http://kefad.ahievran.edu.tr

Ahi Evran Üniversitesi
Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

Examining Secondary School Inclusive Students' Levels of Mathematics Abstraction

Elif Ertem Akbaş
Murat Cancan
Tuğçe Toygan

Article Information

CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.881356

Received: 16.02.2021
Revised: 18.05.2021
Accepted: 17.03.2022

Keywords:

Secondary School,
Special Education,
Inclusive Education,
Mathematics,
Abstraction

Abstract

The study aimed to examine secondary school inclusive students' mathematics abstraction levels. The research was designed as a case study that examined the "internal state" because the purpose was to describe and elaborate a case by determining a special case and because the case was limited in terms of time and place. The participants were 4 secondary school inclusive students studying at a secondary school in the city center of Van in the academic year of 2019-2020. While selecting the participants, the homogeneous group sampling technique, one of the purposeful sampling techniques, was used. In this respect, the mathematical abstraction levels of the students with the same level of readiness and disability were examined. The study was conducted using the live-course application of Education Informatics Network (EBA) due to the epidemic (coronavirus) affecting our country and the whole world. To examine the inclusive students' mathematical abstraction levels, a data collection tool including four open-ended questions was prepared by taking expert views. The results revealed that one of the students did not come out at any level of abstraction; two of them were at the experimental abstraction level; and one was at the reflective abstraction level.

Ortaokul Kaynaştırma Öğrencilerinin Matematik Soyutlama Düzeylerinin İncelenmesi

Makale Bilgileri

CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.881356

Yükleme: 16.02.2021
Düzeltme: 18.05.2021
Kabul: 17.03.2022

Anahtar Kelimeler:

Ortaokul,
Özel Eğitim,
Kaynaştırma,
Matematik,
Soyutlama

Öz

Bu araştırmanın amacı ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeylerini incelemektir. Araştırma zaman ve mekân ile sınırlandırılmış bir durum olması ve özel bir durumun belirlenmesi ile durumun betimlenmesi ve detaylandırılması amaçlandığından dolayı "içsel durumun incelendiği" bir durum çalışmasıdır. Araştırmanın katılımcılarını 2019-2020 Eğitim-Öğretim yılında Van il merkezindeki bir ortaokulda öğrenim gören 4 ortaokul kaynaştırma öğrencisi oluşturmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme tekniklerinden homojen grup örnekleme tekniği kullanılmıştır. Bu bağlamda aynı hazırbulunuşluk seviyesinde ve yetersizliğe sahip olan öğrencilerin matematik soyutlama düzeyleri incelenmiştir. Araştırma, ülkemizde ve tüm dünyada etki gösteren salgın (koronavirüs) sebebiyle Eğitim Bilişim Ağı (EBA) canlı ders uygulaması ile gerçekleştirilmiştir. Kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesi için uzman görüşü alınarak "zihinden toplama işlemi yapma" ve "örüntü oluşturma, devam ettirme ve genelleyebilme" kazanımları ile ilgili her biri dört açık uçlu sorudan oluşan veri toplama aracı hazırlanmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerden biri herhangi bir soyutlama düzeyinde çıkmamış, ikisi deneysel soyutlama düzeyinde ve biri de birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyinde çıkmıştır.

Sorumlu Yazar : Ad Soyad, Ünvan, Kurum, Ülke, e-posta, ORCID ID: XXXXX XXXXX XXXXX XXXXXX

Yazar2 Ad Soyad, Ünvan, Kurum, Ülke, e-posta, ORCID ID: XXXXX XXXXX XXXXX XXXXX

Atıf için: Ertem Akbaş, E., Cancan, M., & Toygan, T. (2022). Ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesi. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(Özel Sayı), 427-471.

Giriş

Öğrenim hayatına herhangi bir desteğe ihtiyaç duymadan devam eden öğrenciler olduğu gibi, bireysel farklılıklarından dolayı desteğe ihtiyaç duyan öğrenciler de vardır. Akçamete (2015), özel eğitime ihtiyaç duyan öğrencilerin, eğitimden daha fazla yararlanabilmek ve eğitsel gereksinimlerini karşılayabilmeleri için bireyselleştirilmiş eğitim ve ilgili hizmetlere ihtiyaç duyduklarından bahsetmiştir. İhtiyaç duydukları eğitimin genel eğitim sınıflarında yani en az kısıtlayıcı ortamda verilmesi önemlidir. Çünkü en az kısıtlayıcı ortam öğrencinin akranlarıyla fiziksel, sosyal ve eğitsel olarak kaynaştırılmasını sağlamaktadır. Her birey için öğrenme farklıdır (Sucuoğlu, 2010). Dolayısıyla özel eğitime ihtiyacı olan öğrenciler için de ayrı bir plan hazırlanması gerekmektedir. Özel eğitime ihtiyacı olan bireylerin; fiziksel özellikleri ve eğitim ihtiyaçları doğrultusunda belirlenen amaçlara ulaşmaya yönelik bireyselleştirilmiş eğitim programı hazırlanmaktadır. Bu programların öğrencilere uygulanma yeri, eğitim ortamları, öğrencilerin yeterliliklerine ve ihtiyaçlarına göre değişiklikler göstermektedir Kaynaştırma/bütünleştirme yoluyla eğitimlerine devam eden öğrencilerin destek eğitim alabilmesi için destek eğitim odaları hazırlanmaktadır. Dolayısıyla özel eğitime ihtiyacı olan bireyler, akranlarından ayrılmadan ve ihtiyaçları doğrultusunda eğitim alarak, bağımsızlıklarını kazanabilmektedirler. Bağımsızlıklarını kazanmaları toplumsal rolleri de üstlenmelerini sağlamaktadır. Genel olarak bu tür çalışmaların tamamına bakıldığında özel eğitime ihtiyacı olan bir çocuğa ilişkin sınıf içinde, okulda veya ev ortamında yapılabilecek eğitsel ve davranışsal uyarlamalara dair bilgi veren çalışmalara ihtiyaç olduğu düşünülmektedir (Doğaroğlu, 2013).

Özel eğitime ihtiyaç duyan bireylere eğitsel ve sosyal ihtiyaçlarını karşılamak üzere verilen eğitim özel eğitim olarak tanımlanmıştır (Özel Eğitim Hizmetleri Yönetmeliği). Bu tanım doğrultusunda özel eğitimin amacı özel eğitime ihtiyaç duyan bireylere yeterlilikleri ve ihtiyaç duydukları alanda eğitim vererek başta kendilerine yeterli olmalarını sağlamak ve topluma kazandırmaktır (ÖEHY, 2020).

Sorgun Rehberlik Araştırma Merkezi (Sorgun RAM, 2017) doğum öncesi, doğum anı ve doğum sonrasında meydana gelen nedenlerden dolayı bazı bireylerde görülen aksaklıkları yetersizlik olarak tanımlanmıştır. Bu yetersizlik türleri bedensel, zihinsel yetersizlik, görme, işitme yetersizliği, dil ve konuşma bozukluğu, öğrenme güçlüğü, süreğen hastalıklar, gelişimsel bozukluklar, dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluklarıdır. Bu çalışmada öğrenme güçlüğü, dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluğu olan öğrenciler ile çalışıldığından dolayı bu iki yetersizlik türünün açıklamalarından bahsedilecektir.

Öğrenme Güçlüğü

Çocuğun okuma-yazma, matematik, konuşma-dinleme, akıl yürütme yeteneğini kazanma ve kullanabilmesinde yaşadığı zorluk olarak tanımlanmıştır (MEB, 2014). Ayrıca öğrenme güçlüğü gelişimsel bozukluk olarak tanımlanmıştır (MEB, Modül-5). Özel öğrenme güçlükleri: okuma güçlüğü (disleksi), yazma güçlüğü (disgrafi), matematik güçlüğü (diskalkuli) şeklinde sınıflandırılabilir.

Dikkat Eksikliği ve Hiperaktivite Bozukluğu

Bireyin akranlarına göre normal olmayan dikkat sorunları, yerinde duramama ve istekleri erteleyememe (dürtüsellik) ile genetik ya da çevresel farklılıklar nedeniyle kendini gösteren bir bozukluk olarak tanımlamıştır (Sorgun RAM, 2017).

Kaynaştırma/Bütünleştirme Yoluyla Eğitim

Özel eğitimin temel aldığı amaçlardan biri olan kaynaştırma eğitimi öğrencilerin eğitimlerini yaşıtlarıyla birlikte almalarına olanak sağlar. Bu olanak ile özel eğitime ihtiyacı olan bireyler, kaynaştırma/bütünleştirme yoluyla eğitimlerine yaşıtları ile birlikte aynı sınıfta tam zamanlı veya özel eğitim sınıflarında yarı zamanlı olarak devam edebilirler. Özel eğitim okullarında her tür ve kademedeki eğitim programları kaynaştırma/bütünleştirme yoluyla eğitim verilebilir (ÖEHY, 2020).

Yapılandırmacılık ve Soyutlama

Yapılandırmacılık bilginin nasıl oluştuğu, insanın bilgiyi nasıl elde ettiği ile ilgili bir kuramdır. Piaget' ye göre zihinsel gelişimin temelinde yapısalcı öğrenme kuramı vardır. Bu kurama göre bilgi zihinsel gelişme sürecinde birey tarafından zihinde yapılandırılır. Birey bilgiyi kendi zihninde yapılandırdığı için süreci içselleştirir. Öğrencinin bilgiyi yapılandırdığı süreç Piaget'ye göre içsel bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Zembat, 2016). Piaget öğrenme kavramını yani içselleştirme sürecini özümseme, düzenleme ve denge kavramları ile açıklamıştır.

Toplumun ihtiyaç duyduğu insan yapısının zaman içerisinde değişmesine bağlı olarak öğretim programlarında da bu doğrultuda değişikliğe gidilmiştir. Buna bağlı olarak 2005 program değişikliğinden itibaren yapılandırmacı yaklaşım öğretim programlarında yer almıştır. Öğretim programlarında yapılandırmacı yaklaşımın egemen olmasının en önemli nedenlerinden biri öğrencilerin matematiksel bilgiyi yeterince soyutlayamamasıdır. Bilişsel dengenin bozulması ile birey eski bilgi ve deneyimleri arasında ilişki kurarak derin düşünmeye yönelir. Pesen'e (2008) göre, soyutlamanın oluşması matematiksel yapılar arasındaki bu ilişkilerin kurulmasına bağlıdır.

Piaget, soyutlamanın bilişsel bir süreç olduğunu savunmuştur. Soyutlama kavramını, deneysel soyutlama (empirical abstraction) ve yansıtıcı (reflective abstraction) olarak ikiye ayırmıştır (Zembat, 2016). Deneysel soyutlama nesnelerin görünen özellikleri (rengi, biçimi, vs.) ile ilgili çıkarım yapılmasıdır. Burada nesnelerin fiziksel özelliklerinden yararlanıldığı için matematiksel anlamda bir genelleme yapılmaz (Zembat, 2016). Yansıtıcı soyutlama bireyin yaptığı eylemler ve zihnindeki ilişkiler arasında kurduğu yeni çıkarımlar ile ilgilidir. Yansıtıcı soyutlamada birey bilgiyi zihninde yeniden yapılandırdığı öğrenme sürecini içselleştirdiği için matematiksel genellemelere ulaşır (Zembat, 2016). Piaget (2001), yansıtıcı soyutlama düzeyini "reflecting abstraction, reflected abstraction ve metareflection" üç aşamada ele almıştır. Zembat (2016), bu kavramların hiyerarşik bir sıralamaya sahip olmasından dolayı Türkçeye çevirirken anlam kaybını önlem amacıyla yansıtıcı soyutlama düzeylerini; birinci, ikinci ve üçüncü derece yansıtıcı soyutlama düzeyleri olacak şekilde ele almıştır. Bu çalışmada kazanımlara ait soyutlama düzeylerinin belirlenmesinde Zembat'ın (2016) denk kesir kavramına ilişkin hazırladığı soruların matematik soyutlama düzeyleri temel alınmıştır.

Özel Eğitim ve Matematik Eğitimi

Özel eğitime ihtiyaç duyan bireylere, ihtiyaç duydukları alanlarda eğitim verilmesi gerekliliğinden dolayı bu bireylere kaba değerlendirme formu uygulanır. Kaba değerlendirme formu bireyselleştirilmiş eğitim planı (BEP) hazırlamadan önce uygulanan yüzeysel bir değerlendirmedir (ÖEHY,2020). Kaba değerlendirme formuna matematik öğretim programında bulunan tüm kazanımlar yazılmalıdır. Kaba değerlendirme yapılırken, bireyin kazanımı yapıp yapamadığına ya da bilip bilmediğine bakılır. Bu değerlendirmeye göre öğrencinin gelişimsel ve fiziksel özellikleri de dikkate alınarak bireyselleştirilmiş eğitim planı hazırlanır.

Matematiksel bilgilerin soyutlanma süreci, yapılandırmacı yaklaşımın 2005-2006 eğitim öğretim yılında öğretim programlarında yer almasıyla birlikte daha da önem kazanmıştır. Bu doğrultuda matematik dersi öğretim programının ulaşmaya çalıştığı özel amaçlar, öğrencilerin matematiksel kavramları anlayabilmeleri ve günlük hayatta kullanabilmeleri, üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirebilecek şekilde kendi öğrenme süreçlerini bilinçli biçimde yönetebilmeleri şeklinde düzenlenmiştir (MEB, 2018). Matematik öğretiminin amacına ulaşabilmesi için uyulması gereken ilkeler "kavramsal temellerin oluşturulması, ön şartlılık ve anahtar kavramlara dikkat edilmesi, öğretim sürecine çevreyi ve araştırma çalışmalarını dahil edip öğretmene ve öğrenciye uygun görevler verilmesi, matematiğe karşı olumlu tutum geliştirilmesi" şeklinde belirtilmiştir (Altun, 2015). Matematik ilkelerine dikkat edilerek öğretim yapılması, öğretimi sıradanlıktan kurtaracağı için özel eğitime ihtiyacı olan bireylerin soyut kavramları öğrenmesini kolaylaştıracaktır. Matematik soyut bir alan olduğundan ve soyutlama yapmak gerektiğinden öğrenciler matematiksel bilgiyi yapılandırmakta zorluk çekmektedirler.

Normal öğrenciler gibi özel eğitime ihtiyaç duyan öğrencilerin de eğitim hakkı vardır. En az kısıtlayıcı ortam olan kaynaştırma eğitimi, öğrencilere yaşıtlarıyla birlikte eğitim alma imkânı sunar. Böylelikle kaynaştırma eğitimiyle öğrencinin eğitsel performansının yanı sıra, sosyal gelişimine de katkı sağlanır. Matematik soyut ve genellikle anlaşılması zor bir ders olduğu için özel eğitime ihtiyaç duyan bireylere daha anlaşılmaz gelebilmektedir. İşte bu anlamda kaynaştırma öğrencilerinin eğitim sürecine daha fazla dâhil olabilmeleri ve eğitim-öğretim sürecinden daha iyi yararlanabilmeleri göz önünde bulundurularak, bu araştırmanın problem durumları aşağıda belirtildiği gibi belirlenmiştir.

- Öğrencilerin yetersizlik türlerinin aynı olması matematik soyutlama düzeylerini etkiler mi?

- Öğrencilerin hazırbulunuşluk düzeylerinin aynı olması matematik soyutlama düzeylerini etkiler mi?

