anlaşılacağı gibi ziyaret sıralamasının derinlemesine gerçekleşmesidir. Mevcut düğümden gidilebilecek kadar derine gidilir, gidilemeyen yerde önceki düğümlere geri dönülür ve aynı yöntemle ilerlenir.

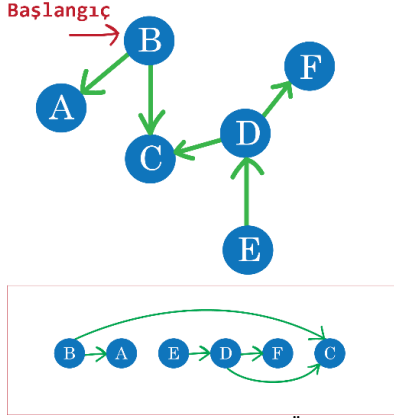
Şekil 7'de, verilen çizgenin derinlik öncelikli arama algoritmasına göre ziyaret sıralaması görülmektedir. Bu sıralama benzer düzeydeki düğümlerden herhangi biri seçilerek oluşturulmuştur. Örneğin A ve B işaretlendikten sonra, B'nin ziyaret edilmemiş komşularından hangisiyle devam edileceği konusunda G seçilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi yedinci sırada ziyaret edilen E düğümünden sonra gidilebilecek komşu yoktur. Bu sebeple algoritma bir üst kademeye yani D'ye döner ve aynı prensiple F'ye ulaşır. F'den sonra da gidilecek düğüm olmadığı için buraya gelinen sıralamanın tersi şekilde bir yol izlenerek ikinci adıma yeni B düğümüne dönülür ve oradan ziyaret edilmemiş olan C düğümü de işaretlenir. Böylece ortaya çıkan dolaşma sıralaması: A, B, G, H, I, D, E, F, C olur.



Şekil 7. Derinlik Öncelikli Arama Örneği

## 2.5. Topolojik Sıralama (Topological Sorting)

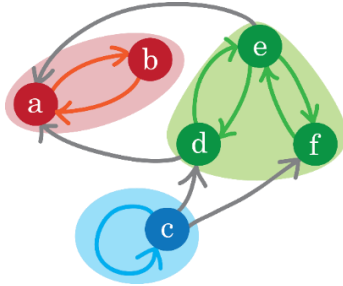
İçerisinde döngü olmayan yönlü bir çizgenin doğrusal olarak sıralanmasıdır. Sıralamada ok yönleri de belirtilir ve daima sağa doğru olacak şekilde gösterilir. Örneğin A'dan B'ye yönlü bir kenar varsa sıralamada A, B'den önce gelir. Bu sıralamada başlangıç düğümü için öncelik, kendisine hiçbir kenar gelmeyen düğümlerdedir. Şekil 8'de bir çizge ve o çizgeye ait topolojik sıralama örneği verilmiştir. Bir çizgenin birden fazla topolojik sırası olabilir.



Şekil 8. Topolojik Sıralama Örneği

## 2.6. Güçlü Bağlı Bileşenler (Strongly Connected Components)

Yönlü çizgelerde bulunan bir bileşenin içindeki her düğüm, aynı bileşendeki diğer tüm düğümlere erişebilir ise bu bileşen güçlü bağlıdır. Şekil 9'da görülen her bir renk kümesi güçlü bağlı bileşendir.



