**GUFBD / *GUJS* (2022) 12(1): 187-199**
DOI: 10.17714/gumusfenbil.873998 Araştırma Makalesi / *Research Article*

# Tobit modeline bayesci yaklaşım ve winBUGS ile uygulama

*Bayesian approach to tobit model and application with winBUGS*

**Samet KAYA*[1,a], Esin KÖKSAL BABACAN[2,b]**
*[1,2]Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06190, Ankara*

• Geliş tarihi / *Received*: 03.02.2021 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 14.11.2021 • Kabul tarihi / *Accepted*: 20.11.2021

**Öz**
Bu çalışmada, sansürlü regresyon modeli olarak bilinen Tobit modeli incelenmiştir. Çalışmanın amacı, Bayesci yöntemle Tobit modelinin parametrelerini tahmin etmek ve klasik yöntemle elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktır. İlk olarak Tobit modelinin parametrelerini tahmin ederken kullanılan yöntemler anlatılmıştır. Bu yöntemler en çok olabilirlik yöntemi ve Bayesci yöntemdir. Bayesci yaklaşım ile sonuç çıkarımı yaparken Gibbs örneklemesi kullanılmıştır. Uygulama kısmında ilk olarak alttan sansürlenmiş Tobit model için Matlab programında simülasyon programı yazılmış ve klasik en çok olabilirlik yöntemi ile Tobit modelinin parametreleri tahmin edilmiştir. Daha sonra, simülasyon programında üretilen aynı veriler WinBUGS programına eklenerek Bayes tahmin sonuçları elde edilmiştir. Daha sonra ABD de 2017 yılında en çok tercih edilen otomobil markalarından Accord, Mazda 6 ve Maxima modellerine ait veriler için klasik ve Bayesci yöntemlerle tahmin sonuçları elde edilmiştir. Yapılan karşılaştırma sonucunda her iki yöntem ile elde edilen tahmin sonuçlarının benzer olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca parametreler için klasik güven aralıkları ve Bayesci güvenilir aralıklar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, Bayesci yöntem kullanılarak elde edilen güvenilir aralıkların klasik yönteme göre elde edilenden daha dar olduğu görülmüştür.

**Anahtar kelimeler:** Bayesci yaklaşım, MCMC (Markov Chain Monte Carlo), Nitel değişken, Tobit model, WinBUGS

***Abstract***
*In this study, Tobit Model which is known to censored regression model is examined. The aim of the study is to estimate the Tobit model parameters using with Bayesian approach and compare the Bayesian and classical estimation results. At first, the methods are examined which are used to estimate the Tobit model parameters. These methods are the maximum likelihood method and the Bayesian estimation method. For the inferences of the Bayesian approach, the Gibbs sampling method is used. In the application section first, the simulation program was written in the Matlab program for the Tobit model which is censored from below, and the classical maximum likelihood method is used to estimate the parameters of the Tobit model. Later, Bayesian estimations are obtained by importing the same data which are generated using the Matlab simulation program, from the WinBugs program. And then the estimation results are obtained from using the data of Accord, Mazda 6, and Maxima models, which are the most preferred automobile brands in the USA in 2017. The estimation results are similar for the two methods. Besides, classical confidence intervals and Bayesian credible intervals are computed. It is seen that Bayesian highest density intervals are slightly narrower than the classical confidence intervals.*

***Keywords**: Bayesian approach, MCMC (Markov Chain Monte Carlo), Qualitative variable, Tobit model, WinBUGS*

[*a] Samet KAYA; sametky_1301@hotmail.com, Tel: (0507) 975 13 01, orcid.org/0000-0002-6937-8138
[b] orcid.org/0000-0002-9649-5276

## 1. Giriş
*1. Introduction*

Bağımlı değişken değerlerinin elde edilmesinde diğer regresyon modellerinden farklılıklar gösteren Tobit modeli, 1958 yılında James Tobin tarafından geliştirilen bir modeldir. Tobin, dayanıklı tüketim malları üzerine hane halkı harcamalarını analiz ederken, bazı ailelerde dayanıklı tüketim malı harcaması gibi bir harcama türü olmaması sebebiyle regresyon modelinde bağımlı değişkenin değerini negatif olarak elde etmiştir. Hiçbir durumda harcama negatif olamayacağından, hane halkı geliri belli bir düzeyi geçene kadar bu değişkene sıfır değerini atamış ve bunun üzerine sansüre uyum sağlayacak bir model geliştirmiştir. Goldberg (1964), Probit modeline benzerliğinden dolayı Tobin'in geliştirdiği bu modeli Tobit modeli olarak adlandırmıştır (Leiker, 2012). Tobit modeli, bağımlı değişken değerlerinin soldan veya sağdan sınırlandırılmak zorunda olduğu durumlarda kullanılmaktadır (Emir, 2016).

Çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde organize edilmiştir; 2. Bölümde Tobit Regresyon ile ilgili klasik ve Bayesci yöntemlerle yapılan çalışmalar için bir literatür taraması yapılmış, yurt içinde ve yurt dışında yapılan çalışmalardan örnekler verilmiştir. 3. Bölümde Tobit modelinin istatistik modeli verilmiş ve parametre tahmini için en çok olabilirlik yöntemi anlatılmıştır. 4. Bölümde Tobit modeline Bayesci yaklaşım anlatılmış ve Markov Zinciri Monte Carlo yöntemlerinden Gibbs algoritması verilmiştir. 5. Bölüm uygulama çalışmalarına ayrılmıştır. İlk olarak simülasyon çalışması ile tasarlanan model için veri türetilerek işlemler yapılmış, daha sonra internetten çekilen veriler kullanılarak sonuç çıkarımına gidilmiştir. Son bölümde, çalışma ile elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

## 2. Literatür taraması
*2. Literature review*

Ülkemizde farklı uygulama alanlarında Tobit Regresyon ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Üçdoğruk vd., (2001), 1994 yılı Türkiye hane halkı gelir dağılımı ve tüketim harcamaları anketinin verilerini kullanarak hane halkı geliri, hane reisinin yaşı, cinsiyeti, eğitim durumu, işteki durumu gibi bilgileri bağımsız değişken, eğlence ve kültür harcamalarını ise bağımlı değişken olarak alıp Tobit modelini incelemişlerdir. Güneş vd. (2016), 2009 yılında Türkiye genelinde uygulanan hane halkı işgücü anketi verilerini kullanmışlardır. Bu çalışmada iş gücüne dahil olan evli kadınların çalışma saatlerini ve fazla mesai yapmalarını etkileyen faktörleri (yaş, eğitim durumu, çocuk sayısı vb.) bağımsız değişken, çalışma saatini ise bağımlı değişken olarak alıp Tobit modeli oluşturmuşlardır. Bu Tobit modelinde, çalışma saati verilerini alttan sansürledikten sonra parametre tahmini yapmışlardır. Koç vd., (2018), çalışmalarında Kahramanmaraş'ta hane halklarına ilişkin gıda tüketim talebinin ekonomik analizi üzerine yapılan anket verilerinden yola çıkarak aile reisinin geliri, aile fertlerinin sayısı ve kişinin eğitim düzeyi gibi bilgileri bağımsız değişken ve bu kişilerin aylık balık tüketim harcamalarını ise bağımlı değişken olarak Tobit modeline seçmişlerdir.