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Bu araştırmada ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin bireyselleştirilmiş eğitim planı doğrultusunda belirlenen kazanımlar ile ilgili hazırlanan sorular ile matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Araştırma zaman ve mekân ile sınırlandırılmış bir durum olması ve özel bir durumun belirlenmesi, betimlenmesi ve detaylandırılması amaçlandığından "içsel durumun incelendiği" bir durum çalışmasıdır. Burada ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeyleri kendi koşulları içinde tanımlanmaya çalışılmıştır. Stake'ye (1995) göre, nitel bir durum çalışması eşi olmayan bir durumu ortaya koymak için tasarlanabilir. Creswell (2002), eşi olmayan bu durum betimlemesini detaylı incelemenin kendine has bir tabiatı vardır, diyerek içsel durum çalışmasını vurgulamıştır. Bu amaçla araştırmaya katılan ortaokul kaynaştırma öğrencilerine kazanımları doğrultusunda uzman görüşü alınarak hazırlanan 4 açık uçlu soru uygulanmıştır.

Çalışma Grubu

Araştırmanın katılımcılarını 2019-2020 eğitim-öğretim yılında Van il merkezindeki sosyo-ekonomik statüsü düşük bir okulda öğrenim gören 4 ortaokul kaynaştırma öğrencisi oluşturmaktadır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme tekniklerinden homojen grup örnekleme tekniği kullanılmıştır. Bu bağlamda aynı hazırbulunuşluk seviyesinde ve aynı yetersizliğe sahip olan öğrencilerin matematik soyutlama düzeyleri incelenmiştir. Uygulamaya katılan ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin isimleri gizli tutularak Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 şeklinde kodlanmıştır. Aşağıda Tablo 1 ve Tablo 2'de katılımcıların demografik özellikleri ve hazırbulunuşluk seviyeleri sunulmuştur.

Tablo 1. *Uygulamaya katılan kaynaştırma öğrencilerinin demografik özellikleri*

Öğrenci Kodu	Cinsiyet	Sınıf Seviyesi	Yetersizlik Alanı
Ö1	K	5	Dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluğu
Ö2	E	5	Dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluğu
Ö3	E	7	Özel öğrenme güçlüğü
Ö4	E	7	Dikkat eksikliği ve hiperaktivite bozukluğu ve özel öğrenme güçlüğü

Tablo 2. *Araştırmaya katılan öğrencilerin matematik dersi hazırbulunuşluk seviyeleri*

Öğrenci Kodu	Hazırbulunuşluk Düzeyi	Ulaşılması Beklenen Hedef
Ö1 ve Ö2	Eldeli ve eldesiz verilen toplama işlemlerini yapabilme	Zihinden toplama işlemi yapabilme
Ö3 ve Ö4	Geometrik cisim ya da şekillerden tekrar eden örüntüdeki kuralı sözel olarak ifade eder ve devam ettirebilme	Kuralı verilen sayı ya da şekil örüntülerinde istenilen adımı bulabilme

Demografik bilgiler kısmında araştırmaya katılan öğrencilerden cinsiyet ve sınıf düzeyi bilgileri alınmıştır. Okul rehber öğretmeni ile görüşülerek uygulamaya katılan öğrencilerin hangi alanda yetersizlik yaşadıkları öğrenilmiş ve demografik bilgiler kısmına eklenmiştir.

Uygulama Süreci

2019-2020 Eğitim-Öğretim yılında Van il merkezinde, 4 ortaokul kaynaştırma öğrencisine araştırma için gerekli izinler alınarak ders etkinlikleri ve hazırlanan sorular uygulanmıştır. Ülkemizde ve tüm dünyada etki gösteren salgın (koronavirüs) sebebiyle uygulama, Eğitim Bilişim Ağı (EBA) üzerinden öğrenciler ile görüşülerek gerçekleştirilmiştir. Araştırma iki hafta olarak planlanmış ve araştırmanın ilk haftası öğrencilerin konu ile ilgili eksik bilgilerini gidermeye yönelik olmuştur. İkinci hafta ise konu ile ilgili matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesine yönelik hazırlanan sorular uygulanmıştır. Bulgular bölümünde canlı derslerin hafta hafta ve ders ders nasıl uygulandığı yazılmış olup her öğrenci ile bireysel çalışılmıştır.

Araştırma sırasında veri toplama işlemlerine ait çalışma takvimi aşağıda verilmiştir.

1. Matematik soyutlama düzeylerini belirlenmeden önce Kaba Değerlendirme Formu ile öğrencilerin yetersiz olduğu kazanımlar (hazırbulunuşlukları) belirlenmiştir. Bu doğrultuda ders planı hazırlanmıştır.

2. Birinci hafta yetersiz oldukları alan ile ilgili hazırlık soruları uygulanmıştır.

3. İkinci hafta ise matematik soyutlama düzeylerini belirlemek amacıyla hazırlanan sorular uygulanmıştır.

Veri Toplama Araçları

Araştırma için önce literatür taraması yapılmıştır. Ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeylerini belirlemek amacı doğrultusunda konu ile ilgili yasal dayanaklar, yüksek lisans ve doktora tezleri, makaleler, kitaplar, internet ve MEB ilkokul ve ortaokul matematik dersi öğretim programı detaylı olarak incelenmiştir. Bu incelemeler sonunda alana hâkim uzman görüşü alınarak dörder ana sorudan oluşan açık uçlu sorular hazırlanmıştır.

Ö1 ve Ö2 için hazırlanan sorular "demografik bilgiler ve sorular" olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Sorular kısmında; konuyla ilişkili dört ana soru bulunmaktadır. Bu dört soru aynı amaca (zihinden toplama işlemini yapabilecek stratejiler geliştirme) hizmet etse de matematik soyutlama düzeyleri birbirinden farklıdır. Birinci soru iki alt sorudan, ikinci soru üç alt sorudan, üçüncü soru dört alt sorudan ve dördüncü soru dört alt sorudan oluşmaktadır. Aşağıda Ö1 ve Ö2'nin matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesi için hazırlanmış sorular ve sorulara göre matematik soyutlama düzeyleri açıklanmıştır.

- Birinci ve ikinci sorularda, öğrencilerden modellenilerek verilen toplama işleminin yapılması istendiği için öğrenciler fiziksel bir modellemeden yararlanarak bu soruyu yapabilirler ise deneysel soyutlama (empirical abstraction) düzeyi,

- Üçüncü soruda, toplama işleminin değişme ve birleşme özelliği öğrencilerin zihinlerinde canlandırdıkları düşünceleri ifade edebilmelerine olanak sağladığından birinci derece yansıtıcı soyutlama (reflecting abstraction) düzeyi,

- Dördüncü soruda, strateji geliştirerek verilen toplama işlemlerini yapması istenmiştir. Burada öğrencinin sayı ilişkilerini kullanması, sayıları farklı şekillerde birleştirip ayırabilmesi; üçüncü soruya göre daha fazla mantıksal düşünme içerdiğinden dolayı ikinci derece yansıtıcı soyutlama (reflected abstraction) düzeyi,

olarak belirlenmiştir.

Ö3 ve Ö4 için hazırlanan sorular da konuyla ilişkili dört ana sorudan oluşmaktadır. Bu dört ana soru aynı amaca (örüntü oluşturma, örüntüyü devam ettirme ve genelleme) hizmet etse de matematik soyutlama düzeyleri birbirinden farklıdır. Dört soru da iki alt sorudan oluşmaktadır. Aşağıda Ö3 ve Ö4'ün matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesi için hazırlanmış sorular ve sorulara göre matematik soyutlama düzeyleri açıklanmıştır.

- Birinci soruda, öğrenciler verilen örüntüyü devam ettirirken, şekillerden yani fiziksel bir modellemeden yararlandıkları için deneysel soyutlama (empirical abstraction) düzeyi,

- İkinci ve üçüncü sorularda, artık geometrik örüntüler yerine basit düzeyde sayı örüntüleri verilmiştir. Sayı örüntülerini görmek, zihinde canlandırmak fiziksel modelleme sorularına göre daha soyut olduğundan ve dolayısıyla derin düşünmeyi gerektirdiğinden birinci derece yansıtıcı soyutlama (reflecting abstraction) düzeyi,

- Dördüncü soruda, örüntünün herhangi bir noktasında ne olacağını bulabilmek, örüntülerin genişlediğini zihinlerinde canlandırabilmek cebirsel olarak daha derin düşünmeyi gerektirdiğinden ikinci derece yansıtıcı soyutlama (reflected abstraction) düzeyi,

- Son olarak örüntüleri; fonksiyon, aritmetik ve geometrik dizi ile ilişkilendirebilmek ise üçüncü derece yansıtıcı soyutlama (metareflection) düzeyi,

olarak belirlenmiştir. Üçüncü derece yansıtıcı soyutlama ortaöğretim ve yükseköğretim seviyesindeki öğrencilere uygun olduğundan bu seviyeye dair örneklere yer verilmemiştir.

Zembat'ın (2016) denk kesir kavramının öğretimine ilişkin hazırladığı soruların soyutlama düzeyleri ve bu soyutlama düzeylerini nasıl açıkladığı temel alınarak belirlenen kazanımların soyutlama düzeylerine dair aşağıdaki çerçeve, uzman görüşü alınarak oluşturulmuştur.

Tablo 3. *Kazanımlara dair soyutlama düzeyleri ve açıklamaları*

	Düzeyler			
Kazanımlar	Deneysel Soyutlama (0.)	1. Derece Yansıtıcı Soyutlama (1.)	2. Derece Yansıtıcı Soyutlama (2.)	3. Derece Yansıtıcı Soyutlama (3.)
Zihinden toplama işlemi yapmaya yönelik stratejiler oluşturma.	Modelle verilen toplama işlemini yapabilme. Fiziksel nesnelerden yararlanılarak yapıldığı için yansıtıcı düşünme gerçekleşmemiştir.	Toplama işleminin değişme ve birleşme özelliğini kullanabilme. Fiziksel nesnelerden yararlanmadan, toplama işlemine ait bu iki özelliği kullanabilmeleri süreci içselleştirdikleri, derin düşündükleri gösterir.	Kendi stratejilerini üreterek verilen toplama işlemini yapabilme. Verilen stratejiyi açıklayabilme. Öğrencilerin kendi stratejilerini üreterek işlem yapması daha az hata yapmalarına olanak sağlar. Bu düzeyde öğrenci var olan stratejiyi açıklayabildiği ve kendi stratejisini üretebildiği için yansıtıcı soyutlama gerçekleşmiştir. Bir önceki düzeye göre daha derin bir düşünme vardır.	
Örüntü oluşturma, verilen örüntüyü devam ettirme ve örüntünün kuralını bulma.	Verilen geometrik örüntülerin bir sonraki adımını çizebilme. Öğrenci fiziksel nesnelerden yararlanarak bir sonraki adıma ulaştığı için yansıtıcı soyutlama düzeyi gerçekleşmemiştir.	Verilen sayı örüntüsünün bir sonraki adımını tahmin edebilme ve kuralı bozan sayıyı bulabilme. Sayı örüntüleri arasındaki ilişkiyi görebilmek, geometrik şekiller arasındaki ilişkiye göre daha derin düşünmeyi gerektirir.	Genişleyen örüntü. Örüntünün herhangi bir noktasında ne olacağını söyleyebilme. Bu düzeyde öğrencinin, örüntünün herhangi bir noktasında ne olacağını söyleyebilmesi için cebirsel olarak örüntüyü genellemesi gerekir. Bu da cebirsel düşünmeyi ve dolayısıyla bir önceki düzeye göre daha derin düşünmeyi gerektirir.	Verilen örüntüyü aritmetik ve geometrik dizi olarak ifade edebilme.

Verilerin Analizi

Çalışma kapsamında hazırlanan sorular uygulandıktan sonra katılımcıların hazırbulunuşlukları doğrultusunda Tablo 3' teki çerçeveden yararlanarak soyutlama düzeyleri oluşturulmuştur. Elde edilen veriler bu soyutlama düzeyleri kapsamında analiz edilmiştir. Aşağıda Tablo 4'te katılımcılar için oluşturulan soyutlama düzeylerine yer verilmiştir.

Tablo 4. *Katılımcıların soyutlama düzeyleri*

Öğrenciler	Düzeyler			
	Deneysel Soyutlama	1. Derece Yansıtıcı Soyutlama	2. Derece Yansıtıcı Soyutlama	3. Derece Yansıtıcı Soyutlama
Ö1	Modelleme ile verilen toplama işlemini yapar. Verilen toplama işlemini modeller.	Verilen toplama işlemini değişme ve birleşme özelliğini kullanarak yapamamıştır.	Verilen toplama işlemleri için strateji geliştirememiştir.	
Ö2	Modelleme ile verilen toplama işlemini yapar. Verilen toplama işlemini modelleyemez.	Verilen toplama işlemini değişme ve birleşme özelliğini kullanarak yapamamıştır	Verilen toplama işlemleri için strateji geliştirememiştir.	
Ö3	Verilen geometrik örüntünün bir sonraki adımını tahmin eder.	Verilen sayı örüntüsünün bir sonraki adımını ve sayı örüntüsündeki kuralı bozan sayıyı bulamamıştır.	Verilen örüntüye dair kural oluşturamamıştır.	
Ö4	Verilen geometrik örüntünün bir sonraki adımını tahmin eder.	Verilen sayı örüntüsünün bir sonraki adımını ve sayı örüntüsündeki kuralı bozan sayıyı bulamamıştır.	Verilen örüntüye dair kural oluşturamamıştır.	

Araştırmanın Etik İzinleri

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri

Bu araştırma için Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Etik Kurulunun 27.03.2020 tarih ve 2020/02-06 sayılı kararında etik açıdan uygunluk onayı verilmiştir.

Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı = Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Etik Kurulu

Etik değerlendirme kararının tarihi= 27.03.2020

Etik değerlendirme belgesi sayı numarası=25477

Bulgular

Bu bölümde ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeylerinin incelenmesi doğrultusunda elde edilen bulgular Ö1-Ö2 ve Ö3-Ö4 için uygulanan haftalar ve incelenen alt problemler doğrultusunda sunulmuştur.

1. Hafta / 1. Canlı Ders

Bu canlı derste "zihinden toplama işlemini yapabilecek stratejiler geliştirir." kazanımına ilişkin "toplama işlemini modellerle açıklar ve eldeli ve eldesiz toplama işlemini yapar" davranışları işlenmiştir.

Öğretmen EBA'ya girerek canlı dersi başlatır ve toplama işleminin modellenmesine ilişkin hazırladığı soruları kendi bilgisayar ekranında açarak öğrencisi ile ekranı paylaşır. Öğretmen öncelikle onluk taban bloklarını öğrenciye tanıtır. Daha sonra ise toplama işleminde modellenilerek verilen ilk toplananı öğrenciden söylemesini ister. Öğrenci onlukları ve birlikleri sayarak sayıya ulaşır ve aynı şekilde ikinci toplananı da bulur. Toplam öncelikle onluklar ve birlikler sayılarak bulunur. Öğretmen, öğrenciye bu işlemi modelleme kullanmadan nasıl yapılabileceğini sorar. Öğrenci, sayıları alt alta yazarak yapabileceğini söyler. Bu durumda öğretmen, öğrenciye işlemi yapması için zaman verir. Öğretmen sonucu, öğrenciden modelleyerek yapmasını ister ve onluk taban blokları ile modelleme yapılır. Öğretmen, toplanan sayıların ve toplamın onlukları ile birlikleri arasındaki ilişkiyi görmesi için öğrenciye sorular yöneltir. Öğrenciye; önce onlukları, sonra birlikleri en son hepsini toplayabileceği keşfettirilmeye çalışılır. Hazırlanan diğer modelleme soruları öğrenciye aynı şekilde yaptırılır. Son olarak öğretmen, canlı ders süresinde öğrencinin katılımının iyi olduğunu ve bir sonraki canlı derste neler yapacaklarını söyleyerek dersi sonlandırır.