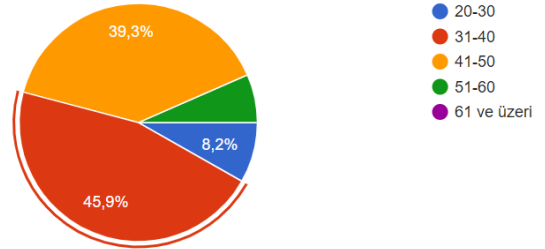
Şekil 9. Güçlü bağlı bileşenlere örnek

## 3. YÖNTEM

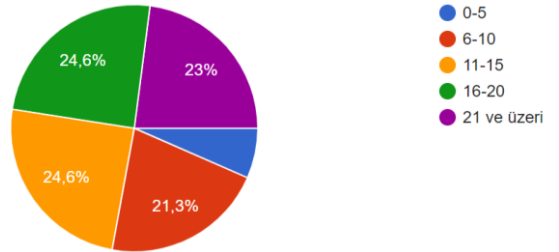
Araştırmada, nitel bir yöntem olan belge inceleme yöntemi gerçekleştirilmiştir. Millî Eğitim Bakanlığı Öğretim Programları İzleme ve Değerlendirme Sistemi'ne ait web sitesinde program geliştirme süreci ile ilgili bilgiler ele alınmıştır. Program geliştirme sürecinde esas alınan ölçütler üzerinde durulmuştur. Türkiye'de Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı tarafından yürütülen müfredat ile ilgili çalışmalarda, dünya çapında yapılan eğitimle ilgili araştırmalara değer verildiği bilinmektedir.

Türkiye'de çizge kuramının ortaöğretim müfredatına eklenmesi önerisinde bulunan bir yayın bulunmamıştır. Fakat uluslararası yapılan araştırmada, eğitim ve çizge kuramının bir arada ele alındığı pek çok örnek görülmüştür ve diğer ülkelerin konuyu nasıl değerlendirdikleri incelenmiştir. Ayrıca diğer ülkelerin müfredatları araştırılmıştır.

Müfredat önerisi ile ilgili araştırmalarda, Talim ve Terbiye Kurulu'nun program geliştirme sürecinde öğretmenlerin fikirlerine de değer vermesi sebebiyle iki adet anket çalışması yapılmıştır. Bunlardan biri: Türkiye'deki lise düzeyinde ders veren matematik öğretmenlerinin çizge kuramı hakkındaki düşüncelerini öğrenmek amacıyla hazırlanan kısa bir ankettir. Çalışmaya 61 ortaöğretim matematik öğretmeni katılmıştır.



Şekil 10. Katılımcıların yaş bilgisi



Şekil 11. Katılımcıların mesleki kıdemi (yıl)

Diğer anket çalışması ise: Türkiye'de Çizge Kuramı konusunu derslerinde işleyen eğitimcilere yöneltilen açık uçlu sorular içerir. Çizge Kuramı konusunda lise öğrencilerine dersler vermiş olan veri bilimci Dr. Salih Durhan ve İstanbul Fuat Sezgin Bilim ve Sanat Merkezi'nden matematik öğretmeni Fatma Yudum Özer Akyüz bu soruları yanıtlamışlardır.

## 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Farklı ülkelerde çizge kuramının ortaöğretim hatta ilköğretim için uygulanmasının önemini vurgulayan çalışmalar yapılmıştır.

Gaio ve arkadaşlarının hazırladığı etkinlikte, gruplara ayrılan öğrenciler ilk önce açık hava ortamında bulunur. Daha sonra çizge kuramı kapsamında kâğıt üzerinde hazırlanan soruları yanıtlarlar. Gözlemlere göre öğrenciler açık



havada yaptıkları etkinlik ile kâğıt üzerinde gördükleri çizgeler arasında ilişki kurabilmişlerdir. Örneğin bir öğrenci kâğıt üzerindeki görevi görünce “bu dışarıda yaptığımızın aynısı, şehirde dolaştığımız zamanki gibi” demiştir. Bu çalışmanın sonucunda, Gaio ve arkadaşları, öğrencilerin gerçek hayat deneyimlerini çizge kuramı kurallarının soyut matematik problemiyle ilişkilendirebildiklerini kanıtlamışlardır. (Gaio, Branchetti ve Capone, 2020).

Smithers’in çalışmasındaki öğretim deneyinin sonucunda, öğrencilerde genel bir memnuniyet gözlenmiştir. Bir öğrenci, ünitenin değerlendirilmesi üzerine sorulan sorulara şu şekilde yanıt vermiştir: “Çizge Kuramı ve Köşe Renklendirmeyi sevdim çünkü matematiğin toplama ve çıkarma işlemlerini ortadan kaldırıyor. Eğlenceli ve kolay, ayrıca karşılaşılabileğimiz gerçek durumları çözmek için de kullanılabilir.”. Türkiye’de de benzer bir çalışma ile çizge kuramı konusunun öğretilmesinin pilot olarak uygulanması gerçekleştirilebilir.

