Apollonius'un Koni Kesitlerine Tarihsel Bir Bakış*

*İrem ASLAN SEYHAN***

Makale Geliş / Recieved: 23.02.2021
Makale Kabul / Accepted:06.05.2021

Öz

Pergeli Apollonius, Eukleides ile birlikte geometri tarihinin en önemli iki isminden biridir. Onu bu denli önemli kılan elbette ki çağının çok ötesindeki eseri, Konika'dır. Antik dönem koni kesitleri tarihi kelimenin tam manasıyla, Apollonius öncesi ve Apollonius sonrası olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Literatürde Apollonius öncesi dönem "Dikey Konjügasyon Teorisi", Apollonius sonrası dönem "Eğimli Konjügasyon Teorisi" olarak geçmektedir. Bu makalede bu çizgiyi takiben öncelikle Apollonius'un bu devasa eserinin oluşmasına kaynak sağlamış olan Antik Yunan bilginlerinin çalışmaları incelenmiştir. Apollonius'un tarihsel ve matematiksel arka planı serimledikten sonra, Apollonius'un ismiyle anılan teorisi sunulmuştur ve eseri hakkında detaylı bilgi verilmiştir. Ayrıca koni kesitleri çalışmaları ve Antik Yunan'ın üç meşhur probleminin çözümü arasında ilginç bağlantılar tespit edilmiş ve bu konuda çeşitli matematiksel örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Geometri Tarihi, Pergeli Apollonius, Koni Kesitleri, Konika, Dikey Konjügasyon Teorisi, Eğimli Konjügasyon Teorisi, Pergel Cetvel Yapıları, Delos Problemi.

A Historical Overview of Apollonius' Conic Sections

Abstract

Apollonius of Perga, along with Euclid, is one of the two most important figures in the history of geometry. He owes this fame mostly to his monumental work Conica, which is far beyond

---

* Bu makale Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Bilim Tarihi Ana Bilim Dalı'nda hazırlanan "Osmanlılar'da Koni Kesitleri: Seyyid Ali Paşa" isimli Doktora tezinden türetilmiştir.

** Dr. Öğr. Üyesi, Bartın Üniversitesi, Felsefe Bölümü, iaseyhan@bartin.edu.tr,
ORCID: 0000-0003-4999-2891.

Künye: ASLAN SEYHAN, İrem, (2021). Apollonius'un Koni Kesitlerine Tarihsel Bir Bakış, *Dört Öge*, 19, 95-121. http://dergipark.gov.tr/dortoge.

its age. Conic sections of the ancient period literally divided in the two parts namely pre-Apollonian theory and post-Apollonian theory. In the literature, the pre-Apollonian theory is referred as the "The Vertical Conjugation Theory" and the post-Apollonian theory reffered as "The Oblique Conjugation Theory". In this article, the works of Ancient Greek scholars who provided a source for the creation of the gigantic work of Apollonius were examined. After explaining the historical and mathematical background of Apollonius, the theory named after Apollonius was presented and detailed information was given about this work. Last but not the least, some interesting connections between the studies of conic sections and the solutions of three famous problems of Ancient Greek have been determined and various mathematical examples are presented on this subject.

Keywords: History of Geometry, Apollonius of Perga, Conica, Vertical Conjugation Theory, Oblique Conjugation Theory, Compass and Straightedge Constructions, The Delian Problem.

Üzerimde emekleri olan hocam, merhum Prof. Dr. Cem Tezer'e

1. Giriş

"Archimedes ve Apollonius'un çalışmalarını anlayan kimseler, en parlak modern keşiflerin karşısında daha az hayret duyacaklardır. [Qui Archimedem et Apollonium intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur]" Leibniz (Ostermann ve Wanner, 2012, s.72). Morris Kline'a göre, klasik dönemin matematiğinin en mükemmel örneklerinden biri Apollonius'un *Koni Kesitleri*'dir (Κωνικά) (Kline, 1972, s. 27). Koni kesitleri matematikçiler tarafından çalışılmış en eski eğrilerdir ve Antik Yunan matematiğinin zirve noktasını temsil eder. Koni kesitleri bir koninin bir düzlem tarafından farklı şekillerde kesilmesiyle elde edilir. Bu şekilde üç cins eğri elde edilebilir: Parabol, hiperbol ve elips. Elbette daire de elde edilir ancak daire elipsin özel bir halidir. Günümüzde bu konular modern geometride kartezyen veya polar koordinatlar yardımıyla, ikinci derece denklemler ve trigonometrik fonksiyonlar vasıtasıyla çalışılır. Antik dönemlerde ise bu konu sentetik geometri yardımıyla incelenmiştir (Aslan Seyhan, 2017, s. 3).

Bu konuyu bu noktaya taşıyan kişi ise şüphesiz *Büyük Geometrici* Pergeli Apollonius'dur (MÖ 262-190). Apollonius, matematik tarihinin en önemli isimlerinden biridir. Ancak buna rağmen hayatı hakkında pek fazla bilgi bulunmamaktadır. Bugün, Antalya'nın doğusunda, konumlanan Pamfilya bölgesine başkentlik yapmış bir antik kent olan Perge'de yaşadığı bilinmektedir.