1. Hafta / 2. Canlı Ders

Bu canlı derste "üç ve dört basamaklı sayılarla eldeli toplama işlemi yapar ve toplama işleminin değişme ve birleşme özelliğini açıklar" davranışları işlenmiştir.

Öğretmen bir önceki canlı derste neler yaptıklarını, öğrenciden hatırlatmasını ister. Öğrencinin bir önceki canlı dersle ilgili eksik öğrenmeleri giderilerek üç ve dört basamaklı sayılarla ilgili toplama işlemi örneklerine geçilir. Öğrenciden modelleme kullanmadan toplama işlemini yapması istenir. Toplananlardan birinin 100, 200, 300 ve 400 toplama işlemleri verilir ve öğrencinin yüzlükleri toplayarak sonuca ulaşabileceğinin keşfettirilmesi sağlanır. Daha sonra ikiden fazla toplananın olduğu toplama işlemi olan diğer soruya geçilir. Öğretmen, karşılaşılan sayılar ile nasıl bir değişikliğin işlem kolaylığı sağlayacağını sorar. Öğrenci, küçük sayıları önce toplayabiliriz, cevabını verir. Öğretmen tarafından "17 + 46 + 13 + 74" sorusunda öğrencinin deyimiyle küçük sayıları toplayabilmek için sayıların yer değiştirmesi ve "49 + 13 + 27" bu soruda ise küçük sayıları toplayabilmek için gruplama yapılması gerektiğine dikkat çekilir. Toplama işleminin değişme ve birleşme özelliği olduğu ve bu özelliklerin işlem kolaylığı sağladığı açıklanır.

1.Hafta / 3.Canlı Ders

Bu canlı derste "zihinden toplama işlemini yapar ve zihinden işlemi verilen toplama işlemini yazar" davranışları işlenmiştir.

Öğretmen EBA üzerinden zihinden toplama etkinliği olan "karpuz toplama" oyununu açar. Bu oyunda belirli süre içerisinde verilen toplama işlemlerini yapması istenmektedir. Öğrenci, süre olması sebebiyle verilen toplama işlemlerini istemsiz olarak zihinden yapmaya çalışmıştır. Öğretmen oyunda olduğu gibi, işlemleri uzun uzun yazarak yapmak yerine zihnimizden de yapılabileceğimizi söylemiştir. Öğrencilerin oyun esnasında kazanma hırsı olduğundan karşısına çıkan bazı toplama işlemlerini rastgele yaptıkları görülmüştür. Öğretmen, birinci canlı derste yaptıkları modelleme sorularını tekrar açarak bu işlemleri de zihinden yapabileceklerini söylemiş ve nasıl yol izlemeleri gerektiğini öğrencilere sormuştur. Burada öğrencilerden kendi stratejilerini geliştirmeleri beklenmiştir. Fakat öğrenciler alt alta yazarak toplayabileceklerini söylemişlerdir. Son olarak öğrencilere zihinden yapılmış işlem adımları ile gösterilerek, bu toplama işleminin ne olduğu sorulmuştur. Öğrenciler ekranda gördükleri toplama işlemini söyleyerek yanlış cevap vermişlerdir. Öğretmen toplama işlemini daha kolay yapabilmek için toplanan sayıları parçalayabiliriz, diyerek başka bir örnek üzerinden açıklamıştır. Bu örnek üzerine öğrenciler zihinden yapılan toplama işleminin ne olduğunu söyleyebilmişlerdir.

2.Hafta /1. Canlı Ders

Bu canlı derste "zihinden toplama işlemi yapabilecek stratejiler geliştirir" davranışı işlenmiştir.

Öğretmen, öğrencinin zihinden toplama becerilerini geliştirebilmek için beşinci sınıf matematik ders kitabında bulunan toplama işlemiyle ilgili örnekleri öğrencilerden yapmalarını ister. Çok sayıda toplananın bulunduğu bu örnekler öğrencileri zihinden toplamaya, strateji geliştirmeye yönlendirmiştir. Öğretmen, öğrencilerin strateji geliştirebilmesi için rehberlik etmiştir. Ayrıca son olarak, zihinden toplama işlemini günlük hayatla ilişkilendirerek öğrencide anlamlı olmasını sağlamaya çalışılmıştır. Örneğin; "annemiz markete gidip; un, şeker, yağ, süt, yumurta ve kakao almamızı istedi." Burada öğrenciden paranın yeterli olup olmadığını anlayabilmesi için, "alınacak ürünlerin fiyatlarını zihnimizde yaklaşık olarak toplayarak" bulabiliriz, çıkarımı yaptırılmak istenmiştir.

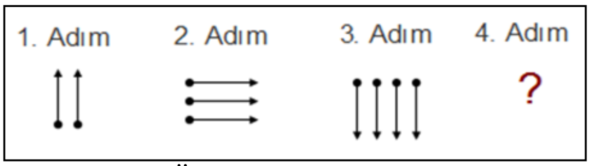
2. Hafta / 2. Canlı Ders

Bu canlı derste öğretmen, araştırma için hazırlanan soruları uygulayacağını söylemiş ve notla değerlendirilmeyeceği bilgisi vererek öğrencilerden yapmasını istemiştir. Öğrencilere anlamadığı veya takıldığı yerlerde bir önceki derslerdeki örnek soruları hatırlatarak rehberlik edilmiştir. Soruların çözüm aşamasında öğrencilerden biri, birinci ve ikinci soruda toplama işleminin modellenmesi ile ilgili bir sorun yaşamazken, diğer öğrenci (Ö2) üç basamaklı sayıyı modelleme yaparken sorun yaşamış, bir sonuca ulaşmak istediğinden alt alta toplamayı tercih etmiştir. Yine alt alta toplamayı tercih eden öğrenci (Ö2), üçüncü soruda problem tarzında verilen örnekte ezbere 32 ve 15'i toplayacağız, diyerek gördüğü sayıları toplamıştır. Üçüncü sorunun a ve b maddelerinde 32+15 işlemini yapmış ve bu iki soruda da aynı sayıların toplanması yapılmıştır, diye açıklama da bulunmuştur. Ö2, c ve d maddesinde sayıları alt alta yazarak toplamış aynısını iki kere yazmışsınız, demiştir. Ö1 ise üçüncü sorunun a ve b maddelerinde 32+15 ve 15+32 işlemini yapmış. Öğretmenin sayıların yerlerine dikkat ettin mi yönlendirmesiyle, yerleri değişti ama sonuç değişmedi, çıkarımına varmıştır. Üçüncü sorunun c ve d maddelerinde ise burada da sayıların yerlerini değiştirerek topladık, demiştir. Topladığımız kısımlar değiştiği için burada da değişme özelliği var demiştir. Öğrencilerin her ikisi de dördüncü soruda bir strateji geliştirememiş ve verilen işlemleri alt alta toplamayı tercih etmişlerdir.

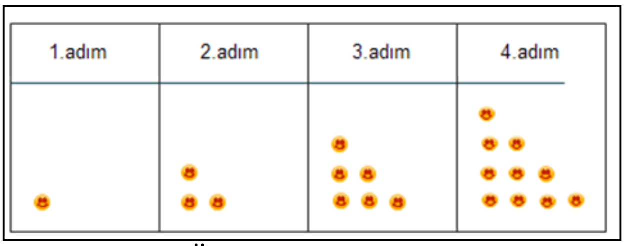
1. Hafta / 1. Canlı Ders

Bu canlı derste "örüntü oluşturur, verilen örüntüyü devam ettirir ve örüntüyü geneller" kazanımına ilişkin "verilen geometrik örüntüyü oluşturur ve verilen geometrik örüntünün bir sonrakini adımını çizer" davranışları işlenmiştir.

Öğretmen, öğrencilere basit düzeyde belli kurala göre dizilmiş geometrik şekillerden oluşan bir örüntü çizer ve örüntüyü öğrenciden açıklamasını ister. Öğrenciler: "kare, yuvarlak, kare, yuvarlak" şeklinde gidiyor, diyerek örüntüyü açıklarlar. Bunun sonucunda öğretmen en son "yuvarlağın" çizili olduğu örüntüde bir sonraki şeklin ne olacağını öğrencilere sorar ve yanıtlamaları beklenir. Öğrenciler kare yanıtını verdikten sonra, öğretmen öğrencileri tebrik eder. Öğrencilere biraz daha karmaşık olan Şekil 1'deki geometrik örüntü gösterilir ve örüntünün açıklanması istenir. Öğrenciler ok sayısındaki artışa odaklandığından dolayı okların yönünü fark edememişlerdir. Bu aşamada öğretmen bütün okların yönlerinin aynı olup olmadığı sorusunu yöneltir. Yönlendirme sonrasınca öğrenciler, okların yönünü de belirleyip dördüncü adımı çizmişlerdir. Derse Şekil 2'de belirtilen geometrik örüntü sorusuyla devam edilmiş ve öğrencilerden örüntünün açıklanması ve bir sonraki adımı çizmeleri istenmiştir. Öğrenciler, bir sonraki adımın da "L" harfi şeklinde olacağını söylemişlerdir. Öğretmen, yukarıdan aşağıya doğru nokta sayısına dikkat etmelerini söyleyerek, bir sonraki adım hakkında başka bir yorum yapmaları için rehberlik etmiştir. Örneğin: Öğrencilerden "2. adımda yukarıda bir nokta aşağıda iki nokta; 3. adımda yukarıda bir, sonra iki sonra üç nokta vardır." şeklinde bir açıklama beklenmiştir. Nokta sayısı yukarıdan aşağıya doğru artarak gitmesinden ötürü L harfine benzetilmiştir.



Şekil 1. Örnek bir geometrik örüntü



Şekil 2. Örnek bir geometrik örüntü

1. Hafta / 2. Canlı Ders

Bu canlı derste "verilen sayı örüntüsünü açıklar" davranışı işlenmiştir.

Öğretmen bu derste geometrik şekiller yerine sayılarla uğraşacaklarını söyleyerek derse başlamıştır. Bu derste öğrencilerden, kurallı olarak verilen sayı örüntülerinin önce sözel olarak ifade edilmesi amaçlanmıştır. Sayılar soyut olduğundan dolayı öncelikle basit sayı örüntüleriyle ilgili örneklere yer verilmiştir. 5, 10, 15, 20, 25, … şeklinde verilen örüntüsünün kuralının öğrencilerden açıklanması istenmiştir. Öğretmen öğrencilere öncelikle verilen örüntünün artarak mı azalarak mı gittiği sorusunu yöneltmiş ve artarak cevabını almıştır. Bunun üzerine kaçar kaçar arttığını sorusu sorulmuştur. Öğrenciler örüntünün beşer beşer ilerlediğini ifade etmişlerdir. Dersin devamında 21, 17, 13, 9, …. sayı örüntüsüne geçilmiş ve öğrencilerden örüntünün kuralını açıklamaları istenmiştir. Öncelikle örüntünün artarak mı azalarak mı ilerlediği belirlenmiş öğrenciler tarafından belirlenmiştir. Öğrenciler: 21'den 17'ye geri sayarak 4 azaldığını; 17'den 13'e doğru geri sayarak 4 azaldığını ve 13'ten 9'a geri sayarak 4 azaldığını, söylemişler ve bu örüntünün 4 azalarak gittiği sonucuna ulaşmışlardır. Öğretmen biraz daha karmaşık olan 1, 2, 4, 7, 11, …sayı örüntüsünü öğrencilere yöneltmiş ve yine aynı şekilde örüntünün kuralını bulmaları istemiştir. Öğrenciler ilk olarak ikişerli olarak gittiğini söylemişlerdir. Öğretmen 1 ile 2 ve 4 ile 7 arasında da ikişerli olarak artıp artmadığını sormuştur. Öğrenciler burada sayıların ikişerli artmadığını fark etmişlerdir. Öğretmen sayıları paylaşım ekranına yazarak sayılar arasındaki artış miktarı arasındaki ilişkiyi öğrencilere fark ettirmeye çalışmıştır. Öğrenciler tarafından birer birer artarak gittiği sonucuna ulaşılmıştır. Bir sonraki artışın beş olacağı bulunmuştur.

1. Hafta / 3. Canlı Ders

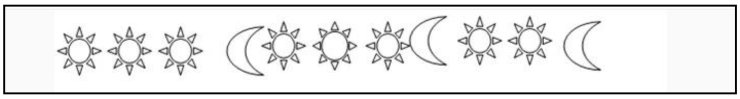
Bu canlı derste "verilen sayı örüntüsünün bir sonraki adımını bulur" davranışı işlenmiştir.

Öğretmen bir önceki derste verilen sayı örüntülerinin kuralını bulduklarını hatırlatmıştır. Bugünkü derslerinde kuralını buldukları örüntülerin bir sonraki adımlarını bulacaklarını söylemiştir. Öğretmen bir önceki derste 5, 10, 15, 20, 25, …şeklinde verilen sayı örüntüsünün kuralı tekrar bulmasını öğrencilerden istemiştir. Öğrenciler önce artarak gittiğini, sonra ise beşer beşer artarak gittiğini söylemişlerdir. Bunun üzerine öğretmen bir sonraki sayının ne olacağını sormuştur. Öğrenciler 25'in üzerine 5 ekleyerek 30 cevabını vermişlerdir. Bir sonraki 21, 17, 13, 9, … sayı örüntüsünde aynı şekilde öğrenciler, önce kuralı söylemişler ve bir sonraki sayıyı 9' dan 4 geriye sayarak 5 cevabını vermişlerdir. Biraz daha karmaşık olan 1, 2, 4, 7, 11,… sayı örüntüsünde öğrenciler kuralı bulmakta zorluk çekmişlerdir. Öğretmenin yönergeleri ile birlikte kuralı tekrar bulmuşlar ve bir sonraki adımdaki sayıya "1 arttı, 2 arttı, 3 arttı, 4 arttı şimdi 5 artacak, o halde 16 olur" şeklinde ulaşmışlardır.

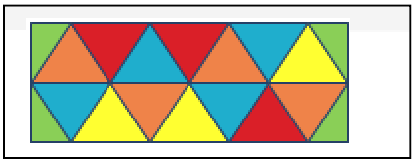
2. Hafta / 1. Canlı Ders

Bu canlı derste "örüntüyü bozan geometrik şekli bulur ve örüntüyü bozan sayıyı bulur" davranışı işlenmiştir.

Öğretmen bugün verilen örüntülerde kuralı bozan şekilleri ve sayıları bulacaklarını söyleyerek derse başlar ve ilk olarak geometrik örüntü sorusunu ekranda paylaşır. Şekil 3 ve 4' teki örüntüleri paylaşan öğretmen, ilk olarak Şekil 3'teki örüntünün kuralını öğrencilerden bulmalarını ister. Öğrenciler "güneş ve ay" şeklinde ilerlediğini söylemişlerdir. Öğretmen bunun üzerine kaç güneş ve kaç ay şeklinde örüntünün ilerlediğini sormuştur. Öğrenciler, "üç güneş bir ay, üç güneş bir ay" şeklinde cevap vermişlerdir. Öğretmen son aşamadaki güneş ve ay'ı tekrar saymalarını istemiştir. Öğrenciler "iki güneş bir ay" olduğunu söylemiş diğer adımlarla aynı olmadığını fark etmişlerdir. Öğretmen, "o halde kuralı bozan bir şekil var, bu sence hangisidir?" diyerek öğrencilere sormuştur. Öğrenciler en sondaki Ay'ın kuralı bozduğunu söylemişlerdir. Şekil 4'teki geometrik örüntü de aynı şekilde incelenerek kuralı bozan renkler bulunmuştur.



