Fırat Üniversitesi Müh. Bil. Dergisi
33(2), 667-673, 2021

Araştırma Makalesi
https://doi.org/10.35234/fumbd.871674

$\mathbb{Q}_2^3 \subset \mathrm{E}_2^4$ Lightlike Koni 3-Uzayında Null Eğrilerin Elastik Olmayan Akış (Inextensible Flow) Eğrileri

Fatma ALMAZ[1*], Mihriban ALYAMAÇ KÜLAHCI[2]

[1, 2] Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, TÜRKİYE
[*1] fb_fat_almaz@hotmail.com, [2] malyamac@firat.edu.tr

(Geliş/Received: 31/01/2021; Kabul/Accepted: 30/07/2021)

Öz: Bir eğri veya yüzey akışı eğer yay uzunluğu ve eğrilik korunursa uzatılamaz olarak adlandırılır. Fiziksel anlamda, elastik olmayan eğri(inextensible flows) ve yüzey akışları herhangi bir gerilme enerjisinin yokluğu ile karakterize edilir. Bu çalışmada 2 ideksli 4 boyutlu $\mathbb{Q}_2^3 \subset E_2^4$ lightlike koni uzayında doğal Frenet çatısı kullanılarak ifade edilen bir null $x: I \to \mathbb{Q}_2^3 \subset E_2^4$ eğrisinin elastik olmayan akışı(inextensible flows) ifade edilerek matematiksel açıdan bazı karakterizasyonları verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Elastik olmayan akış (inextensible flow), $\mathbb{Q}_2^3 \subset E_2^4$ Lightlike koni uzayı, null eğri.

The Inextensible Flows of Null Curves in the Lightlike Cone $\mathbb{Q}_2^3 \subset \boldsymbol{E}_2^4$

Abstract: A curve or surface flow is called inextensible if arc length and curvature are preserved. In a physical sense, inextensible flows and surface flows are characterized by the absence of any strain energy. In this study, the inextensible flows of a null $x: I \to \mathbb{Q}_2^3 \subset \boldsymbol{E}_2^4$ curve expressed using the natural Frenet framework in the 4-dimensional lightlike cone space $\mathbb{Q}_2^3 \subset \boldsymbol{E}_2^4$ with 2 index are given some mathematical characterizations.

Key words: Inextensible flow, $\mathbb{Q}_2^3 \subset E_2^4$ Lightlike cone space, null curve.

1. Giriş

Yarı Riemann manifoldlarının incelenmesi, diferansiyel geometri ve fizikte, özellikle de görelilik teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Öyleki matematiksel olarak ifade etmeye çalıştığımız elastik olmayan eğri (inextensible flow) kavramı ve dolayısıyla da yüzey akışları fiziksel olarak hareketlere neden olmaktadır. Örneğin hiçbir gerilme enerjisi olmadan rüzgar tarafından taşınan bir kağıt parçası elastik olmayan eğri (inextensible flow) ve yüzey akışları ile tarif edilebilir ki bu tür hareketler oldukça doğal bir şekilde günlük yaşantımızda fizik yasaları altında gerçekleşen sadece birkaç fenomenden biridir.

Öncelikli olarak elastik olmayan akışlar(inextensible flow) Öklid 3-uzayında Körpınar tarafından incelenmiştir, [11]. Akabinde Öklid n-uzayında elastik olmayan akışlar için bazı karakterizasyonlar ifade edilmiştir [13]. Ayrıca, birçok araştırmacı farklı uzaylarda elastik olmayan akışları inceleyerek çalışmışlardır [6, 10, 11]. Ayrıca, yazarlar tarafından $M^3(\delta_0)$ uzayının alt uzayı olan Sitter 3-uzayı veya Anti de Sitter 3-uzayı üzarinde Sabban çatısına göre dejenere olmayan eğriler kullanılarak slant helisler incelenmiştir [4]. Abazari ve diğerleri tarafından 1 indeksli lightlike konide spacelike eğriler için bazı durumlar incelenmiştir [1]. Liu tarafından lightlike konide eğriler üzerine bazı temel ifadeler verilmiştir [16]. Ayrıca, lightlike koni uzayında farklı tipden eğriler [2, 3, 12, 13] çalışmalarında ele alınmıştır. Uygulama alanlarında elastik olmayan eğri(inextensible flows) ve yüzey akışları, bilgisayar destekli ve bilgisayar animasyonu gibi ve hatta mekanik ile ilgili bir çok alanda problem olarak ortaya çıkmakta ve araştırmacılar tarafından ele alınmıştır [7, 8, 20, 21].