Apollonius koni kesitleri konusunu *Konika* eserinde en ince ayrıntılarıyla incelemiştir. Bu eser öyle kapsamlıdır ki, ardılları bu konuya ancak ufak tefek ekler yapabilmişlerdir. Hatta ünlü astronom Kepler;

> "Kaç matematikçi Pergeli Apollonius'un Konika'sının tamamını okuma zahmetine katlanabilmiştir ki? [Quotusquisque mathematicorum est, qui tolerat laborem perlegendi Appollonii Pergaei Conica?]" (Kepler, 1609; Ostermann ve Wanner, s. 61)

sözleriyle bu konuyu çalışmak isteyen bir matematikçinin çok emek sarf etmesi gerektiğine dikkat çekmiştir. Bu konu matematikçiler tarafından son derece katmanlı ve sıkıntı verici bir konu olarak görülmüştür. Elbette bu sıkıntı ve karmaşıklık, matematikçilerin hevesini kırmamış aksine onları teşvik etmiştir. Kepler (1571-1630) *Astronomia Nova*'sında koni kesitlerini kullanmış ve eliptik yörüngeleri tanıtmıştır. Kepler, 1604 yılında yayınlanan, optik ve astronomiyle ilgili *Astronomiae Pars Optica* [Astronominin Optik Kısmı] eserine koniklerle ilgili kısa bir bölüm de eklemiştir. (Ostermann ve Wanner, s. 61; Aslan Seyhan, s. 58)

Koni kesitleri konusu tarih boyunca salt teorik bir konu olarak ele alınmamıştır. Bu konunun başta optik olmak üzere birçok alanda uygulaması vardır. Güneş saatlerinin üzerindeki eğriler hiperbol şeklinde tasarlanır, aynalar konusunda sıklıkla koni kesitleri bilgilerine ihtiyaç duyulur, bir cisim eğik atışla veya mancınıkla fırlatıldığında parabol eğrisi çizmektedir. Yazımızda yeri geldikçe detaylıca değineceğimiz gibi, bu konuyla ilgilenmiş hemen hemen tüm matematikçiler, koni kesitlerini Antik Çağ'ın 3 meşhur problemini çözmek için bir araç olarak kullanmışlardır.

2. Apollonius'tan Önce Koni Kesitleri, Dikey Konjügasyon Teorisi

Literatürde koni kesitleri tarihi, Apollonius öncesi koni kesitleri teorisi (*Dikey Konjügasyon)* ve Apollonius'un koni kesitleri teorisi (*Eğimli Konjügasyon*) olarak ikiye ayırılmaktadır. Çünkü Apollonius'a gelinceye kadar yapılmış çalışmalardaki koni kesitleri hep aynı yöntemle elde edilmiştir (Toomer, 1990, s.xxviii). Apollonious'dan önce eğimli konjügasyon yalnızca parabol için bilinmekteydi (Aslan Seyhan, s. 9). Biz de makalemizde konuyu literatüre uygun olarak bu çizgide incelemeye gayret ettik.

Dikey konjügasyon özetle şunu ifade etmektedir:

Her üç koni kesiti de dairesel bir koninin bir düzlem ile, üreteçlerine dik olacak şekilde kesilmesiyle elde edilir. Daha açıkça söylemek gerekirse koniyi kesen düzlem ile üreteçler arasındaki açı, dik olmalıdır. Bu durumda $\hat{A}$ tepe açısı için (Bknz. Şekil 1, 2 ve 3, (Toomer, 1990, s. 665-666));

i) Eğer $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow$ Parabol (Dik koni kesiti)

ii) Eğer $\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow$ Elips (Dar açılı koni kesiti)

iii) Eğer $\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow$ Hiperbol (Geniş açılı koni kesiti) olur.

Parabol: Eğer ABG dairesel konisi, |AB| üretecine dik olarak kesilirse, K keyfi bir nokta ve |ZF| sabit iken,

$$|KL|^2 = 2.|ZF||ZL|$$

olur. Bu ifade $y^2 = p.x$ kartezyen denklemine eşittir.

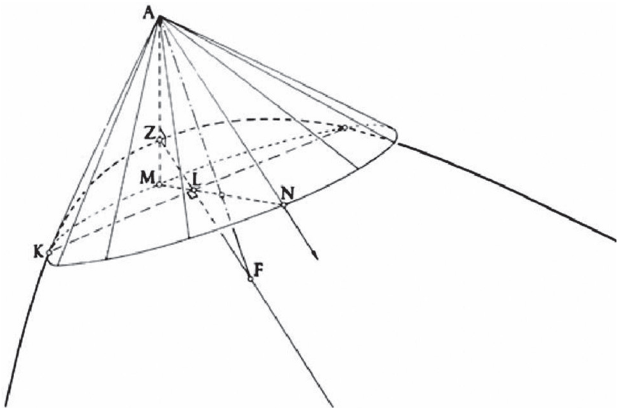
Elips ve Hiperbol için ise 2|ZF| ve |PZ| sabit, |ZL| her zaman kesitin ekseninin üzerinde ve $|KL| \perp |ZL|$ olmak üzere,

$\frac{|KL|^2}{|ZL|\,|PL|} = \frac{2\,.\,|ZF|}{|PZ|}$'dir.

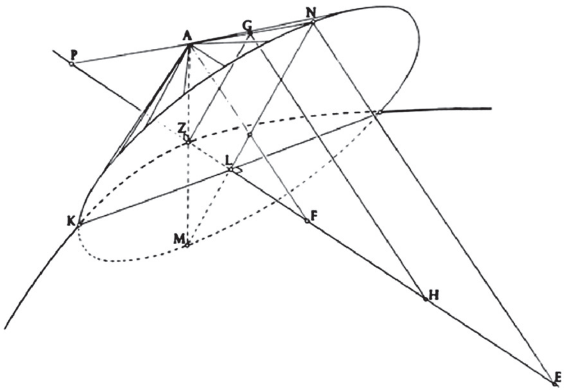
Bu denklemin Kartezyen ifadesi ise

$$\frac{y^2}{x_{1\,.}\,x_2} = \frac{p}{a}$$

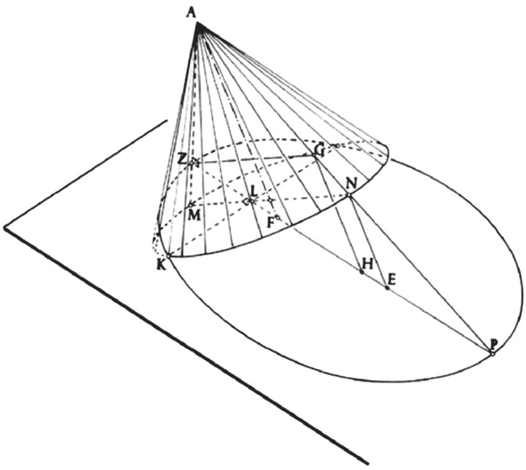
olur (Toomer, 1990, s. xviii; Aslan Seyhan, s. 9-11).