Şekil 3. Kuralı bozan geometrik örüntü örneği



Şekil 4. Kuralı bozan geometrik örüntü örneği

Daha sonra Şekil 5'te belirtilen sayı örüntüleri verilmiş ve kuralı bozan sayıların bulunması istenmiştir. Öncelikle verilen sayı örüntülerinin kuralını ifade etmeleri sonra kuralı bozan sayıyı bulmaları istenmiştir. Öğrencilerden her ikisi de Şekil 2 (a) maddesindeki sayı örüntüsünün kuralının beşer beşer arttığını sözel olarak ifade etmiş ve 30 sayısının kuralı bozduğunu fark etmişlerdir. (b) ve (c) maddelerinde zorlanan öğrenciler için öğretmen, (b) maddesini paylaşım ekranına yazmış 1 ile 2, 2 ile 4, 4 ile 8 arasında benzer bir ilişki olduğunu söylemiş ve iki kat ilişkisi öğrencilere fark ettirilmiştir. Bu durumda diğer terimlerin, 8 ile 16, 16 ile 32 olduğu öğretmen ile beraber bulunmuştur. 16 sayısının yerine 20 yazılması sebebiyle kuralı bozan sayı öğrenciler tarafından bulunmuştur. (c) maddesinde ise öğretmen örüntünün azalarak mı artarak mı gittiğini sormuş ve artma ya da azalma miktarına dikkat etmelerini söylemiştir. Yönlendirme sonucunda her iki öğrencide verilen örüntünün artarak gittiği bulmuştur. Artış miktarının sabit olmadığı bu örüntüde, buna benzer bir örnek tekrar çözülüp hatırlatılmıştır. Bu örnekle birlikte öğrenciler 5 artmış, 6 artmış, 7 artmış, 7 artmış diyerek yanlışın nerede olduğunu bulmuşlardır. Doğrusunu ise yönlendirmeyle 5 artmış, 6 artmış, 7 artmış, 8 artmış, 9 artmış, … şeklinde yazmışlardır.

a) 5 – 10 – 15 – 20 – 30

b) 1 – 2 – 4 – 8 – 20 – 32

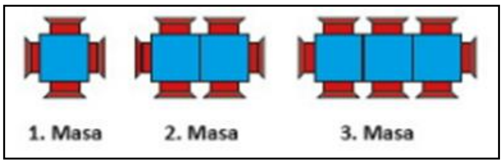
c) 4 – 9 – 15 – 22 – 29 – 39

Şekil 5. Kuralı bozan sayı örüntüsü örneği

2. Hafta / 2. Canlı Ders

Bu canlı derste "verilen örüntüde istenilen adımı bulur ve verilen örüntüyü geneller" davranışı işlenmiştir.

Derste istenilen herhangi bir adımın bulunmasıyla ilgili örnekler öğrencilerle birlikte çözülmüştür. İlk olarak öğrencilere 3, 5, 7, 9, … sayı örüntüsü verilmiş ve onuncu adımını tahmin etmeleri istenmiştir. Öğretmen, onuncu adımı bulmadan önce, örüntünün kuralını bulmaları gerektiğini öğrencilere hatırlatmıştır. Öğrenciler önce örüntünün artarak gittiği ve sonrasında ise ikişer artarak gittiği kuralına ulaşmışlardır. Onuncu adıma her iki öğrencide son terimden sonra altı adım ikişerli giderek ulaşmışlardır. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21,… Daha sonra Şekil 6'daki örüntü verilerek onuncu masadaki sandalye sayısını bulmaları istenmiştir. Öğretmenin "birinci masada kaç sandalye vardır, ikinci masada kaç sandalye vardır?" sorularıyla birlikte her masadaki sandalye sayıları öğrenciler ile birlikte bulunmuştur. Sırasıyla sandalye sayıları 4, 6, 8, … şeklindedir. Öğretmen, öğrencilerden bu örüntünün kuralını açıklamalarını istemiştir. Öğrenciler sandalyelerin ikişer artarak gittiğini fark etmişler ve onuncu masadaki sandalye sayısını bulabilmek için teker teker yazmayı tercih etmişlerdir. Öğrenciler; 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22,… şeklinde yazarak onuncu masadaki sandalye sayısına ulaşmışlardır.



Şekil 6. Geometrik şekil örüntü örneği

Öğretmen bu derste ilk çözdüğü ve sandalye sorusunda "100. adımı bulmamız istenilse teker teker yazacak mıyız", sorusunu yöneltir. Öğrenciler kolay bir yolu olduğunu söylerler fakat ne olduğunu söyleyemezler. Öğretmen, sırasıyla Tablo 4'ü ve Tablo 5'i öğrencilerle birlikte doldurur.

Tablo 5. *"3, 5, 7, 9, …" örüntüsüne ait adım sayısı ilişkisi*

Adım Sayısı	1	2	3	4	5	…	n
Bulunan sayı	3	5	7	9	11	…	2n+1

+2 +2 +2 +2

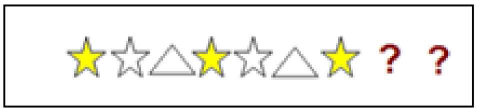
Tablo 6. *Sandalye ve masa sayısı arasındaki ilişki*

Masa Sayısı	1	2	3	4	5	…	n
Sandalye Sayısı	4	6	8	10	12	…	2n + 2
		+2	+2	+2	+2	+2	

Tablo 5 ve 6 öğrenci ile birlikte doldurularak; “adım sayısı ve o adımda bulunan sayı ile” ve “masa sayı ile sandalye sayısı” arasında bir ilişki olduğu görülmüştür. Tablo 5′ te adım sayısı ile o adımda bulunan sayı arasında 2 katının 1 eksiği olduğu görülür. O halde n. adımda (öğretmen, öğrencilere n′ ye istediğimiz bir sayıyı yazabileceğimizi söyler) 2 katının 1 eksiği 2.n -1 olur. Böylelikle verilen örüntünün genel kuralını bulduklarını ve istedikleri tüm adımları kolaylıkla bulabilecekleri açıklanır. Tablo 6’da masa sayısı ve sandalye sayısı arasındaki ilişki “2 katının 2 fazlası şeklindedir” ve n. masada ise bu ilişkinin 2.n + 2 şeklinde olacağı sonucuna öğrenciler, öğretmenin yönlendirmesi ile ulaşmışlardır. Aynı şekilde genel kuralın bulunduğu ve istedikleri her adımı bulabilecekleri söylenmiştir. Örneğin; 100.masada 2.100 + 2 = 202 sandalye vardır.

3. Hafta / 3. Canlı Ders

Bu canlı derste öğretmen, araştırma için hazırlanan soruları uygulayacağını söylemiş ve notla değerlendirilmeyeceği bilgisi vererek öğrencilerden yapmasını istemiştir. Öğrencilere anlamadığı veya takıldığı yerlerde bir önceki derslerdeki örnek soruları hatırlatarak rehberlik edilmiştir. Öğrencilerin her ikisi de birinci soru da “sarı yıldız boş yıldız boş üçgen”, birinci soru işaretine “boş yıldız” ikinci soru işaretine “boş üçgen” gelecek, demişlerdir.



Şekil 7. Birinci soru a maddesi

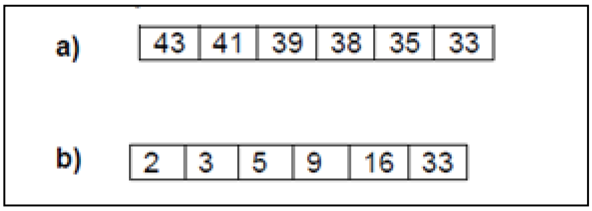
Öğrencilerin her ikisi de ikinci sorunun a maddesine kadar sorunsuz bir şekilde gelmişlerdir. b maddesinde nasıl yapabilecekleri konusundan yardım istemişlerdir. Öğretmen bu aşamada bir önceki dersten 1, 2, 4, 7, 11, … örneğini hatırlatarak sayılar arasındaki ilişkiye odaklanmalarını sağlamıştır. Bu örnekten sonra her ikisi de ikinci soruyu tamamlayabilmişlerdir. İkinci sorunun a maddesinde “2’şer 2’şer gidiyor, 10’dan sonra 12 olur”, demişlerdir. b maddesinde öğretmeninin bir önceki derslerden hatırlatma yapmasından sonra, “3 arttı, 6 arttı, 12 arttı, şimdi 24 artacak o zaman 47 olur”, sonucuna ulaşmışlardır.

a) 2, 4, 6, 8, 10, . . .

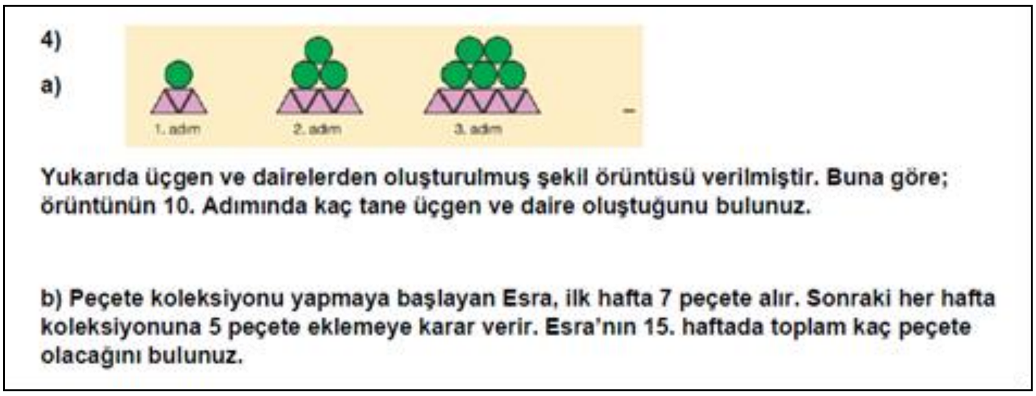
b) 2, 5, 11, 23, ...

Şekil 8. İkinci soru a ve b maddeleri

Üçüncü soruda öğrencilerden biri (Ö3) kuralı bozan sayıyı bulamamış ve örüntüyü açıklayamamıştır. Ö4 üçüncü soruda ilk sayı örüntüsünde "2'şer azalarak gidiyor 38'i yanlış yazmışlar", ikinci sayı örüntüsünde ise ikinci sorunun b maddesinden yararlanarak "1 arttı, 2 arttı, 4 arttı, 8 artacak ama 16 yazmışlar 17 olacak" sonucuna ulaşmıştır. Dördüncü sorunun a maddesinde her iki öğrenci de çizerek istenilen adıma ulaşmaya çalışmış, b maddesinde verilen soruyu yapamamışlardır.



Şekil 9. Üçüncü soru a ve b maddeleri



Şekil 10. Dördüncü soru a ve b maddeleri

Her öğrencinin sorulara verdikleri cevaplar incelenmiş, uygulama esnasında öğrencilerin cevaplarına ilişkin notlar alınmış ve gerekli açıklamalar yapılmıştır. Öğrencilerin yaptıkları sorular (+), yapamadıkları sorular (-) ile gösterilmiş ve aşağıda Tablo 7 ve Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 7. *Katılımcıların uygulama sorularına verdikleri cevaplar*

Öğrenci kodu	Birinci Soru		İkinci Soru			Üçüncü Soru				Dördüncü Soru			
	a	b	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d
Ö1	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
Ö2	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Ö1'in uygulama sorularına verdiği cevaplar incelendiğinde ilk iki soruyu fiziksel (somut) nesnelerden yararlanarak çözdüğü görülmektedir. Bu sebeple (+) olarak gösterilmiştir. Üçüncü sorunun (a) ve (b) maddelerindeki ilişkiyi (toplama işleminin değişme özelliğini) açıklayabildiği, (c) ve (d) maddelerindeki ilişkiyi (toplama işleminin birleşme özelliğini) açıklayamadığı görülmektedir. Bu sebeple a ve b maddeleri (+), c ve d maddeleri (-) olarak gösterilmiştir. Aynı zamanda dördüncü soruda verilen toplama işlemlerini öğrenci alt alta yazarak yaptığından dolayı (-) olarak gösterilmiştir.

Ö2'nin uygulama sorularına verdiği cevaplar incelendiğinde birinci soruyu yapabildiği, ikinci soruda ise (a) ve (b) maddelerini yapabildiği ve (c) maddesini modelleyerek yapamadığı görülmektedir.

(c) maddesini alt alta toplayarak yapmıştır. Üçüncü soruda ise 32+15 işlemini yapmış ve "bu iki soruda da aynı sayıların toplanması yapılmıştır" c ve d maddelerinde sayıları "alt alta yazarak toplamış" ve "aynısını iki kere yazmışsınız" dediği için (-) olarak gösterilmiştir. Son soruda da strateji oluşturmak yerine sayıları alt alta toplama yolunu seçtiği için (-) olarak gösterilmiştir.

Tablo 8. *Katılımcıların uygulama sorularına verdikleri cevaplar*

Öğrenci kodu	Birinci Soru		İkinci Soru		Üçüncü Soru		Dördüncü Soru	
	a	b	a	b	a	b	a	b
Ö3	+	+	+	+	-	-	-	-
Ö4	+	+	+	+	+	+	-	-

Ö3'ün uygulama sorularına verdiği cevaplar incelendiğinde birinci, ikinci soruları yapabildiği ve açıklayabildiği için (+) olarak gösterilmiştir. Üçüncü soruda örüntünün kuralını bulamadığı ve dördüncü soruda çizerek cevaba ulaşmaya çalıştığı için (-) olarak gösterilmiştir.

Ö4'ün uygulama sorularına verdiği cevaplar incelendiğinde birinci, ikinci ve üçüncü soruları yapabildiği (+), dördüncü soruyu yapamadığı (-) görülmektedir. Öğrenci dördüncü soruda adım sayısı ile örüntünün terimleri arasında bir ilişki bulmak yerine istenilen adım sayısına kadar çizim yaptığından dolayı (-) olarak gösterilmiştir.

Tablo 7 ve 8'den hareketle öğrencilerin matematik soyutlama düzeyleri belirlenmiş ve Tablo 9'da sunulmuştur.

Tablo 9. *Ortaokul kaynaştırma öğrencilerinin matematik soyutlama düzeyleri*

Öğrenci kodu	Cinsiyet	Sınıf düzeyi	Soyutlama Düzeyleri Deneysel Soyutlama (empirical abstraction)	1. Derece Yansıtıcı (reflecting abstraction)	2. Derece Yansıtıcı (reflected abstraction)	3. Derece Yansıtıcı (metareflection)
Ö1	K	5	✓	×	×	×
Ö2	E	5	×	×	×	×
Ö3	E	7	✓	×	×	×
Ö4	E	7	✓	✓	×	×

Tablo 10' da ise öğrencilerin en çok tekrarda bulundukları eylemlere yer verilmiş ve soyutlama düzeyleriyle ilişkilendirilmiştir. "Alt alta toplama ve parmaklarını sayarak toplama" ve "örüntülerin istenilen adımına çizerek ulaşmaya çalışma" öğrencilerde en çok tekrar eden eylemler olmuştur.