2. Ön bilgiler

E_s^m uzayı $(s, m-s)$ işaretine sahip m-boyutlu pseudo-Öklid uzayı, standart koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3, x_4) olmak üzere $\langle , \rangle$ metriği ile verilen $\mathbb{R}^m$ reel vektör uzayı olup,

$$\langle , \rangle_s = -\sum_{i=1}^{s} (dx_i)^2 + \sum_{i=s+1}^{m} (dx_i)^2 \tag{1}$$

* Sorumlu yazar: fb_fat_almaz@hotmail.com. Yazarların ORCID Numarası: [1] 0000-0002-1060-7813, [2] 0000-0002-8621-5779

metriği ile ifade edilir. E_s^m de bir v vektörü

i) Eğer $\langle v, v\rangle_s > 0$ veya v sıfır ise space-like,

ii) Eğer $\langle v, v\rangle_s < 0$ ise time-like,

iii) Eğer $\langle v, v\rangle_s = 0$ ise null (veya lightlike) olarak adlandırılır.

E_s^m de I açık aralık olmak üzere regüler bir eğri $\alpha: I \to E_s^m$, $\forall t \in I$ olsun $\left(\alpha'(t) \neq \frac{d\alpha}{dt}\right)$. Bu durumda, eğer $\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle > 0$, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle = 0$ veya $\langle \alpha'(t), \alpha'(t)\rangle < 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa eğri sırasıyla space-like, null veya time-like olarak adlandırılır. Ayrıca, E_s^m de bir v vektörünün normu $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v\rangle|}$ şeklinde tanımlanır. Bu bağlamda $E = \mathbb{R}$ alınıp elde edilen $\mathbb{R}_s^m$ uzayı için üç farklı hiperyüzey vardır. Öyle ki E_s^m uzayında sırasıyla;

1) $r > 0$ yarıçaplı, $x_0 \in E_s^m$ merkezli bir pseudo-Riemannian küre $S_s^{m-1}(x_0, r)$

$$S_s^{m-1}(x_0, r) = \{x \in E_s^m : \langle x - x_0, x - x_0\rangle = r^2\};$$

2) $r > 0$ yarıçaplı, $x_0 \in E_s^m$ merkezli bir pseudo-hiperbolik uzayı $H_{s-1}^{m-1}(x_0, r)$

$$H_{s-1}^{m-1}(x_0, r) = \{x \in E_s^m : \langle x - x_0, x - x_0\rangle = -r^2\}$$

ile verilir. Ayrıca, $S_s^{m-1}(x_0, r)$ pseudo-Riemannian küre $\mathbb{R}^s \times S^{m-1-s}$ uzayına, $H_{s-1}^{m-1}(x_0, r)$ pseudo-hiperbolik uzayı ise $S^{s-1} \times \mathbb{R}^{m-s}$ uzayına diffeomorfiktir. Ayrıca, $H^{m-1}(x_0, r)$ Hiperbolik uzayı

$$H_{s-1}^{m-1}(x_0, r) = \{x \in E_s^m : \langle x - x_0, x - x_0\rangle = -r^2, x_1 > 0\}$$

ile verilir. Genelliği bozmaksızın, $E = \mathbb{R}$ alınarak $m = 4$ ve $s = 2$ değerlerine karşılık elde edilen 2 indekse sahip 4-boyutlu semi Öklid uzayı $\mathbb{R}_2^4$ için 3 tip hiperyüzey vardır. Öyle ki

1) Anti-de Sitter ve de Sitter uzayı sırasıyla

$$H_1^3 = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : g(x, x) = -1\} \text{ and } S_2^3 = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : g(x, x) = 1\} \tag{2}$$

ile tanımlanır.

2) Lightlike koni uzayı

$$\mathbb{Q}_2^3 = \{x \in \mathbb{R}_2^4 : g(x, x) = 0\} \tag{3}$$

ile verilir. $\mathbb{R}_2^4$ de I açık aralık olmak üzere her $t \in I$ regüler bir eğri $x: I \to \mathbb{R}_2^4$ olsun $\left(x'(t) \neq \frac{dx}{dt}\right)$. Bu durumda, eğer $\langle x'(t), x'(t)\rangle > 0$, $\langle x'(t), x'(t)\rangle = 0$ veya $\langle x'(t), x'(t)\rangle < 0$ eşitlikleri sağlanıyorsa eğri sırasıyla space-like, null veya time-like olarak adlandırılır.