Gaio ve Paola’nın hazırladığı, İtalya’daki tüm okul seviyelerinden 150 matematik öğretmenin dahil olduğu anketin sonuçlarına göre, özellikle düşük seviyedeki sınıflarda olan öğretmenlerin kriptografi, algoritmalar ve çizge kuramı gibi ayrı matematik konuları hakkında minimum bilgiye sahip oldukları tespit edilmiştir. Fakat öğretmenler, özellikle öğrencilerin matematiksel problemleri çözmeye aktif olarak katılmalarını istedikleri için bu konuları öğrenme ve derslerinde öğretme hususunda istekli olduklarını belirtirler. Ayrıca öğretmen ve öğrencilerin konuyu heyecan verici buldukları ortaya çıkmıştır (Gaio ve Paola, 2018).

Hart ve Sandefur tarafından yapılan çalışmadan alınan sonuca göre, çizge kuramını tanıttıkları ilkokuldan liseye kadar tüm öğrenciler, bir çizgenin temel unsurlarını öğrenmişlerdir. Bir probleme nasıl yaklaşacaklarına dair farklı düşünme becerileri kazanmışlardır (Hart ve Sandefur, 2016).

Ferrarello ve Mammana, yaptıkları çalışmanın sonucunda, çizge kuramının okul öğretiminde var olması gerektiğine kanaat getirmişlerdir. Bunun sebebini ise, çizge kuramının matematiksel modellemeye ve gerçeklikle bağlantı kuran bir yaklaşıma imkan vermesine bağlarlar. Ayrıca, öncesinde matematikle kötü bir deneyim yaşamış olan öğrencilerin matematiğe bakış açısını değiştirebileceğini ve matematiğe karşı ilgi ve sevgisini artırabileceğini düşünürler. Birlikte çalıştıkları öğrencilerde matematiğe olan tutumlarının olumlu yönde değiştiğini ve yeni beceriler kazandıklarını gözlemişlerdir (Ferrarello ve Mammana, 2018).

Ortaöğretim öğrencilerine çizge kuramının

tanıtılması fikri, Türkiye’de de çizge kuramının gücüne ve eğitimle ilişkilendirilmesine dikkat çekmek açısından gereklidir.

Türkiye’de lise öğrencilerine çizge kuramını öğretme konusunda deneyimli olan Salih Durhan ve Fatma Yudum Özer Akyüz’den konu ile ilgili görüşleri istenmiştir. Onlara sunulan ifadeler ve verdikleri cevaplar aşağıdaki gibidir:

***Çizge Kuramının öğretilmesinin öğrenciler üzerindeki etkileri hakkında düşüncelerim:***

*Salih Durhan: Matematiğin diğer alanlarında görünmeyen bir düşünüş ve kavrayış biçimi gerektirir çizge kuramı. Bu yönüyle hemen her yaşta insan için ufuk açıcı bir alandır. Ayrıca çok ağır teknik yöntemler gerektirmediği için de matematikle ilişkisi çok iyi olmayan öğrenciler için de cesaretlendirici bir konudur. Gençlerin hem matematiksel anlayışlarının genişlemesi hem de matematiğin sadece teknik becerilerden ibaret olmadığını görmesine yardımcı olduğunu düşünüyorum.*

*Fatma Yudum Özer Akyüz: Matematik bilimine ilişkin farkındalık kazanır. Günlük hayat problemlerinin matematiksel olarak analizini yapabilir. Problemlere farklı çözüm yolları geliştirebilir. Modelleme yeteneği gelişir. Somut veriden yola çıkarak analiz sentez yapar.*

***Çizge Kuramının lise müfredatına dahil edilmesini isterim.***

*Salih Durhan: Evet*

*Fatma Yudum Özer Akyüz: Evet*

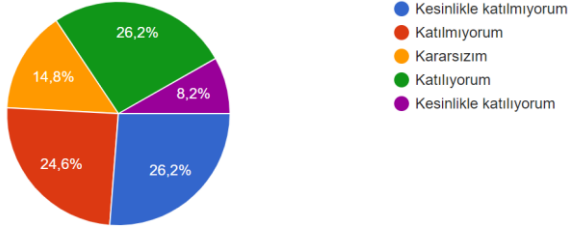
***Çizge Kuramı ve bu kuramın ortaöğretim müfredatına dahil edilme önerisi hakkındaki düşüncelerim:***

*Salih Durhan: Olumlu bir girişim olacağını düşünüyorum. Konu bilgisayar bilimlerinde de sıkça kullanılmaktadır ve buradan doğan fikirler önemli uygulamalara yol açmıştır.*