Yurt dışında yapılan çalışmalara örnek olarak, Dagenais (1975), 1961-1963 yılları arasında ABD Anket Araştırma merkezinde araba ile ilgili toplanan verileri kullanmıştır. Anket verilerinde yer alan hane halkı geliri, hane reisinin yaşı, cinsiyeti, eğitim durumu, araba sayısı, araba yaşı ve borçları gibi bilgileri bağımsız değişken, aracın dönem sonundaki değerini bağımlı değişken olarak belirlemiştir. Son durumda Tobit modelde sadece, hane reisinin eğitimi ve çocuk sayısı bağımsız değişken olarak alınmıştır. Baba (1990), Kanada'da büyük bir havacılık tesisinde çalışan erkek personele ilişkin anket verilerinden yola çıkarak devamsızlık, çalışma dışı baskı, yaşam boyu stres, zihinsel sağlık, işe dâhil olma, çocuk sayısı ve yaş gibi bilgileri bağımsız değişken, zaman kaybını ise bağımlı değişken olarak belirlemiştir. Baba yaptığı çalışmada, bu değişkenleri kullanarak sıralı en küçük kareler yöntemi ile Tobit modelini karşılaştırmıştır. Austin vd., (2000), 1994-1995 yılları arasında Kanada'da yürütülen Ulusal Nüfus Sağlık Araştırması verilerini kullanmışlardır. Bu veri setinde sansürlenmiş Sağlık Hizmetleri İndeks (Health Utilities Index, HUI) puanı bağımlı değişken, ankete katılan kişilerin yaşları bağımsız değişken olarak belirlenmiş ve bu değişkenler arasındaki ilişki robust Tobit modeli ile ifade edilmiştir.

Bayesci sonuç çıkarımı ile ilgili, Chib (1992), hataları normal dağılıma sahip olan Tobit modellerinde Bayesci çıkarım yapabilmek için Gibbs algoritmasını kullanmıştır. Polasek ve Krause (1994), hiyerarşik Tobit modellerini göz önüne almış ve Bayesci çıkarım için yine Gibbs algoritmasını kullanmışlardır. Son yıllarda Tobit modelinde Bayesci sonuç çıkarımı için yapılan uygulama çalışmalarına örnek olarak Austin (2002), Dagne ve Huang (2012), Abbas ve Thahaer (2019), Alhamzawi ve Ali (2018), Adarabioyo ve Awe (2020) verilebilir.

Buna karşılık yapılan literatür çalışmasında Tobit modelinde Bayesci sonuç çıkarımı ile ilgili Türkçe bir çalışmaya rastlanmamıştır.

## 3. Tobit model

*3. Tobit model*

Tobit modellere literatürde sınırlı bağımlı değişkenli modeller de denilmektedir. Sınırlı bağımlı değişkenli modeller, sınırlandırılmış (truncated) ve sansürlü (censored) modeller olmak üzere ikiye ayrılır. Eğer, belirli bir aralık dışındaki tüm gözlemler kaybediliyorsa sınırlandırılmış (truncated) model, sadece bağımsız değişkenler gözlenebiliyorsa sansürlü (censored) model olarak ifade edilir (Zhou, 2007). Bağımlı değişken değerleri alttan veya üstten sınırlandırılmak zorunda ise yani, bağımsız değişkenin bilinen değerlerine karşılık, bağımlı değişkenin değerlerinden bazıları gözlenemiyorsa, bu gibi durumlarda Tobit modeli kullanılır (Emir, 2016).

Doğrusal regresyon analizinde artıklar için Normallik varsayımı ihlal edilse bile en küçük kareler tahmin edicileri yansız ve tutarlıdır. Tobit modellerinde bu durum farklıdır. Normalliği varsayan en çok olabilirlik tahmin edicileri, artıklar Normal dağılmadığında tutarsızdır (Eren, 2012; Emeç, 2016).

Tobit regresyon modeli, $y_i^* = \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere,

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, & \beta x_i + \varepsilon_i > 0 \\ 0, & \beta x_i + \varepsilon_i \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

biçiminde tanımlanır (Emeç, 2016). Yani, Tobit modelde

$y_i^* \le 0$ olduğunda $y_i = 0$ ,
$y_i^* > 0$ olduğunda $y_i = y_i^*$

değerlerini alır.

$y_i^* = \beta x_i + \varepsilon_i$ modelinde negatif $y_i$ gözlemleri ihmal edildiğinden, $\varepsilon_i$ hata terimi sıfır ortalamaya sahip olamaz (Maddala, 1992).

Tobit model,

$$\begin{aligned} y_i^* &= \beta\, x_i + \varepsilon_i \quad , \varepsilon_i \cong N(0, \sigma^2) \\ y_i &= max\{y_i^*, l\} \end{aligned} \tag{2}$$

gibi ifade edilir. (2) numaralı denklemde verilen Tobit modelinde, $y_i^*$ bir görünmeyen değişken, $x_i$ bağımsız değişken, $\varepsilon_i$ normal ve bağımsız olarak dağılmış hata bileşeni değişkenidir. $y_i$ gözlenen bağımlı değişken ve $l$ sansürleme noktasıdır. Sansürleme şekillerine göre aşağıdaki model tanımlamaları yapılmıştır.

1) Veri seti $y_l$ noktasında alttan sansürlü ise;

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > y_l \; ise \\ y_l, & y_i^* \le y_l \; ise \end{cases} \tag{3}$$

2) Veri seti $y_u$ noktasında üstten sansürlü ise;

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* < y_u \; ise \\ y_u, & y_i^* \ge y_u \; ise \end{cases} \tag{4}$$

3) Veri seti hem $y_l$ noktasında alttan sansürlü hem de $y_u$ noktasında üstten sansürlü ise;

$$y_i = \begin{cases} y_i^*, & y_l < \; y_i^* < y_u \; ise \\ y_L, & y_i^* \le y_l \; ise \\ y_u, & y_i^* \ge y_u \; ise \end{cases} \tag{5}$$

Tobit modelinde yer alan parametreleri en çok olabilirlik yöntemine göre tahmin edebilmek için olabilirlik fonksiyonu yazılmalıdır.

### 3.1. Tobit modelinde en çok olabilirlik yöntemi ile tahmini

*3.1. Estimation with the maximum likelihood method in the Tobit model*

Olabilirlik fonksiyonunu elde etmeden önce $y_i = \beta\, x_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \cong N(0, \sigma^2)$ şeklinde olan lineer regresyon modelinde $x_i$ değerleri bilindiğinde $Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F(y_i|x_i) &= P(Y \le y_i|x_i) \\ &= P(\beta\, x_i + \varepsilon_i \le y_i|x_i) \\ &= P(\varepsilon_i \le y_i - \beta\, x_i|x_i) \\ &= P\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \le \frac{y_i - \beta\, x_i}{\sigma} \middle| x_i\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y_i - \beta\, x_i}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\Phi$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonudur. Buna göre olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(y_i|x_i) &= \frac{d}{dy_i} F(y_i|x_i), \\ f(y_i|x_i) &= \frac{1}{\sigma}\, \phi\left(\frac{y_i - \beta\, x_i}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

biçiminde elde edilir.

Olabilirlik fonksiyonunu yazabilmek için $y_i^* > l$ ve $y_i^* \le l$ olmak üzere iki durum göz önüne alınmalıdır. Burada, $y_i^* \le l$ sansürlenen verileri ve

$y_i^* > l$ sansürsüz verileri göstermektedir (Koç ve Şahin, 2018). İlk olarak sansürlü kısım için $y_i^* \leq l$ olasılığı,

$$\begin{aligned}\Pr(y_i^* \leq l) &= \Pr(\beta\, x_i + \varepsilon_i \leq l)\\ &= \Pr(\varepsilon_i \leq l - \beta\, x_i)\\ &= \Pr\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \leq \frac{l - \beta\, x_i}{\sigma}\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\beta\, x_i - l}{\sigma}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

biçiminde elde edilir. $y_i^* > l$ olduğunda ise olasılık,

$$\Pr(y_i^* > l) = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{\beta\, x_i - l}{\sigma}\right)\right) = \Phi\left(\frac{\beta\, x_i - l}{\sigma}\right) \tag{9}$$