Eğer x time-like veya space-like bir eğri ise non-null olarak adlandırılır ve eğri için $x'(t)$ vektörü tanjant vektör olarak isimlendirilir. Bu nedenle bir non-null eğrisinin yay uzunluğu $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|x'(t)\| dt$ ile bulunur. Böylece x eğrisinin yay parametresi s ile gösterilir ve $\left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds}\right\rangle = \varepsilon = \pm 1$ şeklinde yazılır. Herhangi bir null eğri için t parametresinde $\varepsilon = 0$ olur [14], null x eğrisi için aşağıdaki ifadeleri sağlayacak şekilde $\{x(t), \xi(t), N(t), W(t)\}$ doğal Frenet çatısından bahsedilebilir.

$$\langle x(t), x(t)\rangle = \langle x(t), \xi(t)\rangle = \langle x(t), N(t)\rangle = 0; \langle \xi(t), \xi(t)\rangle = \langle \xi(t), B(t)\rangle = 0 \tag{4a}$$

$$\langle N(t), N(t)\rangle = \langle W(t), W(t)\rangle = \langle W(t), N(t)\rangle = 0; \langle \xi(t), N(t)\rangle = \langle x(t), B(t)\rangle = 1 \quad (4b)$$

burada $\xi(t)$ teğet vektör, $N(t)$ vektörü $\xi(t)$'ye transversal vektör olup $W(t)$ vektürü ise $x(t)$ vektörüne transversal vektördür [19]. Dolayısıyla da doğal Frenet çatı vektörleri

$$\begin{aligned} x'(t) &= \xi(t) \\ \xi'(t) &= h(t)\xi(t) + k_1(t)x(t) \\ N'(t) &= -h(t)N(t) + k_2(t)x(t) - W(t) \\ W'(t) &= -k_2(t)\xi(t) - k_1(t)N(t) \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde verilir ve bu çatı $\mathbb{Q}_2^3$ lightlike koni uzayında x null eğrisinin doğal Frenet denklemleri olarak adlandırılır. Ayrıca, h, k_1, k_2 fonksiyonları x eğrisinin eğrilik fonksiyonları olup sırasıyla

$$h(t) = \langle x''(t), N(t)\rangle, k_1((t) = \langle x''(t), W(t)\rangle, k_2(t) = \langle N'(t), W(t)\rangle \quad (6)$$

şeklinde ifade edilir [9].

Definition 1 $\mathbb{Q}_2^3$ uzayında bir null eğri x olmak üzere doğal Frenet çatısı $\{x, \xi, N, W\}$ şeklinde verilsin. Bu durumda null eğrinin akış(flow) ifadesi

$$\frac{dx}{dt} = m_0 x + m_1 \xi + m_2 N + m_3 B; m_i \in C^\infty \quad (7)$$

şeklinde verilir.

3. $\mathbb{Q}_2^3$ uzayında null eğrilerin elastik olmayan akışları (İnextensible Flows) üzerine inceleme

$\mathbb{Q}_2^3$ lightlike koni uzayında bir null eğri x olmak üzere eğrinin yay parametresi

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{dx}{dt} \right\| du$$

ile verilir. Ayrıca, $v = \left\| \frac{dx}{dt} \right\|$ ifadesi $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}$ şeklinde u parametresine göre ifade edilebilir. Bu durumda $s(u,t) = \int_0^u v du$ yazılabilir. Ayrıca, $x(u,t)$ null eğrisinin $\frac{dx}{dt}$ akış(flow) değeri için $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{dx}{du}) = 0$ eşitliği sağlanıyorsa $\frac{dx}{dt}$ akış(flow) elastik olmayan(inextensible) eğri olarak ifade edilir.

Theorem 1. $\mathbb{Q}_2^3$ lightlike cone uzayında bir akış(flow) ifadesi $\frac{dx}{dt} = m_0 x + m_1 \xi + m_2 N + m_3 B$ şeklinde verilsin. Bu durumda

1) Eger akış(flow) elastik değilse(inextensible) ise

$$2v\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial m_2}{\partial u} - (hm_2 + k_1 m_3)v \quad (8)$$

eşitliği sağlanır.