*Fatma Yudum Özer Akyüz: Matematiği öğrencilerin soyut düşünceden somut düşünceye geçişini kolaylaştırır ve öğrencilerin matematiğe ilişkin olumlu tutum sergilemelerini destekleyebilir.*

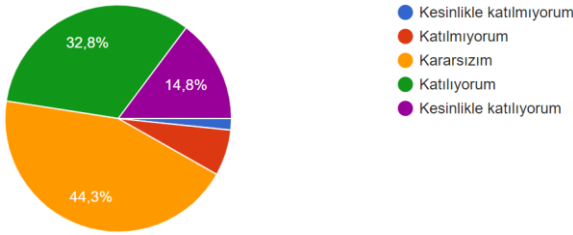
Bu çalışma dahilinde hazırlanan ve 61 öğretmen tarafından cevaplanan anket çalışmasına göre aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Ankete katılan öğretmenlere yöneltilen “Çizge Kuramı hakkında bilgi sahibiyim.” ifadesine verilen cevaplar Şekil-12’deki gibidir. 21 kişi bilgi sahibi olduğunu, 31 kişi olmadığını belirtmiştir. 9 kişi ise kararsızdır.



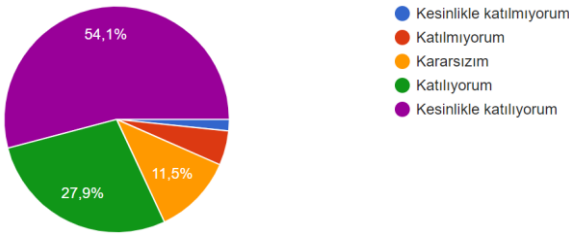
Şekil 12. Katılımcıların Çizge Kuramı hakkında bilgisi

“Çizge Kuramının M.E.B. Ortaöğretim Müfredatına dahil edilmesini isterim.” ifadesine verilen yanıtlar Şekil 13'teki gibidir. 5 kişi katılmamış, 29 kişi katılmış, 27 kişi kararsız kalmıştır.



Şekil 13. Katılımcıların Çizge Kuramının müfredata eklenmesi hakkındaki fikirleri

“Çizge Kuramının müfredata dahil edilmesi durumunda, kuramı öğrenmek veya kuram hakkındaki bilgilerini tazelemek isteyen öğretmenlere yönelik eğitimler düzenlenmesini uygun bulurum.” ifadesine verilen yanıtlar Şekil 14'teki gibidir. 4 kişi katılmamış, 7 kişi kararsız kalmış, 50 kişi katılmıştır.



Şekil 14. Katılımcıların konu ile ilgili öğretmen eğitimleri düzenlenmesi hakkındaki fikirleri

Bazı ülkelerdeki araştırmalara göre öğretmenler, çizge kuramı konusuna yeterince hâkim değillerdir. Yapılan ankete göre bu durum Türkiye'de de geçerlidir. Fakat Millî Eğitim Bakanlığı'nın üniversitelerle iş birliği içinde planlayacağı öğretmen eğitimleri ile bu sorun ortadan kalkacaktır.

Elde edilen verilerdeki ve incelenen çalışmalardaki olumlu sonuçlar, çizge kuramı konusunun ortaöğretim müfredatına eklenmesi önerisini desteklemiştir. Araştırmaların genelinde çizge kuramının öğrenilmesi ve öğretilmesi gerekliliği vurgulanmıştır. Ayrıca çizge kuramı konusunun

bazı ülkelerin müfredatlarında bulunması ve bu ülkelerin, uluslararası sınavlarda matematik alanında ortalamanın üzerinde puana sahip olmaları, Öğretim Programları İzleme ve Değerlendirme Sistemi'ne göre örnek alınabilecek bir durumdur.