Buna göre olabilirlik fonksiyonu,

biçiminde elde edilir. Sansürleme noktası $l$, 0 alınırsa $y_i^* > 0$ ile $y > 0$ aynı değerleri alacağından $f(y_i|x_i) = f(y_i^*|x_i)$ olacaktır. Buna göre olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y_i|x_i) = f(y_i^*|x_i) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - \beta\, x_i}{\sigma}\right) \tag{10}$$

biçiminde ifade edilir. Sansürleme noktası $l$, 0 alındığında fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(y_i) = \begin{cases} 1 - \phi\left(\frac{\beta\, x_i}{\sigma}\right), y_i = 0 \\ \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - \beta\, x_i}{\sigma}\right),\ y_i > 0 \\ 0,\ d.d \end{cases} \tag{11}$$

$$L(\beta, \sigma^2) = \prod_{y_i=0}\left[1 - \Phi\left(\frac{\beta\, x_i}{\sigma}\right)\right] \prod_{y_i>0}\left[\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - \beta\, x_i}{\sigma}\right)\right] \tag{12}$$

biçiminde yazılır. $n$ birimlik örneklem gözlemlendiğine, bu gözlemlerden $n_0$ tanesi sansürlenmiş ise geri kalan $n_1 = (n - n_0)$ tanesi pozitif gözlemlerden oluşur. Buna göre olabilirlik fonksiyonu,

$$L(\beta, \sigma^2) = \prod_{y_i=0}\left[1 - \Phi\left(\frac{\beta\, x_i}{\sigma}\right)\right]\left[(2\pi)^{-\frac{n_1}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n_1}{2}}\exp\left\{-\frac{\|y_i - \beta\, x_i\|^2}{2\sigma^2}\right\}\right] \tag{13}$$

biçiminde yazılır. Elde edilen bu karışık fonksiyon Olsen (1978)'in $\tau = \frac{1}{\sigma}$ ve $\alpha = \frac{\beta}{\sigma}$ dönüşümleri ile basitleştirilerek,

$$\begin{aligned}L(\beta, \sigma^2) &= \prod_{y_i=0}[1 - \Phi(\alpha x_i)]\left[(2\pi)^{-\frac{n_1}{2}}(\tau^2)^{\frac{n_1}{2}}\exp\left\{-\frac{\tau^2\|y_i - \beta\, x_i\|^2}{2}\right\}\right]\\ &\equiv l_0(\beta, \sigma^2)\, l_1(\beta, \sigma^2)\end{aligned} \tag{14}$$

biçimini alır. Burada $l_0$ sansürlenmiş gözlemlerin olabilirlik fonksiyonu, $l_1$ sansürlenmemiş gözlemlerin olabilirlik fonksiyonunu gösterir. Buna göre,

$$l_0 = P(y_i = 0) = P(y_i^* \leq l) = 1 - \Phi\left(\frac{\beta\, x_i}{\sigma}\right)$$

dir. $\beta$ ve $\sigma^2$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini bulmak için iteratif yöntemler kullanılır. Newton- Raphson yöntemi bu yöntemlerden yaygın olarak kullanılanlarından bir tanesidir (Chib, 1992).

## 4. Tobit modele bayesci yaklaşım

*4. Bayesian approach to the Tobit model*

Bayesci sonuç çıkarımında, klasik yöntemlerin aksine parametreler de birer rasgele değişken olarak düşünülür. Bu nedenle de parametrelerin kendilerine ait dağılımları vardır. Çalışmaya başlamadan önce parametrelere ilişkin olarak alınan bu dağılım bilgisi önsel bilgi olarak bilinir. Yani, Bayesci sonuç çıkarımında örneklem bilgisinin yanında parametrelere ilişkin önsel bilgiler de göz önüne alınır. Bu anlamda, regresyon analizinde Bayesci yaklaşım ile sonuç çıkarımı yapılmak istendiğinde parametrelere ilişkin önsel bilgiler de analize dahil edilir. Daha sonra parametrelere ilişkin önsel dağılım bilgisi ve verilen örneklem bilgisi kullanılarak sonsal dağılım elde edilir. Temel olarak önseller; bilgilendirici ve bilgilendirici olmayan önseller olmak üzere iki gruba ayrılır. Bilgilendirici olmayan önsel dağılımlar, parametreler hakkında önsel bilgisi zayıf olan veya veriden elde edilen bilgi hariç başka bilgiye ihtiyaç duymayan dağılımlardır. Bayesci sonuç çıkarımında, parametreler için bilgi vermeyen önseller kullanıldığında elde edilen sonuçlar klasik yöntemlerle elde edilen sonuçlara benzer olmaktadır. Bu önsel dağılımlara örnek olarak tek biçimli (uniform) önsel dağılımlar, düz (flat) önsel dağılımlar ve Jeffreys'in önsel dağılımları verilebilir. Aynı durum Bayesci Regresyon için de geçerlidir. Eğer parametrelere ilişkin bilgi vermeyen önseller kullanılırsa elde edilen sonuçlar klasik regresyonla elde edilen sonuçlara benzer çıkacaktır (Ekici, 2005). Parametreler için, bilgi veren önseller kullanıldığında ise sonsal dağılımın açık formunun elde edilmesinde matematiksel problemlerle karşılaşılmaktadır. Bu nedenle bilgi veren önsellerin kullanıldığı durumda, Bayesci sonuç çıkarımı yapabilmek için, geliştirilen simülasyon yöntemleri kullanılmaktadır. Bu simülasyon yöntemleri ile analitik olarak elde edilemeyen sonsal dağılımlardan örneklemler çekilmekte ve bu örneklemler kullanılarak sonuç çıkarımına gidilmektedir. Bu simülasyon yöntemleri Markov Chain Monte Carlo (MCMC) yöntemleri olarak bilinmektedir (Gamerman ve Lopes, 2006).

Regresyon analizine, Bayesci yaklaşımda bulunurken regresyon parametreleri de birer rasgele değişken olarak kabul edildiğinden $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ ve $\sigma^2$ parametreleri birer rasgele değişkendir ve kendilerine ait olasılık dağılımları vardır. Zellner ve Rossi (1984), yaptıkları çalışmada $\theta = (\beta, \sigma^2)$ için bilgi veren önsel dağılım olan Normal- Gamma dağılımını kullanmışlardır. $\theta = (\beta, \sigma^2)$ olmak üzere $\pi(\theta)$ ile önsel dağılıma ilişkin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ve $p(\theta|y)$ ile sonsal dağılıma ilişkin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu gösterilsin. Buna göre Bayesci yaklaşım adımları aşağıda verildiği gibidir,

**1)** $\theta$ için önsel dağılım belirlenir,
**2)** Eldeki veri seti için olabilirlik fonksiyonu oluşturulur,
**3)** Önsel ve olabilirlik güncellenerek sonsal dağılım elde edilir. Parametrelere ilişkin tüm sonuç çıkarımı bu sonsal dağılım kullanılarak yapılır (Ekici, 2005).

Bahsedilen bu üç adım Bayes teoremi kullanılarak,

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta, y)}{p(y)} = \frac{\mathrm{L}(\theta)\Pi(\theta)}{p(y)} = \frac{\mathrm{L}(\theta)\Pi(\theta)}{\int \mathrm{L}(\theta)\Pi(\theta)d\theta} = K^{-1}\mathrm{L}(\theta)\Pi(\theta)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $K = \int \mathrm{L}(\theta)\Pi(\theta)d\theta$ normalleştirme sabiti olarak bilinir. Sonsal dağılım elde edildikten sonra hata kareler kayıp fonksiyonuna göre parametrelerin tahminleri sonsal dağılımın beklenen değeri olduğundan, $g(\theta)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere beklenen değeri

$$E(g(\theta)\,|y) = \int g(\theta)p(\theta|y)\,d\theta \qquad (15)$$

ile hesaplanır.