2) Akışın(flow) non-elastik (inextensible) olması için

$$\frac{\partial m_2}{\partial u} = (hm_2 + k_1 m_3)v \quad (9)$$

eşitliği sağlanır.

Proof. $\mathbb{Q}_2^3$ lightlike koni uzayında ifade edilen x eğrisinin akışı(flow) $\frac{dx}{dt} = m_0x + m_1\xi + m_2N + m_3B$ şeklinde verilsin. Bu durumda $v = \left\|\frac{dx}{dt}\right\|$ ve dolayısıyla da $v^2 = \left\langle\frac{dx}{du}, \frac{dx}{du}\right\rangle$ şeklinde yazılıp eşitliğin türevi alınarak

$$2v\frac{\partial v}{\partial t} = \left\langle\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right\rangle = \left\langle\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}(m_0x + m_1\xi + m_2N + m_3B)\right\rangle$$

ifadesi elde edilir. Buradan u parametresine göre türev alınarak frenet çatısı kullanılıp ve $\langle\xi(t), N(t)\rangle = 1$ olduğu göz önüne alındığında

$$2v\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial m_2}{\partial u} - (hm_2 + k_1m_3)v \tag{10}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $\frac{dx}{dt}$ akış(flow) değeri için $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{dx}{du}) = 0$ eşitliği sağlandığından $\frac{dx}{dt}$ akış(flow) elastik olmayan (inextensible) eğri olarak ifade edilir ki bu ise $\frac{\partial m_2}{\partial u} = (hm_2 + k_1m_3)v$ olması demektir.

Theorem 2. $\mathbb{Q}_2^3$ lightlike koni uzayında $\frac{dx}{dt} = m_0x + m_1\xi + m_2N + m_3B$ akışı(fow) ile verilen bir null eğri x olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \delta_1x - (m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + hm_1 - k_2m_0)N - m_1W$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\delta_1\xi - (\frac{\partial m_0}{\partial s} + k_1m_1 + k_2m_2)N - m_0W$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (\frac{\partial m_0}{\partial s} + k_1m_1 + k_2m_2)x + (m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + hm_1 - k_2m_3)\xi$$
$$+(\frac{\partial m_2}{\partial s} - hm_2 - k_1m_3)N + (-m_2 + \frac{\partial m_3}{\partial s})W,$$

burada $-\left\langle\frac{\partial W}{\partial t}, N\right\rangle = \delta_1$ şeklindedir.

Proof. Kabul edelim ki $\mathbb{Q}_2^3$ lightlike koni uzayında (7) ile verilen elastik olmayan akış(inextensible flow) x olsun. O halde,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial s}(m_0x + m_1\xi + m_2N + m_3B)$$
$$= (\frac{\partial m_0}{\partial s} + k_1m_1 + k_2m_2)x + (m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + hm_1 - k_2m_3)\xi$$
$$+(\frac{\partial m_2}{\partial s} - hm_2 - k_1m_3)N + (-m_2 + \frac{\partial m_3}{\partial s})W$$

elde edilen son eşitlikten (4) de verilen çatı ifadeleri yardımıyla

$$\left\langle\frac{\partial \xi}{\partial t}, W\right\rangle = \frac{\partial m_0}{\partial s} + k_1m_1 + k_2m_2; \left\langle\frac{\partial \xi}{\partial t}, N\right\rangle = m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + hm_1 - k_2m_3;$$

$$\left\langle\frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi\right\rangle = \frac{\partial m_2}{\partial s} - hm_2 - k_1m_3; \left\langle\frac{\partial \xi}{\partial t}, x\right\rangle = -m_2 + \frac{\partial m_3}{\partial s}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca, (7) eşitliğinden

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, W \right\rangle = m_0;\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, N \right\rangle = m_1;\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, \xi \right\rangle = m_2;\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial t}, x \right\rangle = m_3 \tag{11}$$

eşitlikleri yazılabilir. Öyle ki $\frac{\partial N}{\partial t} = n_0 x + n_1 \xi + n_2 N + n_3 B$ değeri için

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, W \right\rangle = n_0 = \delta_1;\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, N \right\rangle = m_1 = 0;$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, \xi \right\rangle = n_2 = -\left(m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + h m_1 - k_2 m_3 \right); \left\langle \frac{\partial N}{\partial t}, x \right\rangle = -m_1$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \delta_1 x - (m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + h m_1 - k_2 m_0) N - m_1 W \tag{12}$$

yazılır. Ayrıca, $\frac{\partial W}{\partial t} = w_0 x + w_1 \xi + w_2 N + w_3 B;\ w_i \in C^{\infty}$ değeri için