Yapılan incelemelerde ortak olarak izlenen düşünce: çizge kuramının, problem çözme becerilerini, algoritmik düşünce yapısını, akıl yürütme faaliyetlerini, geliştirme fırsatı sağladığıdır. Tüm çalışmaların göz önünde bulundurulmasıyla çizge kuramının sağlayabileceği faydalar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- ✓ Çağa uygundur,
- ✓ Etkileyici ve heyecan vericidir,
- ✓ Problem çözme becerisini geliştirir,
- ✓ Matematik kaygısını iyileştirir,
- ✓ Soyut ilişkilerin temsilinde güçlüdür,
- ✓ Mantıksal akıl yürütme becerisini geliştirir,
- ✓ Sistematik düşünmeyi destekler,
- ✓ Gerçek hayat problemlerinin çözümünü sağlar,
- ✓ Eğlenceli uygulamaları vardır.

Yukarıdaki maddeler, yapılan araştırmaların sonuçları doğrultusunda yazılmıştır. Uygulama yapılan araştırmalarda bu sonuçlar gözlemlense de çizge kuramı konusunun öğretilmesinin gelecek için faydalarının tespit edilmesi konusunda uzun süreli çalışmalara ihtiyaç vardır. Yine de sağlayabilecekleri göz ardı edilemeyecek kadar güçlüdür ve özellikle 21. yüzyıl matematik eğitimi için gereklidir.

Bu çalışmanın amacı ve başlığı ortaöğretim müfredatına odaklansa da yapılan araştırmalar, çizge kuramı ile benzer bir şekilde ilköğretim ve ortaokul düzeyindeki öğrenciler için de içerik hazırlanabileceğini göstermiştir. Özellikle çizge renklendirme gibi eğlenceli konuların müfredata dahil edilmesi, küçük yaş gruplarının ilgisini çekecektir. En düşük seviyeden itibaren, sınıf düzeylerine göre içerik geliştirilmesi, çizge kuramı ile ilgili sağlam temellerin atılması demektir.

Stephen Hawking, 2000 yılında: "Önümüzdeki yüzyılın karmaşıklık yüzyılı olacağını düşünüyorum." demiştir. Karmaşıklık bilimi, büyüyen disiplinler arası bir bilgi birikimini temsil eder (Sanders, 2003). Karmaşıklığın kontrol edilmesini ise ağ bilimi inceler. Ve ağ biliminin arkasındaki matematik: çizge kuramıdır.

## TEŞEKKÜR

Çalışmanın bazı kısımlarında, diğer ülkelerdeki araştırmacılar ve o ülkelerde yaşayan kişilerden müfredat hakkında güncel bilgi almak amacıyla

destek istendi. Ayrıca Türkiye'deki, çizge kuramını öğretme deneyimi olan öğretmenlerden müfredat konusunda görüşleri alındı. Desteğini esirgemeyen ve değerli zamanlarından ayırarak bu çalışmaya katkıda bulunan Emeritus Matematik Profesörü Joseph G. Rosenstein'a, Ebru Doğru'ya, Doktora adayı Ceren Kasım'a, Dr. Anthony Foucher'a, Bohumil Vašíček'e, PhDr. Stanislav Rubáš'a, Dr. Salih Durhan'a, Fatma Yudum Özer Akyüz'e ve anket çalışmasına katılan tüm öğretmenlere teşekkür ederim.

## KAYNAKLAR

Asghary, N., Shahvarani, A. ve Haghighi, A. R. (2012). Graph Theory as a Tool for teaching Mathematical Processes. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 3, 731-734. 10.20533/ijcdse.2042.6364.2012.0104.

Avustralya Müfredatı. 28 Ocak 2021 tarihinde <https://www.australiancurriculum.edu.au/senior-secondary-curriculum/mathematics/general-mathematics/?unit=Unit+3&searchTerm=discrete#dimension-content> adresinden erişildi.

Baden-Württemberg Eğitim Planları. BP2016BW\_ALLG\_SEK1\_IMP.pdf. 25 Ocak 2021 tarihinde <http://www.bildungsplaene-bw.de/Lde/LS/BP2016BW/ALLG/SEK1/IMP/PK/20> adresinden erişildi.

Barabási, A. L. (2015). *Network Science*. Cambridge University Press, Chapter 2.

Baydemir T. (2020). Çizge Kuramı- Büyük Çizgeler Daha Küçüklerinin Kopyalarıyla Oluşturulabilir mi? *Bilim ve Teknik, Kasım 2020*. Erişim adresi: <https://bilimteknik.tubitak.gov.tr/system/files/makale/cizge.pdf>

Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü. 26 Ocak 2021 tarihinde, [http://www.bilkent.edu.tr/bilkent-tr/information/mat\\_yazkampi.html](http://www.bilkent.edu.tr/bilkent-tr/information/mat_yazkampi.html) adresinden erişildi.