Tobit modeline Bayesci yöntemle yaklaşımda bulunabilmek için ilk olarak olabilirlik fonksiyonu (14) de verildiği gibi alınır. Daha sonra, $\theta = (\beta, \sigma^2)$ parametreleri için önsel dağılım belirlenir ve yukarıda verilen üç adım kuralına göre sonsal dağılım elde edilerek parametrelere ilişkin sonuç çıkarımı yapılır.

(13) denkleminden de görülebileceği gibi (15) ile ifade edilen beklenen değer verilen herhangi bir önsel dağılım için analitik olarak elde edilemez. Bayesci yaklaşımda bu sık karşılaşılan bir durumdur. Bu gibi durumlarda, sonsal dağılımdan örneklem çekme esasına dayanan yöntemler kullanılarak sonuç çıkarımı yapılabilir. Bu yöntemler Markov zincirlerini kullanan stokastik simülasyon yöntemleridir ve Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) yöntemleri olarak bilinir (Gamerman ve Lopes, 2006).

### 4.1. Gibbs örnekleme algoritması
*4.1. Gibbs sampling algorithm*

Geman ve Geman (1984), Gibbs örneklemesini kullanan ilk çalışmadır. Fakat, Bayesci çıkarım için Gibbs örneklemesini ilk kez kullanan ve bir istatistik dergisinde yayınlanan çalışma Gelfand ve Smith (1990) tarafından yapılmıştır (Gamerman ve Lopes, 2006). Gibbs algoritması kullanılarak örnekleme yapılırken, değişkenler arasındaki ilişki ile ilgili bilgiye ihtiyaç duyulur, çünkü Gibbs örneklemesi koşullu olasılıklara dayanır. Metropolis algoritmasında olduğu gibi yardımcı bir dağılıma ihtiyaç duymaz (Bilir, 2016).

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ parametre vektörü, $p(y|\theta)$ olabilirlik fonksiyonu, $\pi(\theta)$ önsel dağılım olsun. Buna göre, $\pi\left(\theta_i \middle| \theta_j,\ i \neq j, y\right)$ sonsal dağılımı,

$$\pi\left(\theta_i \middle| \theta_j,\ i \neq j, y\right) \propto p(y|\theta)\,\pi(\theta)$$

gibi yazılabilir.

Gibbs örneklemesi için algoritma adımları aşağıdaki gibidir:

A1) $t = 0$ için keyfi bir $\theta^{(0)} = \{\theta_1{}^{(0)}, \ldots, \theta_k{}^{(0)}\}$ başlangıç değeri seçilir.

A2) $\theta$' nın her bir bileşeni

$$\theta_1{}^{(t+1)} \sim \pi\,(\theta_1|\theta_2{}^{(t)}, \ldots, \theta_k{}^{(t)}, y\,)$$
$$\theta_2{}^{(t+1)} \sim \pi\,(\theta_2|\theta_1{}^{(t+1)}, \theta_3{}^{(t)} \ldots, \theta_k{}^{(t)}, y)$$
$$\theta_k{}^{(t+1)} \sim \pi\,(\theta_k|\theta_1{}^{(t+1)}, \ldots, \theta_{k-1}{}^{(t+1)}, y)$$

şeklinde elde edilir.

A3) $t = t + 1$ alınır ve yakınsama gerçekleşinceye kadar 2.nci adıma gidilir (Gamerman ve Lopes, 2006).

MCMC yöntemlerinde, başlangıç değerlerinin etkileri, zincirin ilk adımlarında görülür. Daha sonraki adımlarda zincir yavaş yavaş başlangıç durumunu unutur ve durağanlaşır. Bu nedenle, bu yöntemlerde gerekli hesaplamalar yapılırken zincirin başlangıç gözlemleri ihmal edilir. İhmal edilen bu değerlere burn in (yakma) değerleri denir (Link ve Barker, 2010). Başlangıç değerlerinin etkisinden kurtulmak için gerekli zincir uzunluğunu belirlemek için kullanılan birçok yöntem vardır. Bu yöntemlerden en basiti ve en çok kullanılanı, çekilen örneklemin grafiğini inceleyerek zincir uzunluğuna karar vermektir (Gilks vd., 1996; Walsh, 2002).

## 5. Uygulama çalışmaları
*5. Application studies*

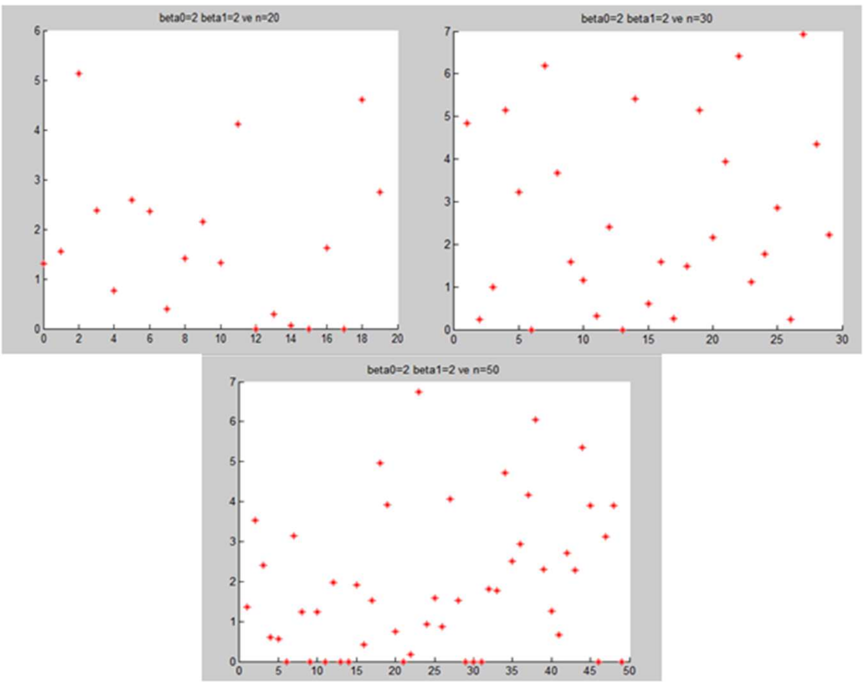
### 5.1. Simülasyon çalışması
*5.1. Simulation study*

Klasik yöntemle elde edilen Tobit modeli ile Bayesci yöntemle elde edilen Tobit modeli tahmin sonuçlarını karşılaştırmak amacıyla yapılan simülasyon çalışmasında,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

şeklindeki doğrusal regresyon modeli ele alınmıştır. Matlab ile yazılan simülasyon programında örneklem büyüklükleri n= 20, 30, 50 olarak, $\beta_0$ değerleri 2 ve 2.5 olarak, $\beta_1$ değerleri 1.5 ve 2 olarak, $x$ değerleri 0-1 aralığından rasgele sayılar olarak ve $\varepsilon \sim N(0,1)$ dağılımından üretilen rasgele sayılar olarak alınıp $y$ değerleri üretilmiştir. Daha sonra yazılan Matlab programı yardımı ile $\beta_0$ ve $\beta_1$ parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri soldan sansürlenmiş ($l = 0$) Tobit modeli için elde edilmiştir. Bayesci sonuç çıkarımı için Winbugs programından yararlanılmıştır. Bu nedenle, Matlab programı kullanılarak elde edilen veriler WinBugs programına aktarılmıştır. Bu programda parametreler için bilgi veren önsel dağılımlar kullanılmıştır. $\beta_0$ ve $\beta_1$ parametreleri için önsel dağılım olarak Normal (*0, 0.001*) ve $\sigma^2$ için önsel dağılım olarak Gamma (*0.001, 0.001*) dağılımları alınmış ve parametre tahminleri yapılmıştır. Bayesci yöntemle parametre tahmininde kullanılan Markov zinciri için 10000 örneklem çekilmiş ve örneklemin baştan ilk 1000 verisi burn in değerleri olarak alınıp işlemlere dahil edilmemiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo1 ile özetlenmiştir. Parametreler için, klasik yöntemle %95 lik güven aralıkları, Bayes yönteminde ise parametreler için %95 lik güvenilir aralıklar ve elde edilmiştir.