Şekil 1 (Toomer, 1990, s.665)



Şekil 2 (Toomer, 1990, s. 665)



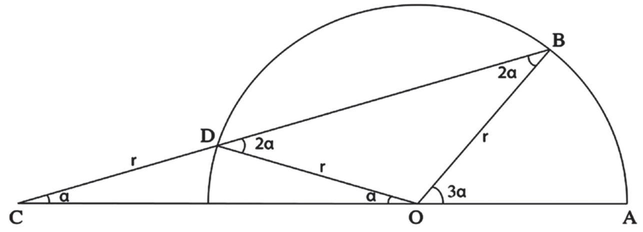
Şekil 3 (Toomer, 1990, s. 666)

Koni kesitlerini ilk çalışan kişi, Platon okulunun bir öğrencisi olan, Menaechmus'dur (MÖ 380-320) (Cajori, 2014, s. 38). Menaechmus bugün Türkiye sınırlarında bulunan Alopeconnesus'da doğmuştur. Eudoxus'un (MÖ 408-355.yy) Cyzicus'daki okulunda ondan sonra öğretmenlik yapmıştır. Burada öğretmenlik yaptığı esnada Aristoteles vasıtasıyla Büyük İskender'le tanıştırılmış ve ona hocalık yapmıştır (Allman, 1889, s.154). Bazı bilim tarihçilerine göre, Büyük İskender'in geometri öğrenmek için kestirme bir yol olup olmadığını sorması üzerine, Eukleides'in geometriye giden bir kral yolu olmadığını söylediği anekdot, aslında Menaechmus ve Büyük İskender arasında geçmiştir (Aslan Seyhan, s. 12). Menaechmus (MÖ 380-320) koni kesitlerini Antik Yunan'ın meşhur problemlerine aradığı çözümler esnasında keşfetmiştir. Aslında onun bu mekanik geometri yorumu Platon'un sert eleştirilerine maruz kalmıştır fakat onun ismini matematik tarihine yazdıran da bu mekanik yorumu olmuştur (Bulmer-Thomas, 1981a, s. 269-276). Koni kesitleri tarihi ile Antik Yunan'ın üç meşhur problemi konusu birçok noktada kesişirler bu sebeple, koni kesitleri tarihi konusunda ilerlemeden önce bu üç meşhur probleme değinmekte yarar vardır. Antik Yunan'ın üç meşhur problemi,

1. Bir açının üç eşit parçaya bölünmesi
2. Bir küpün hacimce iki katına çıkarılması.
3. Verilen bir dairenin alanına denk bir dörtgen bulunmasıdır.

Platon bu problemlerin yalnızca pergel-cetvel yöntemi ile çözülmesi gerektiği konusunda ısrarcıydı. Bu yöntemle yani paslı pergel ve taksimatsız (bölmesiz) cetvel kullanılmadan oluşturulan çözümleri mekanik çözümler oldukları gerekçesiyle reddediyordu (Kökçü, 2019, s. 24). Bu yöntemde temel olan şey sabit bir açı ve uzunluk kullanarak genel çözümün bulunması ilkesiydi. Koni kesitleri veya başka eğriler kullanılarak yapılan mekanik çözümler 'teoria'nın yani ideal olanın bilgisini vermiş sayılmamaktaydı. Dolayısıyla adi çözümler olarak görülüyorlardı. Burada cetvel verilen iki noktadan geçen bir çizgi çizmek, pergel ise belirli bir merkeze ve yarıçapa sahip bir daire çizmek için kullanılabilirdi. Bu iki aletin başka herhangi bir şekilde kullanılması yasaktı. Bu iki aletin mesafeleri aktarmak için kullanılmaması gerekiyordu (Burton, 2011, s. 121).

Bir açının üç eşit parçaya bölünmesi problemi pergel cetvel metoduyla çözülemez. Bu problemin en basit haliyle mekanik çözümünü veren ilk kişi Archimedes'tir. Archimedes'in bu çözümü 'kâğıt şerit yapısı'[1] olarak isimlendirilmektedir (Dörrie, 1965, s. 172). Şekil 4'deki AOB açısı 3'e bölünecek olsun. 'O' noktası dairenin merkezi ve BO=DO= r yarıçapı olmak üzere bir daire çizilsin. 'r' yarıçap uzunluğu bir kâğıt şeride işaretlenir. Bu kâğıt şerit, uzantısı B'den geçecek şekilde D noktasına yerleştirilir ve DC uzantısı çizilir. C noktası ile AC de birleştirilerek bir BOC üçgeni elde edilir. Bu durumda C açısı bulunmak istenen AOB açısının 1/3'ü olacaktır. DCO=DOC= α olduğunda, BDO=DBO=2α ve sonuç olarak AOB = 3α bulunarak bu işlemin sağlaması yapılabilir (Şekil 4).



Şekil 4: Archimedes'in 'kağıt şerit yapısı'

Eski bilginler problemin pergel cetvel metoduyla çözümünün mümkün olmadığını bilmediklerinden, çözüme ulaşabilmek için büyük gayret sarf etmişler fakat bir sonuca varamamışlardır. Bu çabalar sonucunda problemin pergel cetvel yoluyla çözümünün zor olduğunu görerek, dikkatlerini başka yönlere çevirmişler ve daire yerine, pergelle çizilemeyen diğer eğriler ve özellikle koni kesitlerini kullanmaya yönelmişlerdir (Bir ve Kaçar, 2005, s. 50-54). Bir açının 3'e bölünmesi problemi, Pappus'un (290-350) *Matematik Koleksiyonu*'nda hiperbol eğrisinin özel bir kullanımı yardımıyla çözülmüştür. Bu çözümde koninin odak doğrultman özelliği kullanılmıştır (Habegger, 1971, s. 201). Bir başka mekanik çözüm ise Nikomedes

1 Paper strip construction.

(MÖ 3. yy) tarafından *konkoid* eğrisi kullanılarak verilmiştir (Bir ve Kaçar, s. 51; Dörrie, s. 172-173). Elisli Hippias (MÖ 5. yy) ise *kuadratriks* eğrisi vasıtasıyla bir açıyı üçe bölen bir mekanik çözüm geliştirmiştir (Burton, s. 131-134). Yüzyıllar sonra Descartes (1596-1650) de bir parabol ve çember yardımıyla bu problemi çözmeyi başarmıştır (Habegger, s. 201).