Tablo 10. *Soyutlama düzeylerine ilişkin en çok tekrar eden bulgular*

Soyutlama Düzeyleri	Kodlar	Ö1	Ö2	Ö3	Ö4
Deneysel soyutlama	Alt alta yazarak toplama işlemini yapma	+	+		
	Parmaklarını sayarak toplama işlemini yapma	+	+		
	Verilen geometrik ve sayı örüntülerinde istenilen adıma çizerek ulaşmaya çalışma,			+	+
Birinci derece yansıtıcı soyutlama	Sayı örüntüleri arasındaki ilişki açıklayabilme ve bir sonraki adımı bulabilme			-	+

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Yapılan araştırmada genel anlamda öğrenciler soruların açıklama kısmı boş bırakmış, neden düşündüklerini açıklayamamışlar ve iletişim kurarken güçlük yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerin sık sık dikkatini bir yere odaklama konusunda sorun yaşadıkları görülmüştür. Bu da sürecin içselleştirilmesini zorlaştırmıştır. Öğrenciler zihinsel bir ilişki kurmaktan kaçınmışlar ve kendi bildikleri yolla (alt alta toplama ve parmaklarını sayma) yapmayı tercih etmişlerdir. Bu da bilgiyi ezberlemeyi seçtiklerini gösterebilir. Bu doğrultuda ezbere yapmaya çalışan öğrenciler, soyutlama gerektiren soruları yapamamışlardır. Özellikle zihinden toplama işlemi kazanımında, öğrencilerin hep alt alta toplama yolunu tercih ettikleri, farklı bir yolla çözmek istemedikleri görülmüştür. Bu sebeple hedeflenen kazanımın öğrenilmesi tam anlamıyla gerçekleşmemiştir. Matematiksel bilgilerin soyut olması ve kaynaştırma öğrencilerinin uygulama esnasında dikkatlerinin kısa ve dağınık olması matematiksel kavramların tam anlamıyla içselleştirilememesine neden olmuş olabilir (Merril, 2005; Senemoğlu, 2007; Sucuoğlu, 2010).

Ö1'in matematik soyutlama düzeyi, öğrenci fiziksel nesnelerden yararlanarak toplama işlemini yaptığı için deneysel soyutlama düzeyindedir. Simon'a (2004) göre, birçok öğrenci matematiksel kavramları anlamadan belirli soruları belirli işlemlere dayandırarak öğrenmeye çalışmaktadırlar. Buna öğrencilerin strateji geliştirmek yerine toplama işlemlerini alt alta çözmeleri örnek gösterilebilir. Öğrenci deneysel soyutlama düzeyinde olduğu için "zihinden toplama işlemini yapabilecek stratejiler geliştirir" kazanımını tam anlamıyla içselleştiremediği görülmektedir. Bu bağlamda süreç içselleştirilmediğinden dolayı yansıtıcı soyutlama tam anlamıyla gerçekleşmemiştir. Tablo 9'a göre, araştırma sonucunda öğrencinin soyutlama düzeyinde bir değişim gözlenmemiştir. Bu bağlamda öğrencinin yeterli hazırbulunuşluk seviyesinde ya da yeterli kavrama kapasitesinin olmadığını söyleyebiliriz. Bulunduğu soyutlama düzeyi dikkate alınarak bir öğretim süreci planlanmalı ve bu bağlamda öğrencinin öğrenme sürecini içselleştirmesine yardımcı olunmalıdır.

Ö2'nin matematik soyutlama düzeyi, birinci ve ikinci sorularda öğrenci fiziksel (somut) nesnelerden yararlanarak toplama işlemini yaptığı için deneysel soyutlama düzeyinde olduğunu göstermektedir. Bu sebeple birinci soruyu yapan öğrencinin ikinci soruyu da yapması beklenmektedir. Fakat öğrencinin ikinci sorunun (c) maddesini yapamadığı görülmektedir. Üçüncü soruda toplama işleminin değişme ve birleşme özelliklerini görememiş olduğundan bu sorunun soyutlama düzeyi olan birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyini de gerçekleştirememiştir. Son soruda da strateji oluşturmak yerine sayıları alt alta toplama yolunu seçtiğinden dolayı ikinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyini de gerçekleştirememiştir. Bunun sebepleri arasında öğrencinin bilgiyi içselleştirmek yerine ezberleme yolunu seçtiğini ya da yeterli hazırbulunuşluk seviyesinde olmadığını söyleyebiliriz. Son olarak öğrencinin birinci soruyu tam yapıp, ikinci soruyu eksik yapması sebebiyle deneysel soyutlama düzeyini tam anlamıyla gerçekleştiremediği söylenebilir.

Ö3'ün matematik soyutlama düzeyi, öğrencinin birinci soruyu açıklayıp yapabilmesi deneysel soyutlama düzeyinde olduğunu göstermektedir. İkinci soruda sayılarla verilen örüntünün olması öğrenciyi zihinsel düşünmeye yönlendireceğinden dolayı bu soru seviyesinde öğrenci birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyindedir. Üçüncü soruda kuralı bozan sayılar sorularak ikinci soru ile bağlantı sağlanmıştır. Bu sebeple ikinci soruyu yapan öğrenciden, üçüncü soruyu da yapması beklenmektedir. Her iki soruda da verilen sayı örüntülerinin kuralını bulması gerekecektir. Öğrenci ikinci sorunun (a) ve (b) maddelerine doğru cevap vermiş. Fakat üçüncü soruyu cevaplamadığı için öğrenci yansıtıcı soyutlama sürecini tam anlamıyla gerçekleştirememiştir. Bu sebeple deneysel soyutlama düzeyinde kalmıştır. Tablo 9'a göre öğrencinin soyutlama düzeyinde herhangi bir gelişme olmadığı görülmektedir. O halde öğrencinin soyutlama düzeyine uygun yeniden bir BEP hazırlanmalıdır.

Ö4'ün matematik soyutlama düzeyi, ilk soruda öğrencinin fiziksel (somut) nesnelerden yararlanarak açıklama yapabilmesi deneysel soyutlama düzeyinde olduğunu göstermektedir. İkinci ve üçüncü sorular; öğrenciyi zihinsel düşünmeye yönlendirdiğinden ve bu soruları doğru yanıtladığından dolayı öğrencinin birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyinde olduğunu söylenebilir. Dördüncü soru öğrencinin cebirsel ilişki kurabilmesiyle ilişkili olduğundan dolayı ikinci ve üçüncü soruya göre daha derin düşünme gerektirir bu da 2. derece yansıtıcı soyutlama düzeyini göstermektedir. Öğrenci dördüncü soruda adım sayısına kadar çizim yaptığından yani verilen örüntüyü cebirsel olarak açıklayamadığından dolayı birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyinde kalmıştır. Tablo 9 incelendiğinde öğrencinin deneysel soyutlama düzeyinden birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyine ilerlediği, süreci bu aşamaya kadar içselleştirdiği söylenebilir. Öğrencinin bu süreci daha fazla içselleştirebilmesi için birinci ve ikinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyini destekleyen ders etkinliklerine daha fazla yer verilmelidir. Böylelikle eğitsel gelişimine de katkı sağlanmış olur.

Genel olarak sonuçlar incelendiğinde öğrenciler aynı yetersizlik türü ve hazırbulunuşluk seviyesinde olmalarına rağmen farklı matematik soyutlama düzeylerinde çıkmışlardır. Ö1 ve Ö2 öğrencilerinin toplama işlemini zihinden yapabilme stratejileri geliştiremedikleri görülmüştür. Bu bağlamda öğrencilerin yetersizlik türleri ve hazırbulunuşluk seviyeleri aynı da olsa matematik soyutlama düzeyleri dikkate alınarak, her biri için tekrardan BEP hazırlanmalı ve öğretim süreci planlanmalıdır. Bu doğrultuda öğrencilerin eğitsel gelişimlerine en üst seviyede katkı sağlanmış olacaktır. Ö3 ve Ö4 kodlarına sahip öğrencilerin de her ikisi aynı yetersizlik türünde ve araştırmanın başında aynı hazırbulunuşluk seviyesinde olmalarına rağmen matematik soyutlama düzeyleri birbirlerinden farklı çıkmıştır. Aynı hazırbulunuşluk seviyesinde bulunan öğrencilerden Ö4 bir üst matematik soyutlama düzeyinde çıkmıştır. Yani aynı yetersizliği gösteren ve aynı hazırbulunuşluk seviyesinde olan kaynaştırma öğrencileri aynı eğitsel seviyededir şeklinde bir genelleme yapılıp ortak bir ders planı uygulanmamalıdır.

Bingölbali ve Özmantar (2012), doğrudan modelleme ve sayı ilişkilerini kullanma yoluyla toplama işleminin yapılmasının soyutlama süreçlerine bağlı olarak basitten karmaşığa doğru gittiğini belirtmiştir. Van de Walle, Karen ve Jennifer (2018), öğrencilerden en başta zihinden hesaplama yapmalarının istenmemesini, çünkü modelleme sürecinde olabileceklerini belirtmiştir. Bunu Piaget'nin (2001) deneysel soyutlama düzeyinde öğrencilerin fiziksel modellemelerden yararlanması ve yansıtıcı soyutlama düzeyinde matematiksel genellemelere ulaşması ile ilişkilendirebiliriz. Böylece yansıtıcı soyutlama düzeyinin deneysel soyutlama düzeyinden daha karmaşık olduğunu söyleyebiliriz. Öğrencilerin var olan işlemi modellemek için saymalarını sağlamaya yarayan nesneler kullanabildikleri gibi, soyut stratejiler ürettiklerinden de bahsedilmiştir (Carpenter, 1999, aktaran Bingölbali ve Özmantar, 2012, ss.31-61). Buna bağlı olarak; 46+38 işlemini öğrencinin 46'dan 2 al ve 40 yapmak için 38' e ver. Sonra 44'ün ve 40'ı topla, sonuç 84 eder. Şeklinde kendince bir strateji belirleyerek çözebilmesi matematiksel olarak derin düşündüğünü ve yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) düzeyinde olduğunu gösterir. Bunun yanı sıra toplama işleminin değişme ve birleşme özellikleri problem çözmede, zihinde yapılan matematik işlemlerinde kolaylık sağlar (Van de Walle, Karen ve Jennifer, 2018). Fakat değişme özelliği her ne kadar belli olsa da öğrenciler için yeterince açık olmayabilir. Öğrencilerin toplama işleminin değişme ve birleşme özelliklerini anladıklarında daha yüksek seviyelerde soyutlama yapmalarına imkân sağlayacağından bahsedilmiştir (Carpenter, 1999, aktaran Bingölbali ve Özmantar, 2012, ss.31-61). O halde öğrencilerin toplama işleminin değişme ve birleşme özelliklerini açıklayabilmeleri yansıtıcı soyutlama düzeyi olarak ele alınabilir. Simon'a (2004) göre, birçok öğrenci matematiksel kavramları anlamadan belirli soruları belirli işlemlere dayandırarak öğrenmeye çalışmaktadırlar. Öğrencilerin strateji geliştirmek yerine toplama işlemini alt alta yazarak yapmaları görüşü destekler niteliktedir.

Örüntüler öğrencilere sadece örüntüyü genişletme olanağı sağlamaz. Aynı zamanda örüntünün herhangi bir noktasında ne olacağını söyleyebilme ve genelleme yapma olanağı da sağlar. Bu bağlamda örüntü oluşturma, devam ettirme ve genelleme aşamalarını da deneysel soyutlama ve yansıtıcı soyutlama düzeyleri olarak ele alabiliriz. Geometrik örüntüler güzel örnekler sunarlar çünkü örüntüyü görmek kolaydır ve öğrenciler nesneleri hareket ettirerek değiştirebilirler (Van de Walle ve diğerleri., 2018). Bu bağlamda öğrencilerin, geometrik örüntünün bir sonraki adımını çizerken ya da tahmin ederken fiziksel nesnelerden yararlandıkları için herhangi bir matematiksel genellemede bulunmadıklarından dolayı deneysel soyutlama düzeyinde olduklarından bahsedebiliriz. Ancak burada bir sonraki adımının çizilmesi istenmesi önemlidir. Herhangi bir adımın çizilmesi istenmesi matematiksel anlamda bir genelleme gerektirir. Çünkü öğrenciler matematiksel genellemelere ulaşırken; örüntünün yapısının nasıl değiştiğini analiz ederken zihinsel bir yapılandırma sürecinden geçerler (Van de Walle ve diğerleri., 2018). Aynı şekilde Dreyfus, Hershkowitz ve Schwarz (2001), matematiksel anlamda genellemelerin oluşabilmesini fiziksel modellerden sembollere geçiş, sembollerden matematiksel kavramlara geçiş olarak tanımlamışlardır. Araştırmanın sonucunda ise bir öğrencinin deneysel soyutlama düzeyinde kaldığı, yani istenilen kazanıma ilişkin öğrenme sürecini içselleştiremediği görülmektedir. Diğer öğrenci ise birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyindedir. Fakat öğrenci matematiksel genellemelere ulaşamadığı (ikinci derece) ve bu aşama birinci derece yansıtıcı soyutlama düzeyine göre daha genel soyutlama yapmayı gerektirdiğinden dolayı öğrenme sürecinin tam anlamıyla içselleştirilemediği söylenebilir.

Öğrencilerin soyutlama düzeylerindeki ilerlemeyi görebilmek ya da soyutlama düzeylerine göre etkinlik hazırlayabilmek için öğretmenler soyutlama düzeylerine dair bilgi sahibi olmalıdır. Bu doğrultuda öğretmen, matematiksel herhangi bir kavramın öğretiminde öğrencinin soyutlama düzeyini ortaya çıkaracak veya matematiksel kavramı soyutlayabilmesine olanak sağlayacak etkinliklere yer verebilecektir. Bu bağlamda hazırlanan BEP'lerin öğrencilerin soyutlama düzeylerini ortaya çıkaracak etkinliklere ne ölçüde yer verildiği ve öğretmenlerin soyutlama düzeylerine dikkat ederek dersi işleyip işlemedikleri araştırılabilir. Soyutlama düzeylerinin incelenmesi sadece matematik dersi ile sınırlı kalmayıp, diğer branşlarda da araştırılabilir. Bu doğrultuda öğrenci için daha yararlı olabilecek; öğrenme sürecini içselleştirebileceği, üst bilişsel düşünme becerilerini kazanabileceği öğretim süreci planlanabilir. Öğrencilerin soyutlama düzeyleri belirlendikten sonra aynı soyutlama düzeyine sahip kaynaştırma öğrencileri ile grup eğitimi yapılabilir. Grupla eğitim öğrencilerin sosyalleşme, özgüvenlerinin artması, kendini kontrol edebilmesi ve kendini ifade edebilme özelliklerinin gelişmesinde fayda sağlayacaktır. Bu fayda ile kaynaştırma eğitiminin amaçlarından biri olan "öğrenciyi topluma kazandırma" için adım atılmış olur. Son olarak araştırmada belli yetersizliğe sahip öğrencilerin matematik soyutlama düzeyleriyle sınırlı kalındığından, bir sonraki araştırmalarda diğer yetersizlik türlerine sahip olan öğrencilerin de matematik soyutlama düzeyleri incelenebilir.