$\beta_0 = 2$ ve $\beta_1 = 2$ için $n = 20, 30, 50$ örneklem büyüklüklerinde üretilen $y$ bağımlı değişken değerlerinin denklem (3)' te belirtilen kurala göre sansürlendikten sonraki değerlerinin örneklem sayısına göre grafiği aşağıda verilmiştir.




**Şekil 1.** Sansürlenmiş veriye ait grafikler
***Figure 1.*** *Graphs of censored data*

Şekil 1'e bakıldığında 20 birimlik örneklemden üretilen y değerlerinden 3 tanesinin, 30 birimlik örneklemden üretilen y değerlerinden 2 tanesinin ve 50 birimlik örneklemden üretilen y değerlerinin 11 tanesinin sıfır etrafında sansürlenmiş olduğu görülmektedir.

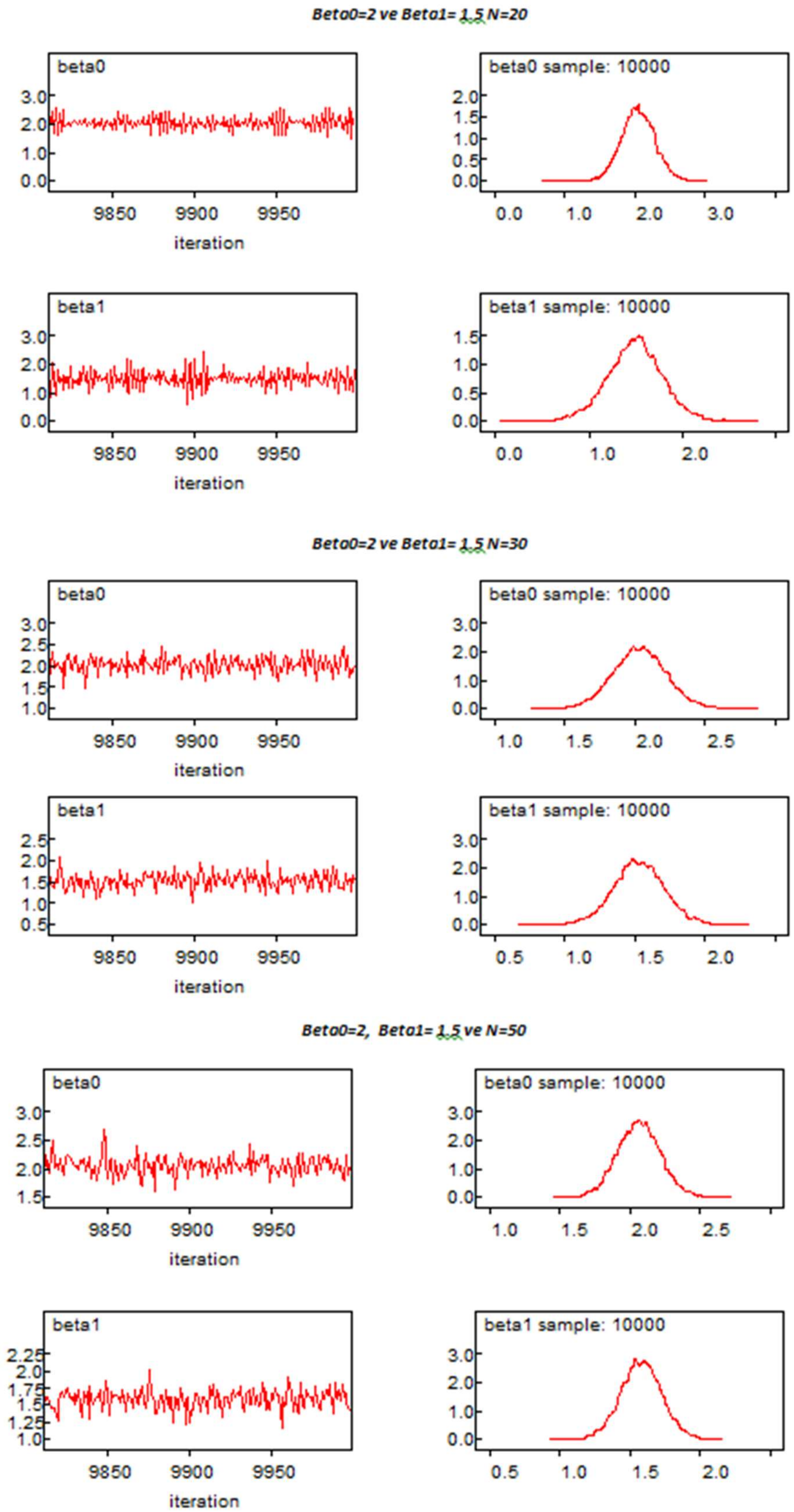
**Tablo 1.** Simülasyon sonuçları
***Table 1.*** *Simulation results*

| Parametre Değerleri | | Klasik Tobit ile elde edilen sonuçlar | | Bayesci Tobit ile elde edilen sonuçlar | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **n** | $\hat{\beta}_0$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_0$ | $\hat{\beta}_1$ |
| $\beta_0$=2 $\beta_1$=1.5 | **20** | 2.0397 | 1.5030 | 2.031 | 1.506 |
| | **GA** | (1.5683,2.5111) | (0.9112,2.0948) | (1.767,2.461) | (1.289, 1.87) |
| | **SH** | 0.15635 | 0.1732 | 0.001719 | 0.002071 |
| | **30** | 2.0347 | 1.5263 | 2.032 | 1.526 |
| | **GA** | (1.6606,2.4088) | (1.1612,1.8915) | (1.657,2.408) | (1.16,1.892) |
| | **SH** | 0.1372 | 0.14248 | 0.001638 | 0.001466 |
| | **50** | 2.0626 | 1.5787 | 2.0089 | 1.5349 |
| | **GA** | (1.7629,2.3623) | (1.2901,1.8673) | (1.7286,2.2945) | (1.2188,1.8503) |
| | **SH** | 0.1333 | 0.12984 | 0.001389 | 0.001162 |
| $\beta_0$=2.5 $\beta_1$=1.5 | **20** | 2.5443 | 1.5321 | 2.542 | 1.53 |
| | **GA** | (2.2103,2.8782) | (1.1652,1.8990) | (2.209,2.870) | (1.162,1.891) |
| | **SH** | 0.16157 | 0.15942 | 0.001704 | 0.001906 |
| | **30** | 2.5094 | 1.5420 | 2.507 | 1.541 |
| | **GA** | (2.1268,2.8919) | (1.1559,1.9281) | (2.126,2.889) | (1.154,1.929) |
| | **SH** | 0.14416 | 0.12935 | 0.001859 | 0.001433 |
| | **50** | 2.5403 | 1.5355 | 2.538 | 1.535 |
| | **GA** | (2.2286,2.8520) | (1.1921,1.8788) | (2.232,2.851) | (1.192,1.872) |
| | **SH** | 0.1367 | 0.1472 | 0.001566 | 0.001570 |
| $\beta_0$=2 $\beta_1$=2 | **20** | 2.0568 | 2.0235 | 2.055 | 2.02 |
| | **GA** | (1.6209,2.4927) | (1.4842,2.5628) | (1.616,2.49) | (1.479,2.551) |
| | **SH** | 0.15893 | 0.13595 | 0.001683 | 0.001626 |
| | **30** | 2.0269 | 2.0737 | 2.024 | 2.073 |
| | **GA** | (1.5984,2.4554) | (1.6475,2.50) | (1.599,2.454) | (1.646,2.491) |
| | **SH** | 0.15016 | 0.1536 | 0.001787 | 0.00158 |
| | **50** | 2.0187 | 2.0255 | 2.017 | 2.025 |
| | **GA** | (1.6823,2.3550) | (1.6995,2.3516) | (1.682,2.357) | (1.699,2.354) |
| | **SH** | 0.15392 | 0.15888 | 0.001716 | 0.0017 |