Antik Çağ'ın üç meşhur probleminden bir diğeri, küpün hacimce iki katına çıkarılması problemi, yani Delos problemidir[2]. Bu problemin kökeniyle ilgili iki farklı anlatım mevcuttur. Birinci söylence yaygın olarak bilinen anlatımdır: Delos'u kasıp kavuran bir veba salgını esnasında[3], halk salgını durdurmak için ne yapmaları gerektiği ile ilgili Delos adası rahibine danışır. Heyet rahibe Tanrıların hiddetini kaldırmak ve merhametlerini kazanmak için ne yapmaları gerektiğini sorar. Rahip onlara, adada bulunan Apollon Tapınağı'nın küp şeklindeki sunağının iki katı büyüklüğünde bir sunak inşa etmeleri gerektiğini, eğer bunu başarırlarsa salgının duracağını söyler. Heyete mensup kişiler hemen mevcut sunağın her bir ayrıtını iki katına çıkartarak yeni bir sunak inşa ederler. Ancak salgın durmaz. Çünkü problem çözülmemiştir, sunak 2 değil 8 kata çıkartılmıştır. Ayrıt uzunluğu a olan bir küpün hacmi a^3 iken, ayrıt uzunluğu 2a olan küpün hacmi $8a^3$'dür. Elde edilmek istenen iki kat hacim olan $2a^3$'ü elde etmek için küpün bir ayrıtının $a.\sqrt[3]{2}$ bulunması gerekmektedir. O dönemde bu problemin içinden çıkılamamış ve problemin çözümü için Platon'a danışılmıştır. Platon ve öğrencileri bu problemi çözmek için çeşitli yollar aramaya başlamışlardır (Cajori, s. 30). Daha az bilinen bir diğer anlatım Eutocius'a (480-540) aittir. Eutocius'un aktardığına göre, Eratosthenes I. Ptolemy'ye, Minos Kralı ile ilgili bir mektup yazmıştır. Kral oğlu için kübik bir mezar yaptırmıştır. Ancak mezar tamamlandığında boyutundan memnun kalmayarak -her bir ayrıt uzunluğunun iki katına çıkartılması vasıtasıyla- mevcut mezarın iki katı hacminde bir mezar inşa edilmesini talep etmiştir. Eratosthenes, mektubunda bunun bir hata olduğunu, böyle yapılarak mezarın alanca dört, hacimce sekiz kata çıkartılacağını, bu problemin çözümünün geometriciler tarafından çalışıldığını belirtmiştir (Anderson, 1971a, s.197).

Yukarıda da değinmiş olduğumuz gibi Menaechmus da Delos problemini çözme girişimleri esnasında koni kesitlerini keşfetmiştir. Menaechmus'un bu keşfini bize ilk bildiren Proclus'dur (410-485). Bu keşiften bahseden bir diğer kaynak ise Eutocius'un Archimedes'in *Küre ve Silindir Üzerine*'ine eserine yazdığı şerhtir. Eutocius, bu eserinde Chios'lu Hippocrates'in (MÖ 470-410) Delos problemini farklı bir probleme indirgediğinden bahsetmiştir. Buna göre, Hippocrates bu problemin çözümünün, biri diğerinin iki katı olan iki düzgün doğrunun geometrik oranını bulmaya denk olduğunu ileri sürmüştür (Heath, 1921a, s. 266). Hippocrates'in

2 Bazı kaynaklarda 'Delian problemi' olarak da Türkçe'ye çevrilmiştir.

3 Bazı kaynaklar bu veba salgınının Atina'da geçtiğini belirtmektedir (Anderson, 1971a, s.197).

önerdiği fikir dahicedir ve gerçekten de küpün hacimce iki katına çıkarılmasını sağlayacak bir çözümdür. Günümüz ifadeleriyle inceleyecek olursak, uzunlukları a ve 2a olan iki düzgün doğrunun geometrik oranı $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ olsun buradan;

$$x^2 = ay$$

$$y^2 = 2ax$$

$$x^4 = a^2y^2$$

$$x^4 = a^2 2ax$$

$$x^4 = 2a^3x$$

eşitliklerini elde etmek mümkündür. Daha sonra, her iki taraf x ile sadeleştirildiğinde $x^3 = 2a^3$ ve dolayısıyla da $x = a.\sqrt[3]{2}$ olacağı görülecektir. Ancak bugün cebirsel yöntem kullanarak çözdüğümüz bu problemi Hippocrates o dönemde yukarıda bahsettiğimiz pergel ve cetvel metoduyla çözememiştir. Zaten bu problemin paslı pergel ve taksimatsız cetvel yardımıyla çözümü imkânsızdır. Bunun matematiksel ispatı 19. yüzyılda Pierre Wantzel (1814-1848) tarafından yapılmıştır (Aslan Seyhan, s. 12-14).