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, W \right\rangle = w_0 = 0;\ \left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, N \right\rangle = w_1 = -\delta_1;$$

$$\left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, \xi \right\rangle = w_2 = -\left(\frac{\partial m_0}{\partial s} + k_1 m_1 + k_2 m_2 \right); \left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, x \right\rangle = w_3 = -m_0$$

eşitlikleri bulunur. Böylece,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\delta_1 \xi - (\frac{\partial m_0}{\partial s} + k_1 m_1 + k_2 m_2) N - m_0 W \tag{13}$$

vektörü elde edilir.

Theorem 3. $\mathbb{Q}_2^3$ lightlike koni uzayında $\frac{dx}{dt} = m_0 x + m_1 \xi + m_2 N + m_3 B$ akışı(fow) ile verilen bir null eğri x olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1) $\frac{\partial N}{\partial t}$ değerine karşılık

$$\delta_1' - h\delta_1 - \frac{\partial k_2}{\partial t} = -k_2(2m_0 + m_1' + h m_1 - k_2 m_0); \delta_1 = 1; \tag{14}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h(2k_2 m_0 - 2h m_1 - m_1') + (2 - k_2) m_0' + k_2 m_2 - m_1'' + h' m_1 - k_2' m_0 = 0; \tag{15}$$

$$2h m_1 = k_2(m_3 + m_0) \tag{16}$$

diferensiyel denklemler sağlanır.

2) $\frac{\partial W}{\partial t}$ değerine karşılık

$$\delta_1' + \delta_1 h = \frac{\partial k_2}{\partial t} + k_2(\Omega + m_0); m_3 = \text{sabit}; \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = h\Phi + m_1 k_1 + k_2 \Psi + \frac{\partial k_1}{\partial t} + k_1 \Omega \tag{18}$$

eşitlikleri sağlanır.

3) $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ değerine karşılık

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \Phi(\Omega + m_0 - h) + \delta_1(m_2' - hm_2 - m_3k_1) = +m_0k_1 + \frac{\partial k_1}{\partial t}; \tag{19}$$

$$m_1\Phi + \frac{\partial \Omega}{\partial s} + \Omega^2 = \frac{\partial h}{\partial t} + m_1k_1 + \Omega;\ m_2\Phi + \frac{\partial \Psi}{\partial s} = h\Psi + m_2k_1 \tag{20}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada Φ, Ω ve Ψ değerleri

$$\Phi = m_0' + m_1k_1 + m_2k_2; \Omega = m_0 + m_1' + hm_1 - m_3k_2; \Psi = m_2' - hm_2 - m_3k_1$$

şeklindedir.

Proof. İspat için

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \delta_1 x - \left(m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + hm_1 - k_2m_0\right)N - m_1W; \frac{\partial N}{\partial s} = hN + k_2x - W \tag{21}$$

ifadesi gözönüne alınıp sırasıyla $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)$ değerleri bulunarak

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(hN + k_2x - W) &= (h\delta_1 + \frac{\partial k_2}{\partial t} + k_2m_0)x + (k_2m_1 + \delta_1)\xi \\ &+(\frac{\partial h}{\partial t} - hm_0 - h\frac{\partial m_1}{\partial s} + h^2m_1 + hk_2m_0 + \frac{\partial m_0}{\partial s} + m_1k_1 + 2k_2m_2)N \\ &+(-hm_1 + m_3k_2 + m_0)W\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta_1 x - (m_0 + \frac{\partial m_1}{\partial s} + hm_1 - k_2m_0)N - m_1W\right) \\ &= (\delta_1' - k_2(m_0 + m_1' + hm_1 - k_2m_0))x + (\delta_1 + k_2m_1)\xi \\ &+\begin{pmatrix}-m_0' + m_1'' - h'm_1 - hm_1' + k_2'm_0 + k_2m_0' \\ +hm_0 + hm_1' + h^2m_1 - hk_2m_0 + k_1m_1\end{pmatrix}N + (m_0 + hm_1 - k_2m_0)W\end{aligned}$$

eşitliklerinde bileşenlerin cebirsel eşitliği göz önüne alınarak sırasıyla

$$\delta_1' - h\delta_1 - \frac{\partial k_2}{\partial t} = -k_2(2m_0 + m_1' + hm_1 - k_2m_0); \delta_1 = 1;$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h(2k_2m_0 - 2hm_1 - m_1') + (2 - k_2)m_0' + k_2m_2 - m_1'' + h'm_1 - k_2'm_0 = 0;$$

$$2hm_1 = k_2(m_3 + m_0)$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde $\frac{\partial W}{\partial t}$ ve $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ değerleri için sırasıyla $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial N}{\partial s}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)$ ile $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)$ ve $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)$ değerleri bulunup cebirsel ifadelerin eşitliğinden sırasıyla (17), (18), (19) ve (20) eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teşekkür