*SH: klasik yöntem için Standart Hata, Bayesci yöntem için MC Standart Hatası
*GA: klasik yöntem için %95 güven düzeyinde güven aralığı, Bayesci yöntem için %95 lik güvenilir aralık

Tablo 1'e bakıldığında klasik yöntemle elde edilen Tobit parametre tahminleri ile Bayesci yöntemle elde edilen Tobit parametre tahminleri benzer sonuçlar vermiştir. Her iki yöntemle elde edilen sonuçlar da simülasyonda verilen gerçek değerlere oldukça yakındır. Parametrelere ilişkin güven aralıklarına bakıldığında Bayesci yöntemle elde edilen güvenilir aralıkların klasik Tobit modeline göre elde edilen aralıklardan daha dar olduğu görülmektedir. Burada güven aralıklarının yorumları da farklılık göstermektedir. Klasik yöntemde güven aralıkları için "bu aralığın parametreyi içeren aralıklardan birisi olması olasılığı %95 tir" şeklinde yorum yapılırken yani rasgele olan aralık sınırları olurken, Bayesci yöntemde ise rasgele olan parametredir ve "parametrenin bu sınırlar içinde yer alması olasılığı %95 tir" yorumu yapılır. Klasik yöntemde elde edilen hiçbir güven aralığı 0 değerini içermemektedir. Buna göre, değişkenlerin modele katkısı önemlidir sonucu çıkarılabilir.

($\beta_0 = 2$ ve $\beta_1$=1.5 ve n=20,30 ve 50 değerleri için) Bayesci yöntemle elde edilen parametre değerlerine ilişkin grafik (iz grafiği) ve sonsal yoğunluk grafikleri aşağıdaki gibidir.




**Şekil 2.** $\beta_0$=2 ve $\beta_1$=1.5 değerleri ve n=20,30,50 için iz ve sonsal yoğunluk grafikleri
***Figure 2.*** *Trace and posterior density plots for values of $\beta_0$=2, $\beta_1$=1.5 and n=20,30,50*

## 5.2 Gerçek veri uygulaması

*5.2. Real data application*

Gerçek veriler https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html sitesinden çekilmiştir. Bu veriler kullanılarak yapılan çalışma aşağıdaki gibidir.

ABD de 2017 yılında en çok tercih edilen otomobil markalarından Accord, Mazda 6 ve Maxima seçilmiştir. Çalışma için seçilen bu markalara ait 30 ar tane veri örneklem olarak alınmıştır. Otomobil fiyatını belirleyen değişkenlerin otomobil yaşı, otomobil markası ve otomobil kilometresi olduğu düşünülmektedir. Kurulacak regresyon modeli,

*Fiyat ~Yaş + Kilometre+ Marka*

biçiminde olacaktır. Burada, otomobil markaları kategorik değişkendir. Nitel değişken 3 kategorili olduğu için modele 2 tane kukla değişken eklenmelidir. Bu değişkenler,

$$D_1 = \begin{cases} 1, & Accord \\ 0, & değil \end{cases} \qquad D_2 = \begin{cases} 1, & Maksima \\ 0, & değil \end{cases}$$

gibi gösterilmiştir. Diğer kategorik değişken olan Mazda6 markası temel düzey olarak belirlenmiştir. Buna göre kurulacak regresyon modeli,

$$Fiyat \sim \beta_0 + \beta_1 \times D_1 + \beta_2 \times D_2 + \beta_3 \times Yaş + \beta_4 \times Kilometre$$

biçiminde olacaktır. Fiyat Bağımlı değişkenine ait betimsel istatistikler Tablo 2'de verilmiştir.

**Tablo 2.** Fiyat değişkenine ilişkin betimsel istatistikler
***Table 2.*** *Descriptive statistics on the price variable*

| Minimum | 1. Çeyreklik | Medyan | Ortalama | 3.Çeyreklik | Maksimum |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9.5 | 14.8 | 13.75 | 17.5 | 27 |

Tobit modelde araç fiyatları bağımlı değişken olup sağdan sansürlenmiştir. Tablo 2 sonuçlarına bakılarak sağdan sansür değeri 17.5 olarak seçilmiştir. Sansür değeri belirlendikten sonra Tobit modelinin parametreleri klasik ve Bayesci yöntemlerle tahmin edilerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bayesci yöntemle parametre tahmininde kullanılan Markov zinciri için 11000 örneklem çekilmiştir ve alınan örneklemin baştan ilk 1000 verisi burn in değerleri olarak atılmış, analize dahil edilmemiştir.

**Tablo 3.** Gerçek verilere ilişkin sonuçlar
***Table 3.*** *Conclusions on real data*

| Değişkenler | Klasik tobit model | %95 güven düzeyinde güven aralıkları | p-değeri | Bayesci tobit model | %95′lik güvenilir aralıklar | Monte carlo standart hatası |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Kesim noktası** | 19.6605 | (18.605,20.7157) | 2.33e-14 | 19.74036 | (18.600,20.935) | 0.00579 |
| **Yaş** | 0.82278 | (-1.0102,-0.6354) | 2e-16 | -0.82630 | (-1.0310,-0.627) | 0.00102 |
| **Kilometre** | -0.04511 | (-0.0654,-0.0248) | 1.31e-5 | -0.04549 | (-0.0672,-0.0240) | 0.00011 |
| **Marka (Maxima)** | 1.76300 | (0.7475,2.7784) | 0.000667 | 1.75628 | (0.7580,2.840) | 0.00580 |
| **Marka (Accord)** | 1.57382 | (0.5523,2 .5953) | 0.00253 | 1.57989 | (0.5783,2.698) | 0.00559 |

Uygulamada fiyat bağımlı değişkeni sağdan sansürlenerek $y^*$ değerleri elde edilmiştir. Sansürlü bağımlı değişken değerleri kullanılarak Tobit modeline ait parametre tahminleri yapılmıştır. İncelenen klasik Tobit modele ait belirtme katsayısı $R^2$ =0.85168 olarak bulunmuştur. Yani, modelde kullanılan bağımsız değişkenlerin yaş, kilometre, marka (maxima) ve marka (Accord), bağımlı değişkendeki (Fiyat) toplam varyasyonunu açıklayabilme oranı 0.85168'dir. Klasik yaklaşımda, modeldeki tüm değişkenlere ilişkin $p$ −değerlerine bakıldığında hepsinin $\alpha = 0.05$ değerinden küçük olduğu görülmektedir. Buna göre, değişkenlerin modele katkısı önemlidir.