Eutocius'a göre, Menaechmus bu probleme iki adet çözüm önerisi sunmuştur. İlk öneri $x . y = 2$ ve $y = x^2$ parabolünün ortak çözümüdür. Burada ilk denklemde y'yi yalnız bırakırsak $y = \frac{2}{x}$ olacaktır. Bunu ikinci denklemde yerine yazarsak, $\frac{2}{x} = x^2$ den $x^3 = 2$ ve $x = \sqrt[3]{2}$ elde edilir ki bu istenilen sonuçtur. İkinci öneri ise $x^2 = y$ ve $y^2 = 2x$ parabollerinin kesişimlerini bulmaktır (Coolidge, 1968, s. 1). Burada yine iki eşitlik ortak çözüldüğünde $x^{2^2} = 2x$ yani $x^4 = 2x$ ve bu denklemin reel köklerinden biri, bize ulaşılmak istenen çözüm olan $x = \sqrt[3]{2}$ değerini verecektir (Kramer, 1983, s. 154 – 156). Bizim burada günümüz matematiksel ifadelerini kullanarak verdiğimiz bu öneriler ve çözümleri Eutocius'un Archimedes şerhinde retorik bir anlatım yardımıyla verilmiştir (Bulmer - Thomas, I, 1981b, s. 489-491). Menaechmus işte bu problemleri çözerken, bir koninin bir düzlemle kesilmesi sonucu meydana gelen ve *belli özellikleri olan belli eğrilerin* varlığını ilk defa fark ederek bu eğrileri tanımlamıştır. O bu eğrilerin yani parabol ve hiperbolün bazı problemlerin çözümünde kullanılabileceklerini fark eden ilk kişidir. Bu sebepten bu eğrilerin kâşifi olarak kabul edilmektedir (Aslan Seyhan, s. 14). Delos probleminin çözümü ile uğraşan diğer Antik Yunan bilginler Tarentumlu Arkitas, Nikomedes (*konkoid* eğrisi ile) ve Diokles'dir (MÖ 240-180). Diokles bu işlemi *sisoyid* eğrisi yardımıyla gerçekleştirmiştir (Anderson, 1971a, s. 198).

Üçüncü problem bazı kaynaklarda dairenin dörtgenleştirilmesi bazılarında ise dairenin kareleştirilmesi olarak geçmektedir. Bu problemde verilen bir dairenin alanına denk bir kare alanı bulunması istenmektedir. Problemin de çözümünün diğer problemlerde olduğu gibi pergel cetvel metodu kullanılarak yapılması gerekmektedir. Problem günümüz terimleriyle ifade edilecek olursa, herhangi bir r yarıçaplı bir dairenin alanına eşit bir kare alanı çizilebilmesi için bir kenarı a olan karenin kenar uzunluğu a = $r\sqrt{\pi}$ bulunmalıdır. Dolaysıyla bu problem π'nin değerini bulmak veya ona en yakın değeri saptamak ile doğrudan ilişkili bir problemdir. Bu değer de elbette pergel cetvel yöntemiyle bulunamaz. Bu problemin çözümü için yüksek dereceli cebirsel ve aşkın eğriler kullanılması gerekmektedir (Anderson, 1971b, 201-202). Bu problem tarihin eski problemlerinden biridir. MÖ 1650 yıllarına ait olan Rhind Papirüsünde daire alanı ile kare alanı arasında ilişkiler kuran problemler bulunmaktadır. Papirüsünün 41. probleminde bir dairenin alanı, çemberin çapından 1/9 daha küçük kenarı olan bir karenin alanı olarak ifade edilmiştir. Burada çapı 9 olan bir daire seçilir ki bu dairenin yarıçapı $\frac{9}{2}$ ve alanı $\pi.\frac{81}{4}$ olacaktır. Papirüsteki tarif karenin bir ayrıtının uzunluğunu "9'un $\frac{1}{9}$ unu kendinden çıkar"mak suretiyle hesaplatır ki bu da 8 eder. Bir kenarı 8 olan bir karenin alanı 8.8=64 olur. Bu noktada dairenin ve karenin alanları eşit kabul edildiğinden;

$$64 = \pi.\frac{81}{4}$$

π yaklaşık 3,1605 olarak kabul edilmiştir. Bu değer Antik Mısırlıların yaygın olarak kabul ettikleri p değeridir (Baravalle, 1971, s.149). Bu problemin çözümüyle ciddi bir şekilde uğraşanlar arasında Anaxagoras (MÖ 440 civarı), Antiphon (MÖ 430 civarı), Hippias (MÖ 425 civarı), Archimedes ve Kioslu Hipokrates (MÖ 440 civarı) bulunmaktadır.

Kioslu Hipokrates, bu problemin çözümü konusunda en meşhur isimdir. Onun 'hilaller metodu', daire geometrisine çok önemli katkılar yapmıştır (Cajori, s. 31). Bu çözüm önerisi oldukça yalın ve dâhiyanedir. Bir yarım dairenin içine hipotenüs çap olacak şekilde ikizkenar bir dik üçgen çizilir. Üçgenin ikizkenarlarının her biri çap olmak üzere, her iki tarafa iki yeni yarım daire çizilir. Yeni oluşturulan iki yeni yarım dairenin her birinin alanı büyük yarım dairenin alanının yarısı kadar olacaktır. Yani büyük yarım dairenin alanı, iki küçük yarım dairenin alanları toplamına eşittir. Daha sonra büyük daire çapını ikiye bölecek şekilde dik üçgenden hipotenüse bir dik indirilir. Böylece büyük dairenin çeyreğinin alanı, küçük yarım daire alanına eşit olacaktır. Eşitlerden eşitler çıkınca sonuç da eşit olacağından; bu iki oluşumun kesişimindeki dilim çıkartıldığında geriye kalan, daire dışındaki hilalin alanı, çeyrek daire dahilindeki dik üçgenin alanına eşit olacaktır. Hipokrates'in bu çözümü dairenin kareleştirilmesi anlamında bir çözüm olmamışsa da bir hilalin alanını bir üçgenin alanına eşitlediğinden dairesel alanların dörtgenleştirilebileceği fikrini pekiştirmiştir.