KEFAD
http://kefad.ahievran.edu.tr
Ahi Evran University
Journal of Kırşehir Education Faculty
ISSN: 2147 – 1037

ENGLISH VERSION

Introduction

Just as there are students who continue their education life without any support, there are also students who need support due to their individual differences. Akçamete (2015) reported that students with the need for special education are in need of individualized education and related services in order to benefit more from education and to meet their educational needs. It is important that the education they need be given in general education classes, that is, in the least restrictive environment because such a least restrictive environment allows students to integrate with their peers physically, socially and educationally. Learning is different for each individual (Sucuoğlu, 2010). Therefore, a separate plan should be prepared for students who need special education. An individualized training program is prepared to achieve the goals determined in line with the physical characteristics and educational needs of individuals who need special education. The educational environments where these programs are applied to students vary in accordance with students' competencies and needs. Support education rooms are prepared so that students who continue their education through inclusive education can receive supportive education. Therefore, individuals who need special education can gain their independence by taking education in line with their needs and without leaving their peers. Their gaining independence allows them to undertake social roles as well.

Education given to individuals in need of special education to meet their educational and social needs is defined as special education (Special Education Services Regulation (SESR). In line with this definition, the purpose of special education is to give education to individuals (who need special education) in line with their capabilities so that they can be self-sufficient and belong to the society they live in (SESR, 2020).

According to Sorgun Counseling Research Center (Sorgun CRC, 2017), deficiencies experienced by individuals due to factors before, during and after childbearing are all defined as disability. These types of disability are physical and mental disability, visual and hearing impairment, language and speech impairment, learning disability, chronic illnesses, developmental disorders, attention deficit and hyperactivity disorders. As this study focused on students who had learning disabilities, attention deficits and hyperactivity disorders, the explanations of these two types of disabilities will be mentioned.

Learning Disability

Learning disability was defined as the difficulty experienced by the child in gaining and using such skills as reading/writing, speaking, listening and reasoning (MEB, 2014). In addition, learning disability was also defined as a developmental disorder (MEB, Modül-5). Specific learning difficulties can be classified as reading difficulties (dyslexia), writing difficulties (dysgraphia) and math difficulties (dyscalculia).

Attention Deficit and Hyperactivity Disorder

An individual's attention problems which are not normal when compared to his/her peers' are defined as a disorder that appears due to genetic or environmental differences, with failure to stay still and postpone requests (impulsivity) (Sorgun CRC, 2017).

Education through Inclusive/Integration

Inclusive education, which is one of the goals of special education, allows students to receive their education together with their peers. With this opportunity, individuals in need of special education can continue their education with their peers full-time in the same class or part-time in special education classes through inclusion/integration. In special education schools, education can be given via inclusion/integration at all levels (SESR, 2020).

Constructivism and Abstraction

Constructivism is a theory about how knowledge is formed and how people obtain information. Piaget states that the constructivist learning theory is the basis of mental development. According to this theory, information is structured in the mind by the individual in the process of mental development. The individual internalizes the process as s/he structures the information in her own mind. Piaget points out that the process in which the student structures the information is defined as an internal process (Zembat, 2016). Piaget explained the concept of learning, namely the internalization process, with the concepts of assimilation, regulation and balance.

Depending on the change over time in the human structure needed by the society, changes are made in curricula. Accordingly, since the 2005 curriculum change, the constructivist approach has been included in the curricula. One of the most important reasons for the dominance of the constructivist approach in curricula is that students cannot sufficiently abstract mathematical information. With the deterioration of the cognitive balance, the individual tends to think deeply by establishing a relationship between her previous knowledge and experiences. According to Pesen (2008), the formation of abstraction depends on the establishment of these relations between mathematical structures.

Piaget argued that abstraction is a process. The concept of abstraction is divided into two: empirical abstraction and reflective abstraction (Zembat, 2016). Empirical abstraction is making inferences about the apparent properties (color, shape, etc.) of objects. Since the physical properties of objects are used here, no mathematical generalization is made (Zembat, 2016). Reflective abstraction is about new inferences that an individual makes between her actions and the relationships in her mind. In reflective abstraction, individuals reach mathematical generalizations as they internalize the learning process in which they reconstruct the information in their mind (Zembat, 2016). Piaget (2001) discussed the level of reflective abstraction in three stages: "reflecting abstraction, reflected abstraction and metareflection". In order to prevent loss of meaning when translating into Turkish, Zembat (2016) describes reflective abstraction levels as first-degree, second-degree and third-degree reflective abstraction levels since these concepts have a hierarchical order. In this study, while determining the abstraction levels of the outcomes, the mathematical abstraction levels of the questions prepared by Zembat (2016) regarding the concept of equivalent fractions were taken as basis.

Special Education and Mathematics Education

As individuals in need of special education should be provided with education in the areas they need, a rough evaluation form is applied to these individuals. The rough evaluation form is a superficial evaluation applied before preparing an individualized education plan (IEP) (SESR,2020). All the outcomes in the mathematics curriculum should be written on the rough evaluation form. While making a rough evaluation, whether the individual can achieve or know the outcome or not is checked. According to this evaluation, an individualized education plan is prepared considering the developmental and physical characteristics of the student.

The process of abstraction of mathematical knowledge gained more importance with the inclusion of the constructivist approach in the curriculum in the 2005-2006 academic year. In this respect, the specific objectives that the mathematics curriculum tries to achieve are arranged so that students can understand mathematical concepts, use them in daily life and consciously manage their own learning processes in a way to improve their metacognitive knowledge and skills (MEB, 2018). The principles that must be followed in order for mathematics teaching to reach its goal are said to be as follows: "creating conceptual foundations, paying attention to preconditions and key concepts, giving appropriate tasks to teachers and students by including the environment and research studies in the teaching process, and developing a positive attitude towards mathematics" (Altun, 2015). Teaching by paying attention to the principles of mathematics will make it easier for individuals in need of special education to learn abstract concepts, as it will prevent the teaching from being ordinary. Since mathematics is an abstract field and abstraction is necessary, students have difficulty in structuring mathematical knowledge.

Like normal students, students who need special education also have the right to take education. Inclusive education, which is the least restrictive environment, offers students the opportunity to study with their peers. In this way, inclusive education contributes to the social development of the student as well as to his/her educational performance. As mathematics is an abstract and often difficult subject to understand, it may seem more incomprehensible to individuals who need special education. In this sense, considering the fact that inclusive students can be more involved in the education process and make better use of the education-teaching process, the problem situations in the present study were determined as follows:

- Does the same type of disability of students affect their levels of mathematical abstraction?
- Does the same level of readiness of students affect their levels of mathematical abstraction?

Method

Research Model

In this study, the purpose was to examine the mathematical abstraction levels of secondary school inclusive students with the help of questions prepared in relation to the outcomes determined in accordance with the individualized education plan. The study was designed as a case study in which the "internal situation was examined" because the study included a case limited to time and place and because the purpose was to describe and detail the case by determining a special situation. Here, the mathematical abstraction levels of the secondary school inclusive students were defined within their own conditions. According to Stake (1995), a qualitative case study can be designed to reveal a unique situation. Creswell (2002) emphasized the internal case study by stating that detailed examination of such description of a unique situation has its own nature. For this purpose, 4 open-ended questions prepared by taking expert opinion in line with their outcomes were directed to the secondary school inclusive students participating in the study.

Study Group

The participants of the study were 4 secondary school inclusive students attending a low socio-economic status school in the city center of Van in the academic year of 2019-2020. The homogeneous group sampling method, one of purposive sampling techniques, was used for the selection of the participants. In this respect, the mathematical abstraction levels of students with the same readiness level and same disability were examined. The names of the secondary school inclusive students participating in the study were kept confidential, and the students were coded as S1, S2, S3 and S4. The demographic characteristics and readiness levels of the participants are presented in Table 1 and Table 2 below.

Table 1. *Demographic characteristics of the inclusive students participating in the study*

Student code	**Gender**	**Class Grade**	**Disability**
S1	F	5	Attention deficit and hyperactivity disorder
S2	M	5	Attention deficit and hyperactivity disorder
S3	M	7	Specific learning disability
S4	M	7	Attention deficit and hyperactivity disorder and Specific learning disability

Table 2. *Mathematics lesson readiness levels of the students participating in the study*

Student code	**Readiness level**	Outcome **to be achieved**
S1 and S2	Performs the addition operations given with and without carrying	Ability to do addition in mind
S3 and S4	Verbally expresses and maintains the rule in a repeating pattern with geometric objects or shapes.	Finding the desired step in the number or shape patterns, given the rule

In relation to the demographic backgrounds of the students, they were asked to give information about their gender and class grades. By meeting the school counselor, information was obtained about in which area the students who participated in the study had disabilities and was added to the demographic information section.

Application Process

In the 2019-2020 academic year, the questions prepared by obtaining the necessary permissions were directed to 4 secondary school inclusive students in the city center of Van. Due to the epidemic (coronavirus) affecting our country as well as the rest of the world, the application was carried out by interviewing the students over the Education Information Network (known as EBA in Turkey). The study was planned as two weeks, and the first week of the research process aimed to eliminate any missing knowledge of the students about the lesson subject. In the second week, the questions prepared to examine the levels of mathematical abstraction related to the subject were applied. In the findings section, how the live lessons were applied was written down week by week and lesson by lesson, and each student was studied individually.

The procedures performed during the study are given below.

1. Before determining the levels of mathematical abstraction, the outcomes that the students were not good at were determined with the Rough Evaluation Form. Accordingly, questions were prepared in line with the lesson plan and readiness of the students.

2. In the first week, preparatory questions about the field in which they were inadequate were applied.

3. In the second week, questions prepared to determine the levels of mathematical abstraction were applied.

Data Collection Tools

For the study, the related literature was reviewed first. In order to determine the mathematical abstraction levels of the secondary school inclusive students, the legal bases, master's and doctoral theses, articles, books, Internet and elementary and secondary school mathematics curricula were examined in detail. As a result, four open-ended questions were prepared by taking expert opinion.

The questions prepared for S1 and S2 consisted of two parts: "demographic information and questions". In the questions section; There were four main questions in the questions section (silelim). Although these four questions served the same purpose, the levels of mathematical abstraction were different from each other. The first question consisted of two sub-questions; the second question consisted of three sub-questions; the third question consisted of four sub-questions; and the fourth question consisted of four sub-questions. The questions prepared for the examination of the mathematical abstraction levels of S1 and S2 and the mathematical abstraction levels according to the questions are explained below.

- The first and second questions asked the students to do the modeled addition, and the students were determined to be at empirical abstraction level if they were able to answer the question by using a physical modelling,
- In the third question, as the change and unification features of addition allowed the students to express the thoughts they visualized in their minds, the students were determined to be at first-degree reflecting abstraction level,
- In the fourth question, the students were asked to develop a strategy and perform the given additions. Here, the students' use of number relations and their ability to combine and separate numbers in different ways included more mathematical thinking when compared to the third question, and the students were determined to be at second-degree reflected abstraction level.

The questions prepared for S3 and S4 consisted of four main questions. Although these four main questions served the same purpose, the levels of mathematical abstraction were different from each other. All the four questions consisted of two sub-questions. The questions prepared for the examination of the mathematical abstraction levels of S3 and S4 and the mathematical abstraction levels according to the questions are explained below.

- In the first question, the empirical abstraction level was determined as the students used shapes, that is, a physical model, while continuing the given pattern,
- In the second and third questions, simple number patterns were given instead of geometric patterns. First-degree reflecting abstraction level was determined as seeing and envisioning the number patterns in their minds was more abstract than physical modeling questions and therefore required deep thinking,

- In the fourth question, second-degree reflected abstraction level was determined as being able to find out what would happen at any point in the pattern and envisioning the expansion of the patterns in their minds required more algebraic thinking,

- Lastly, patterns; (silelim) being able to associate the patterns with function and arithmetic and geometric sequence was determined as third-degree meta-reflection level.

Since third-degree meta-reflection abstraction is suitable for students at secondary and higher education levels, examples of this level were not included.

The framework below was created for the abstraction levels of the outcomes determined based on the abstraction levels of the questions prepared by Zembat (2016) on teaching the concept of equivalent fractions and on the way she explained these abstraction levels.

Table 3. *Abstraction levels and explanations regarding the outcomes*

	Levels			
Outcomes	Empirical abstraction (0.)	First-Degree Reflecting Abstraction (1st)	Second-Degree Reflected Abstraction (2nd)	Third-Degree Meta-reflection Abstraction (3rd)
Creating strategies for doing addition in mind.	Being able to do addition given with the model. Reflective thinking did not occur because it was done by using physical objects.	Being able to use the change and unification features of addition. The fact that they were able to use these two features of addition without making use of physical objects showed that they internalized the process and thought deeply.	Being able to do the given addition by producing their own strategies. Being able to explain the given strategy. The students' doing the operation by producing their own strategies allowed them to make fewer mistakes. At this level, reflected abstraction occurred as the students were able to explain the existing strategy and produce their own strategies. There was a deeper thinking than at the previous level.	
Creating a pattern, continuing the given pattern, and finding the pattern's rule.	Being able to draw the next step of the given geometric patterns. The reflecting abstraction level did not occur as the	Being able to predict the next step of the given number pattern and to find the number that broke the rule. Being able to see the relationship between number patterns required deeper thinking than the	The expanding pattern. Being able to tell what would happen at any point in the pattern. At this level, the student should generalize the pattern algebraically to be able to tell what would happen at any point in	Being able to express the given pattern as an arithmetic and geometric sequence.

	students reached the next step by making use of physical objects.	relationship between geometric shapes.	the pattern. This required algebraic thinking and thus deeper thinking than at the previous level.

Analysis of Data

After the questions prepared within the scope of the study were applied, the abstraction levels were created by using the framework in Table 3 in line with the participants' readiness. The data obtained were analyzed based on these abstraction levels. The abstraction levels created for the participants can be seen in Table 4 below.

Table 4. *Abstraction levels of the participants*

	Levels			
Students	Empirical Abstraction	First-Degree Reflecting Abstraction	Second-Degree Reflected Abstraction	Third-Degree Reflective Abstraction
S1	Was able to do addition with the model; was able to model the given addition.	Was unable to do the given addition by using the change and unification features of addition.	Was unable to produce a strategy for the given additions.	
S2	Was able to model the given addition. Was unable to model the given addition.	Was unable to do the given addition by using the change and unification features of addition	Was unable to produce a strategy for the given additions.	
S3	Was able to predict the next step of the given geometric pattern.	Was unable to predict the next step of the given number pattern or to find the number that broke the rule.	Was unable to create a rule regarding the given pattern.	
S4	Was able to predict the next step of the given geometric pattern.	Was unable to predict the next step of the given number pattern or to find the number that broke the rule.	Was unable to create a rule regarding the given pattern.	

Ethical Permissions for the Study

In this study, all the specified rules to be followed within the scope of "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" were followed. None of the actions stated under the title of "Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics", which is the second part of the directive, was taken.

Ethics committee permission

Ethical approval was given for this study in the decision of Van Yüzüncü Yıl University Ethics Committee dated 27.03.2020 and numbered 2020/02-06.

Name of the committee that made the ethical evaluation = Van Yüzüncü Yıl University Ethics Committee

Date of ethical evaluation decision = 27.03.2020

Ethical evaluation document number = 25477

Findings

In this section, the findings obtained in line with the examination of the mathematical abstraction levels of the secondary school inclusive students were presented in accordance with the weeks applied for S1-S2 and S3-S4 and with the sub-problems examined.