Brown, J. A., Rudie, J. D., Bandrowski, A., Horn, J. D. V. ve Bookheimer S. Y. (2012). The UCLA multimodal connectivity database: a web-based platform for brain connectivity matrix sharing and analysis. *Article in Frontiers in Neuroinformatics*.

Ceyhun Y. (1976). Çizge Kuramı Üzerine Kısa Bir İnceleme. *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Yayın No:54, Ankara*.

Çizge Kuramı Tınaz Ekim, Seminer. 26 Ocak 2021 tarihinde <https://www.youtube.com/watch?v=zLY0yb8Vt1g&list=PLnGcZzlyKDqR4cR4LXhY0VBaUMhC>

[mT6s0&index=8](https://www.youtube.com/watch?v=yQtYh11elCo) adresinden erişildi.

Çizgeler Kuramı 1.1, 26 Ocak 2021 tarihinde, <https://www.youtube.com/watch?v=yQtYh11elCo> adresinden erişildi.

Dafik, Agustin I. H., Alfarisi, R., Kurniawati E. Y. (2020). Integrating A Graph Theory In A School Math Curriculum Of Indonesia Under Realistic Mathematics Education. *International Journal Of Scientific & Technology Research*, 9, 19 Aralık 2020 tarihinde <http://www.ijstr.org/final-print/jan2020/-Integrating-A-Graph-Theory-In-A-School-Math-Curriculum-Of-Indonesia-Under-Realistic-Mathematics-Education-.pdf> adresinden erişildi.

Debellis, V. A. ve Rosenstein, J. G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM*. 36, 46-55. 10.1007/BF02655758. 19 Aralık 2020 tarihinde [https://www.researchgate.net/publication/226889127\\_Discrete\\_Mathematics\\_in\\_Primary\\_and\\_Secondary\\_Schools\\_in\\_the\\_United\\_States](https://www.researchgate.net/publication/226889127_Discrete_Mathematics_in_Primary_and_Secondary_Schools_in_the_United_States) adresinden erişildi.

Ekimi, T. (2020). Eşleşme Kuramı ve 2012 Nobel Ekonomi Ödülü, *Matematik Dünyası, 2020*. 26 Ocak 2021 tarihinde [http://hacivat.ie.boun.edu.tr/~tinaz/DocumentsPhotos/MD\\_Kararli%20Eslleme\\_proofs.pdf](http://hacivat.ie.boun.edu.tr/~tinaz/DocumentsPhotos/MD_Kararli%20Eslleme_proofs.pdf) adresinden erişildi.

Ferrarello, D. ve Mammana, M. F. (2018). Graph Theory in Primary, Middle, and High School. 10.1007/978-3-319-70308-4\_12.

Gaio, A., Branchetti, L. ve Capone, R. (2020). Learning Math Outdoors: Graph Theory using Maps. 10.37626/GA9783959871440.0.12. Erişim adresi: [https://www.researchgate.net/publication/342564911\\_Learning\\_Math\\_Outdoors\\_Graph\\_Theory\\_using\\_Maps](https://www.researchgate.net/publication/342564911_Learning_Math_Outdoors_Graph_Theory_using_Maps)

Gaio, A. ve Paola, B. (2018). Discrete Mathematics in Lower School Grades? Situation and Possibilities in Italy. 10.1007/978-3-319-70308-4\_3.

Gupta, V. (2015). Importance of Graph Theory. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, 6, 19 Aralık 2020 tarihinde <http://compmath-journal.org/download/Vandana-Gupta/CMJV06I06P0306.pdf> adresinden erişildi.

Hart, E. ve Martin, W. G. (2018). Discrete Mathematics Is Essential Mathematics in a 21st Century School Curriculum. 10.1007/978-3-319-70308-4\_1.

Hart, E. W. ve Sandefur, J. (2016). Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research

Lessner, D. (2011). Graph Theory In High School Education. *Charles University, Prague, Czech Republic*. Erişim adresi: [https://ksvi.mff.cuni.cz/~lessner/w/data/\\_uploaded/file/papers/2011\\_06\\_WDS\\_lessner\\_contribution.pdf](https://ksvi.mff.cuni.cz/~lessner/w/data/_uploaded/file/papers/2011_06_WDS_lessner_contribution.pdf)

Matematiğin Peşinde. 26 Ocak 2021 tarihinde <https://matematiğinpeşinde.com/page/2/> adresinden erişildi.