Koni kesitleri tarihi konusuna dönecek olursak, bu konuda çalışan bir başka geometrici Aristaeus'dur (MÖ 370-300). Aristaeus'un hayatına dair elimizde pek fazla bilgi bulunmamaktadır. Ancak Pappus vasıtasıyla öğrendiğimiz kadarıyla Aristaeus, *Solid Loci* (koni kesitleri) ile ilgili beş kitabın yazarıdır. Bu eser Platon okulunda koni kesitleri ile ilgili yapılan çalışmaların bir özeti mahiyetindedir, çok kapsamlı ve orijinal bir çalışmadır (Heath, 1921b, s. 118). Bu kitaplar günümüzde mevcut değildir. Pappus, Eukleides'in *Konikler* eserinin konuyu yüzeysel olarak incelediğini ancak Aristaeus'un *Solid Loci*'sinin çok daha derin ve kapsamlı incelemelere yer verdiğini vurgulamıştır. *Solid Loci* o dönemde koni kesitlerini tarif etmek için kullanılmış olan Yunanca bir terimdir (στερεοι τοποι). Muhtemelen katı cismin (solid; koni veya silindir) bir düzlemle kesilmesiyle oluşan şekiller kastedilmek üzere kurgulanmış bir kelimedir. Sonraki dönemlerdeki yazarlar Aristaeus'un eserinden *Konikler ile ilgili Beş Kitap* olarak bahsetmiştir. Bu eserler günümüze intikal etmediği için zaman içerisinde bu eserlerin birbirinden farklı eserler oldukları yanılgısı doğmuştur. Gerçekte *Solid Loci* ve *Konikler ile ilgili Beş Kitap* aslında aynı eserdir (Aslan Seyhan, s. 15).

Geometrik yer anlamında kullanılan *Loci (τοποι προς)* teriminin yerine, belli 'bir' noktadan bahsedilirken *locus (τοπος)* terimi kullanılır. Bu terimler bir ve aynı özellikte olan doğru veya yüzeylerin pozisyonunu belirtir. Bu terimler günümüzde aynı anlamda kullanılmaktadır. Aynı denklemi sağlayan ve/veya aynı şeklin üzerinde bulunan noktalar (*locus*un çoğulu olan) *loci* ile ifade edilir. Bu tanım Proclus ve Eutocius'da da karşımıza çıkmaktadır (Heath, 1896, s. xxxi). Buna göre *loci, doğru loci*[4] *(τοποι προς γραμμαις)* ve *düzlem loci*[5] *(τοποι προς επιφανειαις)* olmak üzere iki gruba ayırılmıştır. *Doğru loci* ile düz çizgiler, çemberler ve koni kesitleri kastedilir. Apollonius da dahil olmak üzere, antik dönem bilginleri elipsin özel bir hali olan çemberi bir koni kesiti olarak değerlendirmemişlerdir. *Doğru loci, düzlem (τοποι επιπεδοι) ve cisim loci*[6] *(τοποι στερεοι)* olmak üzere ikiye ayrılmıştır. *Düzlem loci* çemberler ve doğru parçalarını, *cisim loci* ise koni kesitleri ve silindirik sarmalı ifade etmek için kullanılmıştır (Aslan Seyhan, s. 16).

Pappus ise bir ayrıma daha giderek *doğru loci*ye üçüncü bir kategori olarak *doğrusal loci*[7] kavramını eklemiştir (Heath, 1896, s. xxxii-xxxiii). Bu kategoride düz doğrular, çemberler ve koni kesitleri dışındaki yüksek dereceli eğriler incelenmektedir (Heath, 1921b, s. 117). Aristaeus'un kitabına seçmiş olduğu isminden onun koni kesitlerini, *uzayda geometrik yer* olarak tanımladığı sonucu çıkarılabilir (Terzioğlu ve İlker, 1960, s. 167). *Solid Loci*'de üç veya dört çizgiye göre geometrik yer

4 Line Loci.
5 Surface Loci.
6 Solid Loci.
7 Linear Loci.

problemi de tartışılmıştır. Pappus dolayısıyla haberdar olduğumuz bu geometrik yer problemi şöyledir:

(1) a, b, c düzlemde bulunan ve belirli bir pozisyona sahip üç düzgün doğru olsun.

(2) Bir P noktasından bu doğrulara olan eğik uzaklıklar ölçülsün ve doğrularla belirli açılarda kesişecek başka doğrular çizilsin. Örneğin P den a ile α açısı yapan bir doğru parçası çizilip bunun uzunluğu x alınsın. Aynı şekilde sırasıyla b ve c ile β ve γ açısı yapan y ve z uzunluklu doğru parçaları çizildiği varsayılsın.

(Bunun en kolay hali $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ halidir. Bu durumda P'nin a, b, c doğrularına uzaklıkları alınmış olur.)

(3) λ bir sabit olmak üzere $y \,.\, z = \lambda \,.\, x^2$ denklemini sağlayan P noktaları bir koni kesiti teşkil edecektir.

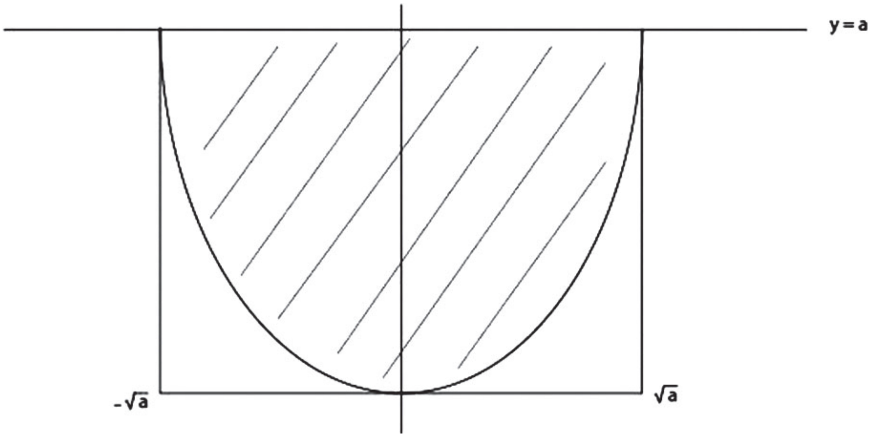
(4) x, y, z'nin sıralaması duruma bağlı olarak değiştirilebilir. Bu durumda, μ ve η sabit olmak üzere, $z \,.\, x = \mu \,.\, y^2$ ve $x \,.\, y = \eta \,.\, z^2$ denklemlerini sağlayan P noktaları koni kesiti üzerinde kalacaktır (Heath, 1921b, s. 118).