Week 1 / Live Lesson 1

In this live lesson, the behavior of "Explains the addition with models and performs addition with and without carrying regarding the outcome of "being able to develop strategies to do addition in mind" was examined.

The teacher started the live lesson by entering EBA and opened the questions she prepared about the modeling of addition on her computer, and she shared the screen with her student. The teacher first introduced the base ten blocks to the student. Later, she asked the student to say the first modelled addend in the addition. The student reached the number by counting the tens and the ones and found the second addition in the same way. The sum is found first by counting tens and units. The teacher asked the student how this operation can be done without modeling. The student said she could do it by writing the numbers one under the other. In this case, the teacher gave the student time to complete the operation. The teacher asked the student to model the result, and modeling was done with base ten blocks. The teacher directed questions to the student to see the relationship between the tens and ones of the added numbers and the sum. The student was intended to discover that he could add the tens first, then the ones, and finally all of them. The student dealt with the other modeling questions in the same way. Lastly, the teacher ended the lesson by saying that the student's participation was good during the live lesson and by explaining what they would do in the next live lesson.

Week 1 / Live Lesson 2

In this live lesson, the behavior of "does addition with three-digit and four-digit numbers and explains the change and unification features of addition" was examined.

The teacher asked the student to remind them of what they did in the previous live lesson. The student's missing learnings about the previous live lesson were eliminated, and examples of addition operations related to three-digit and four-digit numbers were given. The student was asked to do the addition without using modeling. The 100, 200, 300 and 400 additions for one of the addends were given, and it was ensured that the student was able to reach the result by adding the hundreds. This was followed by the next question, which was the addition operation involving more than two addends. The teacher asked what kind of change with the encountered numbers would provide ease of operation. The student said they could add the small numbers first. The teacher pointed to the fact that for the question of "17 + 46 + 13 + 74", in the student's words, the numbers must be replaced to add up the small numbers and that in the question of "49 + 13 + 27", grouping should be done to add the small numbers. It was explained that the addition operation had the features of change and unification, which provided ease of operation.

Week 1 / Live Lesson 3

In this live lesson, the behavior of "does the addition from the mind and writes from the mind the addition whose operation is given”.

The teacher opened the "watermelon picking" game via EBA, which was an addition activity from the mind. In this game, the student was asked to do the given addition operations within a certain time. Due to the time limit, the student involuntarily tried to do the addition operations from the mind. The teacher said that it was possible to do the operations in mind instead of doing them by writing, as in the game. It was seen that the students randomly did some of the additions during the game because they had the ambition to win. The teacher reopened the modeling questions they had done in the first live lesson, said that they could do these operations in mind, and asked the students how they should do the operations. Here, the students were expected to develop their own strategies. However, the students said that they could add them by writing one under the other. Finally, the students were shown the operation steps that were followed in mind, and they were asked what this addition process was. The students gave wrong answers by saying the addition operation they saw on the screen. The teacher explained through another example, saying that it was possible to separate the collected numbers into pieces to do the addition more easily. Thanks to this example, the students were able to say what the addition operation done in mind was.

Week 2 / Live Lesson 1

In this live lesson, the behavior of "develops strategies to do addition in mind” was covered.

In order to improve the student's ability to do addition in mind, the teacher asked the students to do the examples of addition in the 5th-grade mathematics coursebook. These examples, in which there were many addends, encouraged the students to do addition from their minds and to develop strategies. The teacher guided the students to develop strategies. Lastly, the teacher tried to make it meaningful for the student by associating doing addition in mind with daily life. For example; “Our mother wanted us to go to the supermarket and asked us to buy flour, sugar, oil, milk, eggs and cocoa.” Here, in order for the student to understand whether the money was sufficient, the intention was to have the students think that it was possible "to find the approximate prices of the products to be purchased by adding them in mind."

Week 2 / Live Lesson 2

In this live lesson, the teacher said that she would apply the questions prepared for the research, and informed them that they would not be evaluated with a grade and asked them to do the questions. The students were guided with sample questions from previous lessons when they did not understand or got stuck. While solving the questions, one of the students did not have a problem with the modeling of the addition operation in the first and second questions, yet the other student (S2) had a problem with modeling the three-digit number and preferred to add one under the other because he wanted to find the result. Again, the student (S2), who preferred to add one under the other, added the numbers by saying that in the example given in the problem style in the third question, 32 and 15 would be added. The student did the operation of 32 + 15 in items a and b in the third question and explained that the same numbers were added in these two questions. In items c and d, S2 added the numbers one under the other and said the same thing was written twice. S1 did the operation of 32+15 and 15+32 in items a and b of the third question. When the teacher drew attention to the places of the numbers, the student concluded that their places changed but the result did not. The student also stated that in items c and d of the third question, they added the numbers by changing their places. The student reported that there was the change feature of addition as the parts they added changed. Both of the students could not develop a strategy in the fourth question and preferred to add the given operations one under the other.

Week 1 / Live Lesson 1

In this live lesson, the behaviors of "creates the given geometric pattern and draws the next step of the given geometric pattern" regarding the outcome of "creates a pattern, continues the given pattern and generalizes the pattern" were covered.

The teacher drew a pattern consisting of geometric shapes arranged according to a certain rule at a simple level and asked the student to explain the pattern. The students explained the pattern by saying, "Square, round, square, round." As a result, the teacher asked the students what the next shape would be in the pattern in which the last "circle" was drawn, and the teacher expected them to answer. After the students gave the answer of "square", the teacher congratulated them. The students were shown the slightly more complex geometric pattern in Figure 1, and they were asked to explain the pattern. As the students focused on the increase in the number of arrows, they could not notice the direction of the arrows. At this stage, the teacher posed the question of whether the directions of all the arrows were the same. After this, the students determined the direction of the arrows and drew the fourth step. The lesson continued with the geometric pattern question in Figure 2, and the students were asked to explain the pattern and to draw the next step. The students said that the next step would be in the form of the letter "L". The teacher guided them to make another comment about the next step by telling them to pay attention to the number of dots from top to bottom. For example, the students were expected to provide an explanation like "there is one dot at the top and two dots at the bottom in the 2nd step and one dot at the top, then two and then three dots in the 3rd step." As the number of dots increased from top to bottom, it was resembled to the letter 'L'.

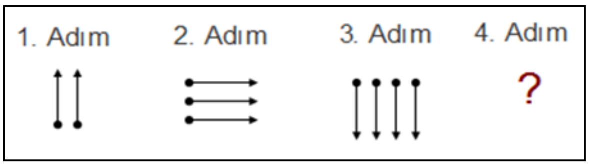


Figure 1. A sample geometric pattern

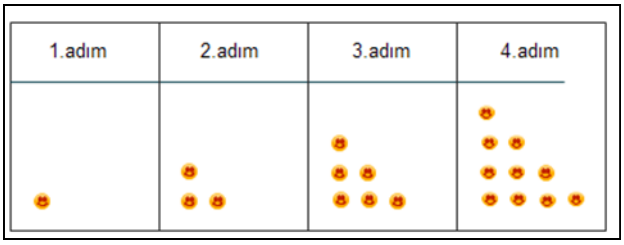


Figure 2. A sample geometric pattern

Week 1 / Live Lesson 2

In this live lesson, the behavior of "explains the given number pattern" was covered.

The teacher started the lesson by saying that they would deal with numbers instead of geometric shapes. In this lesson, the purpose was to have the students first express verbally the number patterns given with a rule. Since numbers are abstract, examples of simple number patterns were given first. The students were asked to explain the rule of the pattern given as 5, 10, 15, 20, 25, …. The teacher first asked the students whether the given pattern was 'increasing' or 'decreasing', and the students gave the answer of 'increasing'. Then, the teacher asked what it increased by. The students said that the pattern increased five by five. Later in the lesson, then number pattern of 21, 17, 13, 9, …. was asked, and the students were requested to explain the rule of the pattern. First, the students determined whether the pattern increased or decreased. The students said it decreased by 4 counting down from 21 to 17; by 4 counting down from 17 to 13; and by 4 counting down from 13 to 9, and they concluded that the pattern continued with a decrease of 4. The teacher asked the students the slightly more complex number pattern of 1, 2, 4, 7, 11, … and requested them to find the rule of the pattern in the same way. The students first said that it continued by 2. The teacher asked whether it also increased by 2 between 1 and 2 and between 4 and 7. The students here noticed that the numbers did not increase by 2. The teacher tried to make the students realize the relationship between the amount of increase between the numbers by writing the numbers on the share screen. The students concluded that it increased one by one. It was found that the next increase would be five.

Week 1 / Live Lesson 3

In this live lesson, the behavior of "finds the next step of the given number pattern" was covered.

The teacher reminded that they found the rule for the number patterns given in the previous lesson. She said that in the lesson, they would find the next steps of the patterns whose rule they had found. The teacher asked the students to find the rule again in the number pattern given as 5, 10, 15, 20, 25, … in the previous lesson. The students said that it first increased and then increased by five. The teacher then asked what the next number would be. The students gave the answer of 30 by adding 5 to 25. Similarly, in the next number pattern of 21, 17, 13, 9, …, the students first said the rule and gave the answer of 5 as the next number by counting back from 9 by 4. In the slightly more complex number pattern of 1, 2, 4, 7, 11, …, the students had difficulty finding the rule. With the teacher's instructions, they found the rule again and reached the number in the next step as "increased by 1, increased by 2, increased by 3, increased by 4, and now will increase by 5, so it will be 16".

Week 2 / Live Lesson 1

In this live lesson, the behavior of "finds the geometric shape that breaks the pattern and finds the number that breaks the pattern" was covered.

The teacher started the lesson by saying that they would find the shapes and numbers that broke the rule in the patterns given that day, and the teacher shared the geometric pattern question on the screen. Sharing the patterns in Figures 3 and 4, the teacher asked the students to find the rule of the pattern in Figure 3 first. The students said that the pattern continued in the form of "sun and moon". The teacher then asked with how many suns and how many moons the pattern continued. The students answered as "three suns one month, three suns one month." The teacher asked them to count the suns and moons again in the last stage. The students said "two suns and one moon" and reported that it was not the same in the other steps. The teacher said and asked, "Then there is a shape that breaks the rule, which do you think it is?" The students said that the last moon broke the rule. The geometric pattern in Figure 4 was examined in the same way, and the colors that broke the rule were found.

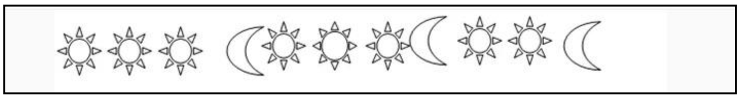


Figure 3. Sample geometric pattern breaking the rule

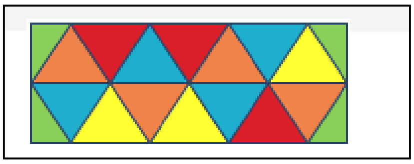


Figure 4. Sample geometric pattern breaking the rule

Next, the number patterns specified in Figure 5 were given, and the students were asked to find the numbers that broke the rule. First, they were requested to express the rule of the given number patterns and then to find the number that broke the rule. Both of the students verbally stated that the rule of the number pattern in Figure 2 (a) increased by five and realized that the number 30 broke the rule. For the students who had difficulty in items (b) and (c), the teacher wrote item (b) on the share screen, said that there was a similar relationship between 1 and 2, between 2 and 4, and between 4 and 8 and helped the students notice the two-fold relationship. With the help of the teacher, the other terms were found as 8 and 16 and as 16 and 32. The number that broke the rule because 20 was written instead of 16 was found by the students. In item (c), the teacher asked whether the pattern continued by increasing or by decreasing and told the students to pay attention to the amount of increase or decrease. As a result of this guidance, both students found that the given pattern continued by increasing. In this pattern, where the amount of increase was not constant, a similar example was solved as a reminder. With this example, the students found where the mistake was by saying it increased by 5, increased by 6, increased by 7 and increased by 7. With the help of guidance, they wrote it correctly as "it increased by 5, increased by 6, increased by 7, increased by 8, increased by 9, ….

a) 5 – 10 – 15 – 20 – 30

b) 1 – 2 – 4 – 8 – 20 – 32

c) 4 – 9 – 15 – 22 – 29 – 39

Figure 5. Sample number pattern breaking the rule

Week 2 / Live Lesson 2

In this live lesson, the behavior of "finds the desired step in the given pattern and generalizes the given pattern" is covered.

During the lesson, examples of finding any desired step were solved together with the students. First, the students were given a number pattern of 3, 5, 7, 9, … and were asked to guess the tenth step. The teacher reminded the students that before finding the tenth step, they had to find the rule of the pattern. The students reached the rule that the pattern continued by increasing first and then increasing by two. After the last term, both students reached the tenth step by taking six steps by 2: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, …. Later, given the pattern in Figure 6, they were asked to find the number of chairs at the tenth table. With the teacher's question of "How many chairs are there at the first table, and how many chairs are there at the second table?", the numbers of chairs at each table were found together with the students. The numbers of chairs were 4, 6, 8, …, respectively. The teacher asked the students to explain the rule of this pattern. The students noticed that the chairs were increasing by two, and they preferred to write one by one to find the number of chairs at the tenth table. The students; reached the number of chairs at the tenth table by writing as 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22,…..

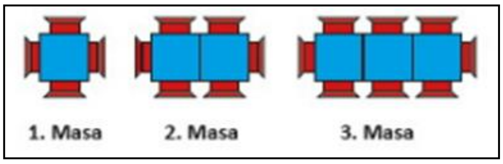


Figure 6. Sample geometric shape pattern

In this lesson, the teacher directed the question of "If we are asked to find the 100th step, will we write one by one?" The students said there was an easy way but failed to say what it was. The teacher filled in Table 4 and Table 5 with the students, respectively.

Table 5. *The relationship of number of steps regarding the pattern of "3, 5, 7, 9, …"*

Number of steps	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**n**
Number found	3	5	7	9	11	…	2n+1
	+2	+2	+2	+2	+2		

Table 6. *Relationship between the numbers of chairs and tables*

Number of tables	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**n**
Number of chairs	4	6	8	10	12	…	2n + 2
	+2	+2	+2	+2	+2		

Filling the Table 5 and Table 6 with the students; It was seen that there was a relationship between "the number of steps and the number found in that step" and "the number of tables and the number of chairs". In Table 5, it was seen that there was 2 times minus 1 between the number of steps and the number found in that step. Then, in step n (the teacher told the students that they could write any number they wanted for n), it became 2 times minus 1 (2.n -1). As a result, the students found the general rule of the given pattern, and they could easily find all the steps they wanted. With the teacher's guidance, the students found that in Table 6, the relationship between the number of tables and the number of chairs was as "2 times plus 2" and that at table n, the students reached the conclusion that this relationship would be 2.n + 2. Likewise, the students were told that there was a general rule and that they could find any step they wanted. For example; there were 2.100 + 2 = 202 chairs at the 100th table.