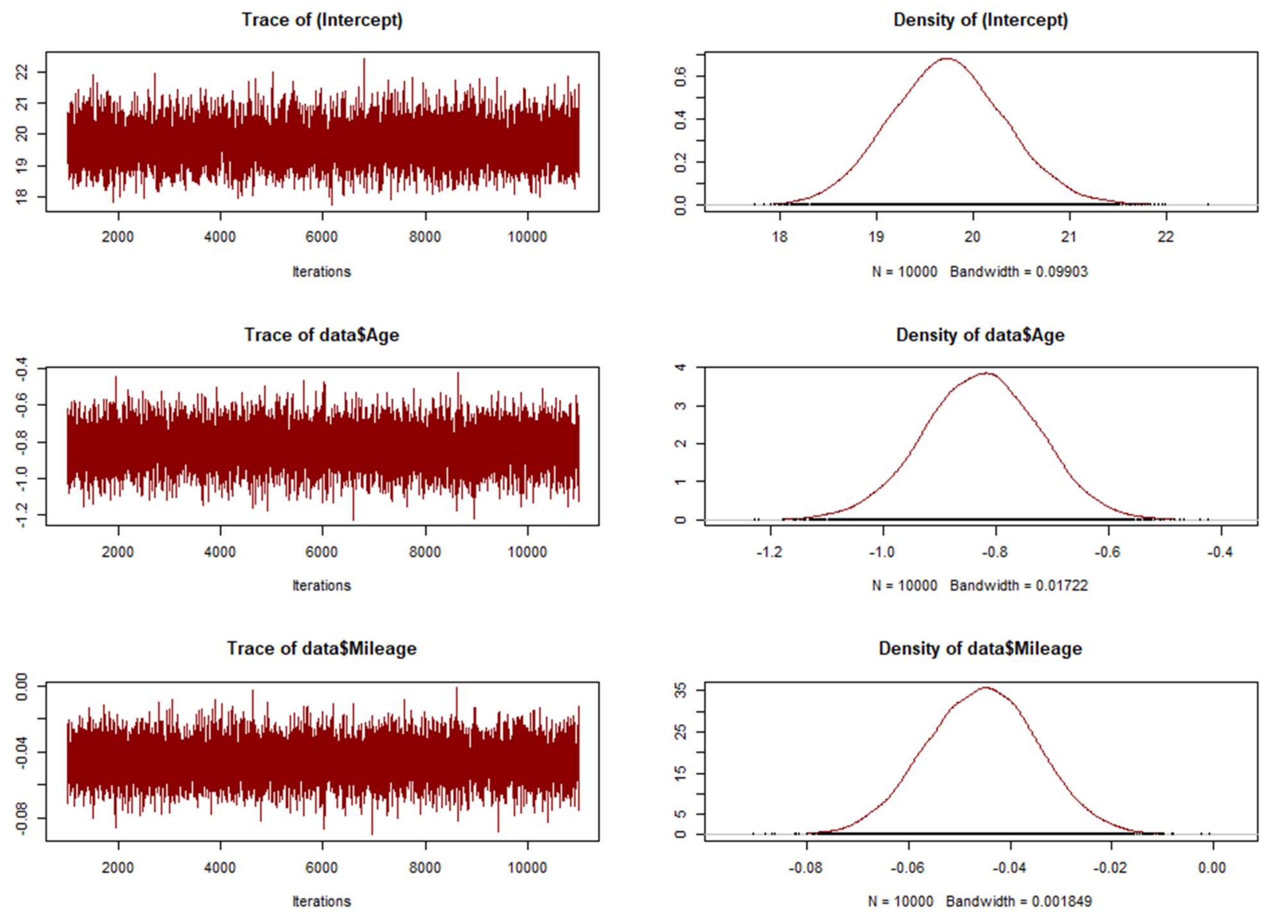
Bayesci yaklaşım için, model parametrelerine ilişkin Monte Carlo Standart Hataları elde edilmiştir. Örneklem sayısı arttıkça Monte Carlo standart hatasının 0'a yaklaşması gerekir. Bu anlamda bakıldığında, alınan örneklem sayısına göre bu değerlerin de beklenen ölçüde küçük olduğu söylenebilir.

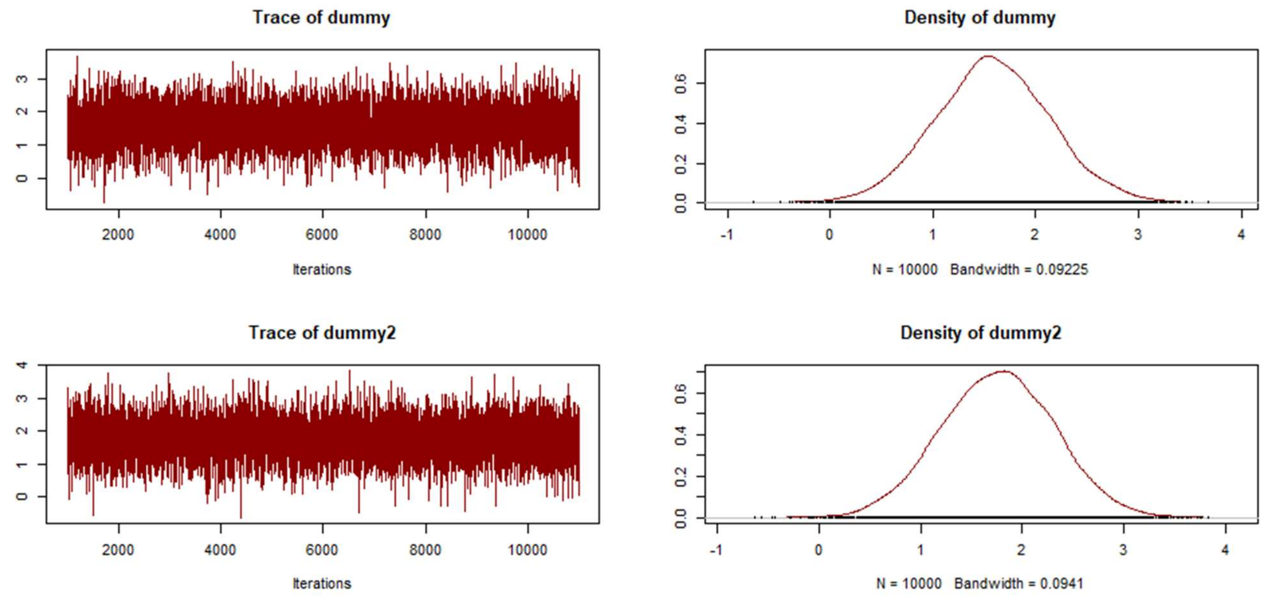
Buna göre elde edilen Tobit modeli,

$$\begin{aligned} Fiyat \; &= 19.6605 + 1.76300 \times Marka(Maxsima) \\ &\quad + 1.57382 \times Marka(Accord) \\ &\quad - 0.82278 \times Yaş - 0.04511 \\ &\quad \times Kilometre \end{aligned}$$

biçimindedir. Otomobilin fiyatını belirlemede kullanılan otomobil yaşı, kilometresi ve markası değişkenlerinin tümü önemlidir. Modele göre, diğer değişkenler sabit tutulduğunda otomobilin yaşındaki bir birim artış otomobilin fiyatında 0.82278 (bin$) lik azalışa sebep olur, diğer değişkenler sabit tutulduğunda otomobilin kilometresindeki bir birim artış otomobilin fiyatında 0.04511 (bin$) lik azalışa sebep olur.

Otomobil markaları, üç düzeyi bulunan nitel bir değişkendir ve nicel değişkenlere göre yorumu farklıdır. Çalışmada Mazda6 değişkeni temel düzey olarak alınmıştır. Bu da nitel değişken yorumu sırasında kolaylık sağlar. Modele göre, otomobil markaları değişkeninin düzeylerinden biri olan Maxima düzeyinin katsayısı 1.76300 dür. Tüm değişkenler sabit tutulduğunda bir Maxima marka otomobilin fiyatı Mazda6 marka otomobilin fiyatından 1.76300 (bin$) (19.6605+1.76300=21.4238) daha fazladır. Modele göre, otomobil markaları değişkeninin diğer düzeyi Accord düzeyinin katsayısı ise 1.57382 dür. Tüm değişkenler sabit tutulduğunda bir Accord marka otomobilin fiyatı Mazda6 marka otomobilin fiyatından 1.57382 (bin$) (19.6605+1.57382=21.23432) daha fazladır. Bayesci yöntemle elde edilen parametrelere ilişkin iz ve sonsal yoğunluk grafikleri şekil 3'teki gibidir.






**Şekil 3.** Parametreler için iz ve sonsal yoğunluk grafikleri
***Figure 3.*** *Trace and posterior density plots for parameters*

Şekil 3'te görülen iz grafiklerine bakıldığında örneklemenin geniş bir aralıkta değerler çekerek belli bir ortalama etrafında gezindiği görülmektedir. Parametrelere ilişkin sonsal dağılımlara bakıldığında normal dağılıma yakınsadığı görülmektedir.