Bu tartışma Antik Yunan medeniyetinin neredeyse analitik geometriyi bulduklarını göstermektedir. Aynı problem daha sonraki yüzyıllarda Fermat (1601-1665) ve Descartes tarafından yeniden ele alınmış, bu yüzden de adı geçen bilginler analitik geometrinin kurucuları olarak kabul edilmişlerdir (Aslan Seyhan, s. 16-17).

Matematik tarihinin bir başka ana kahramanı olan Eukleides (MÖ 4. yy) de koni kesitleri ile ilgilenmiş olan isimlerdendir. Eukleides'in *Konika* isimli, Apollonius'a kaynak teşkil ettiği düşünülen fakat günümüze ulaşmamış olan bir eseri bulunmaktadır. Bu eser 4 ciltten oluşmuştur ve kaynağı Theaetetus ve Eudoxus'tur (Coolidge, s. 6-8). Bazı kaynakların bildirdiğine göre Eukleides *Konika*'sında bir koniyi veya silindiri tabana paralel olmayan bir düzlemle kestiğimiz takdirde elips (θνρЄος) elde edileceğini belirtmiştir (Heath, 1956, s. 110). Bunun dışında Eukleides, *Elementler*'lerin 12. kitabında konileri incelemiştir (Heath, 1956, s. 400 – 423; Aslan Seyhan, s. 17-18).

Archimedes'in (287-212) de koni kesitleriyle ilgili kayda değer çalışmaları bulunmaktadır. Archimedes *Küre ve Silindir Üzerine* adlı eserinde ister istemez koni kesitlerinden bahsetmek durumunda kalmış, bir düzlemin, koninin veya silindirin tüm yüzeyine değecek şekilde kesişmesiyle daire veya elips elde edileceğini belirtmiş, konileri, verilen elipslere yerleştirme problemini incelemiştir (Coolidge, s. 7). Ayrıca koni kesitleriyle ilgili bir kitap yazdığı düşünülmektedir (Heath, 1896, s. xli). *Kanoidler ve Küreler* adlı eserinde *kanoid* kelimesini konik manasında kullanmış, ancak burada bu kelimeyle bir parabolün veya hiperbolün kendi ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cisimleri kastetmiştir. Archimedes'in koni kesitleriyle ilgilendiği bir diğer bir eseri *Parabolün Kareleştirilmesi*'dir (Heath, 1897). Archimedes'in MÖ 3. yy. civarında kaleme aldığı bu eser onun en büyük başarılarından biridir. Bu eserde bir eğrinin alanını hesaplamanın, bu alanı oluşturan sonsuz sayıdaki dikdörtgenin alanlarını toplamakla mümkün olabileceğini belirtmiş ve böylece integral hesabın temeli sayılan yöntemi geliştirmiştir. Bunun için "Archimedes üçgenleri"nden faydalanmıştır. Bu üçgenler, alanı hesaplanmak istenen parabolün her iki kenarına teğet olan doğrularla, uçlarını birleştiren doğrular tarafından oluşturulan üçgenlerdir (Dörrie, s. 239). Bu yolla Archimedes'in ulaştığı bir diğer sonuç da parabolün alanının içine çizilen üçgenin alanının 4/3'üne eşit olduğudur (Ostermann ve Wanner, s. 72). Yani parabolün alanı P ve içine çizilen üçgenin alanı Ü olduğunda $P = \frac{4}{3}$ Ü olacaktır. Bir başka değişle alanı 4A olan parabolün içine alanı 3A olan bir üçgen çizilebilir. Archimedes bir başka teoreminde ise parabolün alanının etrafına çizilen dörtgen alanın, parabolün alanının $\frac{2}{3}$'üne eşit olduğunu söylemiştir. Yani dörtgenin alanı D ve parabolün alanı P iken $P = \frac{2}{3}D$ olacaktır. Bir başka değişle alanı 2A olan parabolün dışına alanı 3A olan üçgen çizilebilir. Bu teorem Archimedes'in *Parabolün Kareleştirilmesi* eserinde mevcuttur (Heath, 1897, s. 233 – 252; Aslan Seyhan, s. 18-20).

Bu teoremi kalkülüs yardımıyla kolayca doğrulayabiliriz. y = a, x = $\sqrt{a}$ ve x = -$\sqrt{a}$ doğrularıyla sınırlanmış olsun (Şekil 5), parabolün dışında kalan dörtgenin alanı $2\sqrt{a} . a = 2. a^{\frac{3}{2}}$ olur. Parabolün altında kalan alan $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} x^2 . dx = \frac{2}{3}. a^{\frac{3}{2}}$ olduğundan içinde kalan alan da bu ikisinin farkından $2. a^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}. a^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}. a^{\frac{3}{2}}$ oluşacaktır. Gerçekten de $\frac{4}{3}. a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} . \{2. a^{\frac{3}{2}}\}$ olur (Aslan Seyhan, 20).



Şekil 5:

Archimedes *Küre ve Silindir Üzerine* eserinde verilen bir koni veya silindirin hacmine denk hacme sahip bir küre bulmanın formülünü de vermiştir (Bulmer - Thomas, 1981b, s. 489). Archimedes'in bu konuda esas ilgilendiği şey parabolün dörtgenleştirilmesi olmuştur. Archimedes tüketme metoduyla ayrı ayrı parabolün ve elipsin alanlarına eşit olan dörtgen alanları bulmaya çalışmıştır. Bu da yine yukarıda bahsetmiş olduğumuz dairenin kareleştirilmesi ile bağlantılı bir çalışmadır. Amaç bu meşhur problemini çözmek olduğu için Archimedes'in hiperbolle fazla uğraşmaması şaşırtıcı değildir (Heath, 1956, s. 366; Aslan Seyhan, s. 21).