Week 3 / Live Lesson 3

In this live lesson, the teacher said that she would apply the questions prepared for the research, informed them that they would not be evaluated with a grade and asked them to do it. The students were guided with sample questions from previous lessons when they did not understand or got stuck. Both of the students said that in the first question of "yellow star, empty star, empty triangle", the first question mark would be "empty star" and the second question mark would be "empty triangle". Both of the students reached item a of the second question without any problems. In item b, they asked for help on how to do it. At this stage, the teacher reminded them of the example of 1, 2, 4, 7, 11, … from the previous lesson, allowing them to focus on the relationship between numbers. After this example, both students were able to complete the second question. In item a of the second question, they said "it continues 2 by 2, and after 10, it becomes 12". In item b, after the teacher reminded them of the previous lessons, the students reached the conclusion that "it increased by 3, increased by 6, increased by 12, and now it will increase by 24, and then it is 47". In the third question, one of the students (S3) could not find the number that broke the rule and could not explain the pattern. In the third question, S4 said with the help of item b, "it continued with a decrease of 2, and they wrote 38 wrongly" in the first number pattern and said, as a conclusion, with the help of item b of the second question, "it increased by 1, increased by 2, increased by 4, increased by 8; they wrote 16, but it will be 17" in the second number pattern. In item a of the fourth question, both students tried to reach the desired step by drawing, but they could not answer the question given in item b.

The answers given by each student to the questions were examined; notes were taken regarding the answers of the students during the application; and the necessary explanations were provided. As can be seen in Table 7 and Table 8 below, the questions that the students solved were indicated as (+), and the questions they failed to solve were indicated as (-).

Table 7. *Participants' answers to the questions*

Student Code	**First Question**		**Second Question**			**Third Question**				**Fourth Question**			
	a	b	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d
S1	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
S2	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Table 8. *Participants' answers to the questions*

Student Code	**First Question**		**Second Question**		**Third Question**		**Fourth Question**	
	a	b	a	b	a	b	a	b
S3	+	+	+	+	-	-	-	-
S4	+	+	+	+	+	+	-	-

Based on Table 7 and Table 8, the students' mathematical abstraction levels were determined and presented in Table 9.

Table 9. *Secondary school inclusive students' mathematical abstraction levels*

Student Code	**Gender**	**Class Grade**	**Abstraction Levels**			
			Empirical Abstraction	1st-Degree (reflecting abstraction)	2nd-Degree (reflected abstraction)	3rd-Degree (metareflection)
S1	K	5	✓	×	×	×
S2	E	5	×	×	×	×
S3	E	7	✓	×	×	×
S4	E	7	✓	✓	×	×

In Table 10, the most repeated actions of the students were given and associated with the abstraction levels. "Adding by writing one under the other and adding by counting the fingers" and "trying to reach the desired step of the patterns by drawing" were the most repetitive actions in the students.

Table 10. *The most repetitive findings related to the abstraction levels*

Abstraction Levels	Codes	S1	S2	S3	S4
Empirical abstraction	Adding by writing one under the other	+	+		
	Adding by counting the fingers	+	+		
	Trying to reach the desired step in the given geometric and number patterns by drawing			+	+
1st-degree reflecting abstraction	Explaining the relationship between number patterns and finding the next step			-	+

Conclusion, Discussion and Suggestions

In general, the students left the explanation part of the questions blank, failed to explain why they thought so, and experienced difficulties in communicating. It was seen that the students often had problems focusing their attention on one thing. This made it difficult to internalize the process. The students avoided establishing a mental relationship and preferred to do it in their own way. This may indicate that they chose to memorize the information. In this respect, the students who tried to do it through memorization could not do the questions that required abstraction. Especially in relation to the acquisition of the ability to do addition in mind, it was seen that the students always preferred the way of adding one under the other and that they did not want to solve it in a different way. For this reason, acquisition of the targeted outcome was not fully achieved. The fact that mathematical information was abstract and that the attention of the inclusive students was short and scattered during the application might have led to failure in full internalization of mathematical concepts (Merril, 2005; Senemoğlu, 2007; Sucuoğlu, 2010).

When S1's mathematical abstraction level was examined based on Table 7, it was seen that S1 solved the first two questions by making use of physical (concrete) objects. As the student made use of physical objects while doing the addition, she was at empirical abstraction level in the first two questions. In the third question, the student was expected to be at the first-degree reflecting abstraction level. However, when the student's answers were examined, it was seen that she was able to explain the relationship (the change feature of addition) in items (a) and (b) but was unable to explain the relationship (unification feature of addition) in (c) and (d). At the same time, the student did the addition operations given in the fourth question by writing them one under the other, and she did not use any mental strategy; therefore, it was shown as (-). In line with this information, it was seen that the student could not fully internalize the outcome of " develops strategies to do addition in mind". In this respect, as the process was not internalized, reflective abstraction was not fully achieved. The student was at the level of empirical abstraction as she did the addition by using physical objects. According to Simon (2004), many students try to learn by basing certain questions on certain operations without understanding mathematical concepts. An example of this was that the students did the additions by adding one under the other instead of developing strategies. According to Table 9, no change was observed in the abstraction level of the student at the end of the research. In this respect, it could be stated that the student did not have sufficient readiness level or sufficient comprehension capacity. A teaching process should be planned considering the student's current abstraction level, and accordingly, the student should be provided with help to internalize the learning process.

When S2's level of mathematical abstraction was examined according to Table 7, it was seen that he was able to answer the first question and that in the second question, he managed to do items (a) and (b) but failed to do item (c) by modelling. The student did item (c) by adding one under the other. In the first and second questions, the student was at the level of empirical abstraction as he did additions by using physical (concrete) objects. Therefore, the student who answered the first question was expected to answer the second question as well. However, it was seen that S2 could not complete item (c) of the second question. In the third question, he did the operation of 32+15 and the same numbers were added in these two questions. In items c and d, he added the numbers by writing them one under the other, and as he said "you wrote the same thing twice", he could not see the change and unification features of addition. For this reason, the student failed to achieve the first-degree reflecting abstraction level, which constituted the abstraction level of this question. In the last question, he could not achieve the second-degree reflected abstraction level because he chose to add the numbers one under the other instead of creating a strategy. Among the reasons for this, we can say that the student chose to memorize the information instead of internalizing it or that he was not at sufficient readiness level. Lastly, it could be stated that the student could not fully achieve the level of empirical abstraction as he did the first question yet left the second question incomplete.

When S3's level of mathematical abstraction was examined based on Table 8, it was seen that he answered the first and second questions and item (a) of the third question. As the student was able to do and explain the first question, he was at the level of empirical abstraction. Since the pattern given with numbers in the second question would lead the student to think mentally, the student was at the first-degree reflecting abstraction level for this question. In the third question, a connection was established with the second question asking the numbers that broke the rule. For this reason, the student who answered the second question was expected to answer the third question as well. He needed to find the rule of the given number patterns in both questions. The student answered the items (a) and (b) of the second question correctly. He could not fully achieve the reflective abstraction process because he failed to answer the third question. Therefore, he remained at the empirical abstraction level. According to Table 9, there was no improvement in the abstraction level of the student. Thus, a new IEP should be prepared again in accordance with the abstraction level of the student.

When S4's math abstraction level was examined based on Table 8, it was seen that he answered the first three questions and failed to answer the fourth question. In the first question, the student's ability to explain by making use of physical (concrete) objects shows that he was at the level of empirical abstraction. Because the second and third questions encouraged the student to think mentally and because he answered these questions correctly, the student could be said to be at the first-degree reflecting abstraction level. As the fourth question was related to the student's ability to establish algebraic relationships, it required deeper thinking than the second and third questions, which indicated the level of reflected abstraction. In the fourth question, instead of finding a relationship between the number of steps and the terms of the pattern, the student drew up to the desired number of steps; in other words, he could not explain the given pattern algebraically. Therefore, the student remained at the first-degree reflecting abstraction level. According to Table 9, it could be stated that the student progressed from the empirical abstraction level to the first-degree reflecting abstraction level and internalized the process up to this stage. In order for the student to internalize this process more, more lesson activities that support the first-degree reflecting and second-degree reflected abstraction levels should be included. This will contribute to the educational development of the student.

When the results were examined in general, the students were at different levels of mathematical abstraction though they were at the same level of readiness and with the same type of incompetency. It was seen that S1 and S2 could not develop strategies to do the addition operation in mind. In this respect, even if students have the same incompetency types and readiness levels, IEP should be prepared again for each of them and the teaching process should be planned taking their mathematical abstraction levels into account. This will contribute to the educational development of the students at highest level. Although the students coded as S3 and S4 had the same incompetency type and the same level of readiness at the beginning of the research process, their mathematical abstraction levels were different. Among the students at the same readiness level, S4 came out at a higher level of mathematical abstraction. In other words, a common lesson plan should not be applied by making a generalization that inclusive students with the same incompetency and at the same level of readiness are at the same educational level.

According to Bingölbali and Özmantar (2012), doing addition by using direct modeling and number relations progresses from simple to complex depending on the abstraction processes. Van de Walle, Karen, and Jennifer (2018) stated that students should not be asked to make mental calculations in the first place as they may be in the modeling process. We can associate this with Piaget's (2001) idea that students use physical models at the empirical abstraction level and reach mathematical generalizations at reflective abstraction. Thus, we can say that the reflective abstraction level is more complex than the empirical abstraction level. It was also stated that students could use objects that enabled them to count in order to model the existing operation as well as could produce abstract strategies (Carpenter, 1999, cited in Bingölbali and Özmantar, 2012, pp.31-61). Consequently, the student solved the operation of 46+38 by determining such a strategy in his own as "Take 2 from 46 and give it to 38 to make 40. Then, add 44 and 40, and the result is 84", which shows that he could think deeply in mathematical aspect and was at the level of reflective abstraction. In addition, the change and unification features of addition facilitate problem solving and mathematical operations in mind (Van de Walle, Karen and Jennifer, 2018). However, although the change feature is obvious, it may not be clear enough for students. It is pointed out that students' understanding the change and unification features of addition will enable them to make higher levels of abstraction (Carpenter, 1999, cited in Bingölbali and Özmantar, 2012, pp.31-61). Thus, the students' ability to explain the change and unification features of addition could be considered as reflecting abstraction level. According to Simon (2004), many students try to learn by basing certain questions on certain operations without understanding mathematical concepts. This view is supported by the fact that the students wrote the addition operations one under the other instead of developing a strategy supports.

Patterns do not just allow students to expand the pattern. They also allow saying what will happen at any point in the pattern and making generalization. In this respect, we can regard the stages of creating, continuing and generalizing patterns as levels of empirical abstraction and reflective abstraction. Geometric patterns provide good examples because it is easy to see the pattern and students can change objects by moving them (Van de Walle et.al., 2018). In this respect, we can say that the students were at the level of empirical abstraction because they did not make any mathematical generalizations and because they made use of physical objects while drawing or predicting the next step of the geometric pattern. However, here, it was important to ask them to draw the next step. Asking to draw any step requires generalization in the mathematical sense because while reaching mathematical generalizations, students go through a mental structuring process when analyzing how the structure of the pattern changes (Van de Walle et.al., 2018). Similarly, Dreyfus, Hershkowitz and Schwarz (2001) defined the formation of generalizations in the mathematical sense as the transition from physical models to symbols and from symbols to mathematical concepts. As a result of the research, it was seen that one student remained at the level of empirical abstraction; in other words, the student could not internalize the learning process related to the desired outcome. The other student was at the level of first-degree reflecting abstraction. However, it could be stated that the student could not fully internalize the learning process because the student failed to reach mathematical generalizations (second degree) and because this stage required more general abstraction than the first-degree reflecting abstraction level.

In order to see the progress in the abstraction levels of the students or to prepare activities according to their abstraction levels, teachers should have information about the abstraction levels of their students. In this way, for the teaching of any mathematical concept, the teacher will be able to include activities which will allow revealing the abstraction levels of students or which will help students abstract the mathematical concept. In this respect, research could be conducted to examine the extent to which IEPs include activities to reveal the abstraction levels of students and to examine whether teachers teach the lesson by paying attention to the abstraction levels. Abstraction levels could also be investigated in other courses/disciplines apart from mathematics. In this respect, a teaching process which might be more beneficial for students and in which they can internalize the learning process and acquire metacognitive thinking skills can be planned. After determining the abstraction levels of students, group education could be conducted with inclusive students who have the same abstraction level. Group education will be beneficial in terms of improving students' socialization, self-confidence, self-control and self-expression. With this benefit, a step could be taken for “integrating students into society”, one of the aims of inclusive education. Lastly, since the study was limited to the mathematics abstraction levels of students with certain disabilities, future studies could examine the mathematics abstraction levels of students with other types of disabilities.

Kaynakça

Akçamete, G. (2015). *Özel gereksinimi olan çocuklar*. Ankara: Kök Yayıncılık.

Altun, M. (2015). *Ortaokullarda (5, 6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi* (11. Baskı). Bursa: Aktüel Yayıncılık.

Bingölbali, E & Özmantar, M. F. (2012). Matematiksel zorluklar ve çözüm önerileri. Erdoğan, A. & Erdoğan Özdemir, E. (Ed.), *Toplama ve çıkarma kavramlarının öğretimi ve öğrenci güçlükleri* (ss. 31-61). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Can, E. (2020). Coronavirüs (covid-19) pandemisi ve pedagojik yansımaları: Türkiye'de açık ve uzaktan eğitim uygulamaları. *Açıköğretim Uygulamaları ve Araştırma Dergisi*, *6*(2), 11-53.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematcis: Cognitively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Creswell, J. W. & Maietta, R. C. (2002). Qualitative research. In D. C. Miller & N. J. Salkind (Ed.), *Handbook of social research* (pp. 143-184). Oaks, CA: Sage.

Doğaroğlu, T . (2013). Türkiye'de Dikkat Eksikliği ve Hiperaktivite Bozukluğu ile İlgili Çalışmaların Yürütüldüğü Lisansüstü Tezlerin İncelenmesi . Journal of Computer and Education Research , 1 (2) , 90-112.

Merril, E. C. (2005). Preattentive orientingin adolescents with mental retardation. *American Journal on Mental Reteardation*, *110*(1), 28-35.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2014). *Çocuk gelişimi ve eğitimi- öğrenme güçlüğü modülü*. Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Matematik dersi öğretim program (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ve 8. Sınıflar).* Ankara: Millî Eğitim Bakanlığı.

Pesen, C. (2008). *Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımına göre matematik öğretimi.* Ankara: Sempati Yayınları.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction* (Çev.Ed. R. L. Campbell). Sussex, England: Psychology Press.

Resmî Gazete. (2020). Özel eğitim hizmetleri yönetmeliği. Sayı: 31152.

Senemoğlu, N. (2007). *Gelişim, öğrenme ve öğretim: Kuramdan uygulamaya.* Ankara: Gönül Yayıncılık.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104. http://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2.

Sorgun Rehberlik Araştırma Merkezi. (2017). Yetersizlik türleri ve özel bireylere toplumun bakış açısı.

Stake, R. (1995). *The art of case study research.* Oaks, CA: Sage.

Sucuoğlu, B. (2010). Zihinsel engelli bireylerin özellikleri. N. B. Sucuoğlu (Ed.), *Zihinsel engelliler ve eğitimleri içinde* (ss. 120-173). Ankara: Kök Yayıncılık.

Van de Walle, J. A., Karen, S. & Jennifer, M. (2018). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim* (Çev. Ed. S.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Zembat, İ. Ö. (2016). Piaget'e göre soyutlama ve çeşitleri. E. Bingölbali, S. Arslan, & İ. Ö. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler içinde* (ss. 447-458). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Zembat, İ. Ö. & Aslan, M. (2016). Prescriptions guiding prospective teachers in teaching mathematics. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 16*(3), 735-769. https://doi.org/10.12738/estp.2016.3.0371