## 6. Tartışma ve sonuçlar
*6. Discussion and results*

Bu çalışmada, ilk olarak Tobin' in probit model üzerinde çalışarak geliştirmiş olduğu Tobit modelden genel olarak bahsedilmiştir. Bu modele ait olabilirlik fonksiyonu verilmiş ve bu olabilirlik fonksiyonu kullanılarak parametrelere ilişkin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin elde edilişi anlatılmıştır. Daha sonra Tobit modeline Bayesci yaklaşım adımları verilmiştir. Bu adımlara göre, sonsal dağılım analitik olarak elde edilemediği için, sonsal dağılımdan örneklem çekme esasına dayanan simülasyon yöntemlerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu yöntemler MCMC yöntemleri olarak bilinir. Çalışmada MCMC yöntemlerinden Gibbs örnekleme algoritması anlatılmıştır.

Simülasyon çalışması için Matlab programında Normal dağılımdan üretilen sayılar kullanılarak parametre tahminleri ve güven aralıkları bulunmuştur. Sonuçlar hem klasik hem de Bayesci yaklaşımla Tobit modeli kullanılarak elde edilmiştir. Simülasyon sonuçlarından, Bayesci yaklaşım kullanılarak elde edilen güvenilir aralıkların klasik yöntemle elde edilen güven aralıklarına göre daha dar olduğu görülmüştür.

Simülasyon çalışmasından sonra internet üzerinden çekilmiş olan gerçek veriler için hem klasik hem de Bayesci yöntem kullanılarak Tobit modeli için sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlara göre Bayesci yaklaşımda bulunan güven aralıkları klasik yöntemle elde edilen güven aralıklarından daha dardır.

Simülasyon ve gerçek veri sonuçlarına göre, Bayesci yaklaşım ile elde edilen tahmin sonuçları klasik yöntemle elde edilen tahmin sonuçlarına oldukça yakındır. Bayesci yöntemle elde edilen güvenilir aralıklar klasik yöntemle elde edilen güven aralıklara göre daha dar bir aralığa sahiptir. Bu sonuçlara göre, Bayesci Tobit modeli yaklaşımının klasik Tobit modeline alternatif olarak kullanılabileceği söylenebilir.

**Yazar katkısı**
*Author contribution*

Yazarlar eşit katkıya sahiptir.

**Etik beyanı**
*Declaration of ethical code*

Çalışmanın hazırlanmasında ve yayın sürecinde hiçbir etik kural ihlali yapılmadığını kabul ve beyan ederiz.

**Çıkar çatışması beyanı**
*Conflicts of interest*

Yazarlar arasında çıkar çatışması yoktur.

**Kaynaklar**
*References*


Abbas, H. K., & Thaher, R. J. (2019). Bayesian adaptive lasso tobit regression. *Journal of AL-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics, 11*(1), 1-10, https://doi.org/10.29304/jqcm.2019.11.1.471

Adarabioyo, I., & Awe, O. O. (2020). Application of bayesian tobit regression to global radiation, *2020 International Conference in Mathematics, Computer Engineering and Computer Science (ICMCECS*). https://doi.org/10.1109/ICMCECS47690.2020.240848

Alhamzawi, R., & Ali, H.T.M. (2018). Bayesian tobit quantile regression with $L_{\frac{1}{2}}$ penalty*, Communications in Statistics - Simulation and Computation*, *47*(6), 1739-1750. https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1323224

Austin, P. C., Escobar, M., & Kopec, A. J. (2000). The use of tobit model for analyzing measures of health status. *Ouality of Life Research*, 901-910

Austin, P. C. (2002). Bayesian extensions of the tobit model for analyzing measures of health status. *Medical Decision Making, 22*(2), 152-162. https://doi.org/10.1177/0272989X0202200212

Baba, V.V. (1990). Methodological issue in modeling absence: a comparison of least squares and tobit analyses. *Journal of Applied Psychology*. *75*(4), 428–432. https://doi.org/10.1037/0021-9010.75.4.428

Bilir, K.B.Ö. (2016). *Bayesyen markov zinciri monte carlo simülasyonu.* Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Chib, S. (1992). Bayes inference in the tobit censored regression model, *Journal of Econometrics*, *51*(1-2), 79-99. https://doi.org/10.1016/0304-4076(92)90030-U

Dagenais, G.M. (1975). Application of a threshold regression model to household purchases of automobiles. *The Review of Economics and Statistics, 57*(3), 275-285

Dagne, G., & Huang, Y. (2012). Bayesian inference for a nonlinear mixed-effects tobit model with multivariate skew-T distributions: application to AIDS studies. *Int J Biostat, 8*(1). https://doi.org/10.1515/1557-4679.1387

Ekici, O. (2005). *Bayesyen regresyon ve winBUGS ile bir uygulama.* Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Emeç, H. (2016). Türkiye'de bölgelerarası tüketim harcamaları tobit model yaklaşımı, *Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi İdari Bilimler Fakültesi Dergisi. 16,* (2), http://hdl.handle.net/20.500.12397/1600

Emir, B. (2016). *Standart tobit regresyon modelinde kullanılan parametre tahmin yöntemlerinin karşılaştırılması*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü.

Eren, M. (2012). *Sınırlı bağımlı değişkenli modeller ve ülkelerin gelişmişlik düzeyleri üzerine uygulama.* Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Gamerman, D., & Lopes, H. F. (2006). *Markov chain monte carlo stochastic simulation for bayesian inference* (Second Edition), Chapman&Hall/CRC, London.

Geman, S., & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intellegence*, *6,* (6), 721-741.

Gelfand, A.E., & Smith, A. F. M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association, 85,* 398-409.

Gilks, W. R., Richardson, S., & Spiegelhalter, D. J. (1996). *Markov chain monte carlo in practice,* London.

Github veri setleri. (2020, 16 Haziran). https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html

Güneş, C., Üçdoğruk, Ş., & Saygın, Ö. (2016). Türkiye'de evli kadının çalışma saati üzerine tobit model uygulaması. *Eurasian Academy of Sciences Social Sciences Journal*, *8,* 95-109, http://doi.org/10.17740/eas.soc.2016.V8-05

Koç, Ş., & Şahin, M. (2018). Tobit model ve bir uygulama. *KSÜ Tarim ve Doğa Dergisi, 21*(1), 73-80. https://doi.org/10.18016/ksudobil.285929

Leiker, A. (2012). *A comparison study on the estimation in tobit regression models*. Master of Science Kansas State University Department of Statistics College of Arts and Science, ABD.

Link, W.A., & Barker, R. J. (2010). *Bayesian inference with ecological applications*, USA.

Maddala, G.S. (1992). *Econometrics* (Second Edition)*,* Macmillian Publishing Company, New York.

Olsen, R.J. (1978). Note on the uniqueness of the maximum likelihood estimator for the tobit model. *Journal of Econometric, 46*(5), 1211-1215.

Polasek, W., & Krause, A. (1994). The hierarchical tobit model: a case study in bayesian computing, *OR Spektrum, 16,* 145-154.

Tobin, J. (1978). Estimation of relationships for limited dependent variables*, Journal of Econometrica, 26,* (1), 24-36.

Üçdoğruk, Ş., Akın, F., & Emeç, H. (2001). Türkiye hane halkı eğlence kültür harcamalarında tobit modelin kullanımı. *Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 13-26.

Walsh, B. (2004). Markov chain monte carlo and gibbs sampling. http://nitro.biosci.arizona.edu/courses/EEB519A-2007/pdfs/Gibbs.pdf.

Zellner, A., & Rossi, E.P. (1984). Bayesian analysis of dichotomous quantal response models. *Journal of Econometrics,* 365-393.

Zhou, X. (2007). *Semiparametric and nonparametric estimation of tobit models*. Doctoral Dissertation, Hong Kong University of Science and Technology.