FA, belirtilen başlıkta ilk fikri ortaya koyarak makaleyi yazarak yorumlamıştır. MAK verileri tekrardan analiz ederek yeniden yorumlamıştır. Son taslak tüm yazarlar tarafından okuyup onaylanmıştır.

Kaynaklar

[1] Abazari N, Bohner M, Sager I, Sedaghatdoost A. Spacelike curves in the lightlike cone. Appl. Math. Inf. Sci. 2018; 12(6): 1227–1236.
[2] Almaz F, Külahcı MA. A survey on magnetic curves in 2-dimensional lightlike cone. Malaya Journal of Matematik 2019; 7(3): 477-485.
[3] Almaz F, Külahcı MA. On *x*-magnetic Surfaces Generated by Trajectory of *x*-magnetic Curves in Null Cone. General Letters in Mathematics 2018; 5(2), pp.84-92.
[4] Almaz F, Külahcı MA. The helix and slant helices generated by non-degenerate curves in $M^3(\delta_0)\subset E_2^4$. Turkish Journal of Science & Technology 2021; 16 (1): 113-117
[5] Bejancu A. Lightlike curves in Lorentz manifolds. Publ. Math. (Debr.) 1994; 44(1–2): 145–155.
[6] Bonnor WB. Null curves in a Minkowski space-time. Tensor 1969; 20: 229- 242.
[7] Chirikjian G, Burdick J. A modal approach to hyper-redundant manipulator kinematics IEEE Trans. Robot. Autom. 1994; 10: 343–354.
[8] Desbrun M, Cani-Gascuel MP. Active implicit surface for animation. in: Proc. Graphics Interface Canadian Inf. Process. Soc. 1998; 143–150.
[9] Duggal KL, Jin DH. Null Curves and Hypersurfaces of Semi-Riemannian Manifolds. London: World Scientific 2007.
[10] Gökmen O, Tosun M, Özkaldı Karakuş S, A note on inextensible flows of curves in En. Int. Electron. J. Geom. 2013; 6(2): 118–124.
[11] Körpinar T, Turhan E. A new version of inextensible flows of spacelike curves with timelike B2 in Minkowski space-time E^4_1. Differ. Equ. Dyn. Syst. Vol. 2013; 21(3): 281-290.
[12] Kulahci M. Investigation of a curve using Frenet frame in the lightlike cone. Open Phys. 2017; 15(1): 175–181.
[13] Kulahci M, Almaz F, Bektaş M. On Helices and slant Helices in the Lightlike Cone. Honam Mathematical J. 2018; 40(2): pp. 305–314.
[14] Kühnel W. Differential Geometry: Curves Surfaces Manifolds. Student Mathematical Library, vol. 77. Am. Math. Soc., Providence 2015.
[15] Kwon DY, Park FC, Chi DP. Inextensible flows of curves and developable surfaces. Applied Mathematics Letters 2005; 18: 1156-1162.
[16] Liu H. Curves in the lightlike cone. Beitr. Algebra Geom. 2004; 45(1): 291–303.
[17] Liu H. Meng Q. Representation formulas of curves in a two-and three-dimensional lightlike cone. Results Math. 2011; 59(3–4): 437–451.
[18] O’Neill B. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. New York: Academic Press 1983.
[19] Sun J, Pei D. Some new properties of null curves on 3-null cone and unit semi-Euclidean 3-spheres. J. Nonlinear Sci. Appl. 2015; 8(3): 275–284.
[20] Unger DJ. Developable surfaces in elastoplastic fracture mechanics. Int. J. Fract. 1991; 50: 33–38.
[21] Yıldız ÖG, Tosun M, Karakuş SÖ. A note on inextensible flows of curves in E^n. International Electronic Journal of Geometry 2013; 6(2): 118-124.