Milli Eğitim Bakanlığı Öğretim Programlarını İzleme ve Değerlendirme Sistemi, 19 Aralık 2020 tarihinde <http://mufredat.meb.gov.tr/SSS.aspx> adresinden erişildi.

National Council of Teachers of Mathematics. 28 Ocak 2021 tarihinde, <https://www.nctm.org/Search/?query=graph%20theory#wst=6c1650e12d1250efb188fd3d45636893> adresinden erişildi.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. *Reston*

Nesin Matematik Köyü, 26 Ocak 2021 tarihinde, [https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2020/01/nmk\\_tanitim.pdf](https://nesinkoyleri.org/wp-content/uploads/2020/01/nmk_tanitim.pdf) adresinden erişildi.

Nesin Matematik Köyü Lise Yaz Okulları, 26 Ocak 2021 tarihinde, <https://nesinkoyleri.org/events/2021-nesin-matematik-koyu-lise-yazokullari/> adresinden erişildi.

Nesin Matematik Köyü Tüm Etkinlikler. 26 Ocak 2021 tarihinde, <https://nesinkoyleri.org/tum-etkinlikler/> adresinden erişildi.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), 19 Aralık 2020 tarihinde <https://data.oecd.org/pisa/mathematics-performance-pisa.htm#indicator-chart> adresinden erişildi.

Robert Koleji. 26 Ocak 2021 tarihinde, <https://website.robcok.k12.tr/tr/egitim-ogretim/akademik-bolumler/matematik> adresinden erişildi.

Rosen, K. H. (2019). Discrete Mathematics and Its Applications. *McGraw-Hill Education*.

Rosenstein, J. (2018). The Absence of Discrete Mathematics in Primary and Secondary Education in the United States... and Why that Is Counterproductive. 10.1007/978-3-319-70308-4\_2.

Sanders, T. I. (2003). Executive Director Washington Center for Complexity & Public Policy 1233 20th Street, NW, Suite 620, Washington, DC 20036-7322 202.429.3733, [www.complexsys.org](http://www.complexsys.org)

Santoso, E. B. (2018). Mathematics Classroom Activities Based On Some Topics In Graph Theory To Develop Critical Thinking Of Primary And Secondary School Students. *International Journal of Indonesian Education and Teaching*. 2. 154-160. 10.24071/ijiet.2018.020207.

Smithers, D. B. (2005). Graph Theory for the Secondary School Classroom. *Electronic Theses and Dissertations*. 1015. <https://dc.etsu.edu/etd/1015>

Şeker, S.E. (2015). Çizge Kuramı (Graph Theory). *YBS Ansiklopedi*, v.2, is.2, pp. 17-29, Erişim adresi: [http://ybsansiklopedi.com/wp-content/uploads/2015/05/cizge\\_kurami.pdf](http://ybsansiklopedi.com/wp-content/uploads/2015/05/cizge_kurami.pdf)

TÜBİTAK 2020 Yılı Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Final Yarışması Sonuçları 25 Ocak 2021 tarihinde, [https://tubitak.gov.tr/sites/default/files/18842/51\\_lise\\_ogrencileri\\_arastirma\\_projeleri\\_final\\_yarismasi\\_sonuculari.pdf](https://tubitak.gov.tr/sites/default/files/18842/51_lise_ogrencileri_arastirma_projeleri_final_yarismasi_sonuculari.pdf) adresinden erişildi.

TÜBİTAK, Türkiye Ulusal Bilgisayar Olimpiyatları 1. Aşama Sınavı Müfredat ve Kaynaklar. 7 Kasım 2020 tarihinde, [https://www.tubitak.gov.tr/sites/default/files/2204/bilgisayar\\_ortaokul\\_1\\_asama\\_mufredat\\_-\\_2018.pdf](https://www.tubitak.gov.tr/sites/default/files/2204/bilgisayar_ortaokul_1_asama_mufredat_-_2018.pdf) adresinden erişildi.

Zwillinger, D. (2003). Standard Mathematical Tables and Formulae, *CRC Press LLC*.