İskenderiyeli Pappus'un (290-350) *Matematik Koleksiyonu (Συναγωγή)*, Pappus'un zamanına kadar yazılmış önemli eserleri tanıtan çok önemli bir ansiklopedik çalışmadır. MS 340 yılında kaleme alınan ve sekiz ciltten oluşan bu eser sayesinde aslı kaybolmuş birçok eser hakkında bilgi sahibi olabilmekteyiz. Ünlü matematik tarihçisi Sir Thomas Little Heath'e göre, bu yalnız bir ansiklopedik çalışma değil aynı zamanda fihrist niteliğinde bir çalışmadır. Bu eserde aritmetiğin ve geometrinin birçok konusu işlenmiştir. Geometri, alanında ele alınan konular arasında çok yüzlüler, poligonlar, koni kesitleri ve Delos problemi mevcuttur (Bulmer - Thomas, 1981c, s. 293-304). Bu *Koleksiyonu*'nun VII. cildi olan *Analizin Hazinesi* koni kesitlerine adanmıştır (Jones, 1986, s. 82 - 120). Pappus'a göre *Analizin Hazinesi* Eukleides, Apollonius ve Aristaeus tarafından oluşturulmuştur. Bu hazine dahilinde sıralamış olduğu eserler arasında Aristaeus'un *Solid Loci*'si, Eukleides'in *Data, Doğal Sonuçlar* ve *Yüzey Loci*'si, Apollonius'un *Konika*, *Bir Oranın Kesilmesi*, *Bir Alanın Kesilmesi*, *Belirki Kesitler*, *Teğetlikler* ve *Düzlem Loci*'si, son olarak da Erastosthenes'in *Oranlar Üstüne* eserleri bulunmaktadır (Coolidge, s. 8-9; Aslan Seyhan s. 22-23). Pappus geometri alanında çalışmak isteyen herkesin bu eserlere mutlaka hâkim olması gerektiği vurgulamıştır.

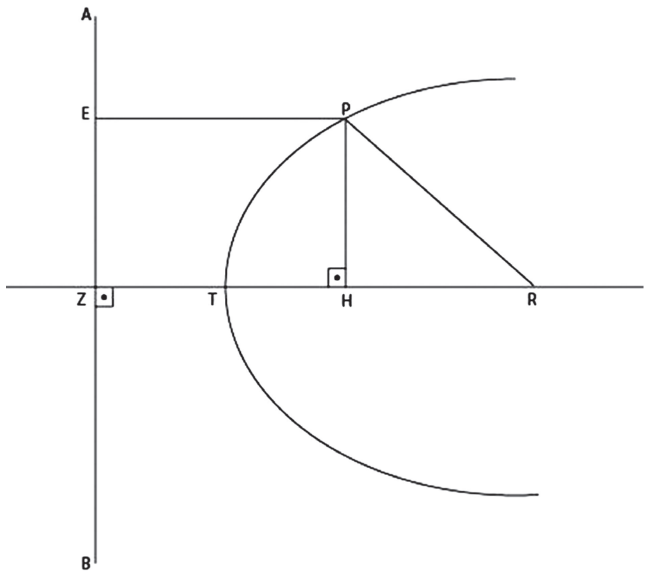
Pappus, *Analizin Hazinesi*'nin yazarları hakkında kişisel bazı bilgiler de aktarmaktadır. Ona göre Eukleides'in çok iyi bir ansiklopedistdir, ancak Aristaeus konuya orijinal katkılar yapmıştır. Pappus en çok Aristaeus'u beğenir ve onun kişiliğine, hayrandır. Ona göre, Aristaeus son derece mütevazidir ve herhangi bir yerden en ufak bir alıntı yapmış olsa dahi bunu hemen belirtmektedir. Buna karşılık Apollonius'u çok kibirli ve kendini beğenmiş biri olarak tarif etmiştir. Ayrıca Apollonius'u mesleki etikten yoksun olmakla suçlamıştır. Aktardığı bir hikâyeye göre Apollonius, Aristaeus'un *locus*unu, koni kesitleri kapsamında ispatlamanın mümkün olduğunu bildirmiş ancak bunu söylerken Aristaeus'dan hiç bahsetmemiştir. Pappus, Apollonius'un bunu kasten yaptığını düşünmekte ve açıkça bu durumu kınamaktadır (Jones, s. 118-120; Aslan Seyhan, s. 24).

Pappus da Aristaeus gibi koni kesitlerini geometrik yer olarak ele almıştır. Eserinin bu alana en önemli katkısı *odak – doğrultman – dış merkezlilik* teoremidir

(Coolidge, s. 8-12). Modern haliyle Pappus'un *odak – doğrultman – dış merkezlilik* teoremi şöyledir:

Teorem: Eğer bir eğri $x^2 = r^2.[y^2 + (a - x)^2]$ formunda bir Kartezyen denklemi ile ifade edilebiliyorsa, o bir koniktir.

İspat: Şekildeki gibi RZ dikini ve AB // PH'yi çizelim $PE^2 = PR^2$ olduğundan $PE^2 = PH^2 + HR^2$ olur. RZ belli (şekildeki gibi) bir pozisyonda ve R, Z noktaları da verilmiş olsun. Sonuç olarak P parabolün üstünde olur.



Şekil 6

Buna göre;

$(ZT + TH)^2 = PH^2 + (TR - TH)^2$

$PH^2 = TH.(2.TR)$ olur ki bu parabolün formülüdür. Pappus bunun tersini de ispat etmiştir ve konuyu orada kapatmıştır (Coolidge, s. 9; Aslan Seyhan, s. 25).

Bu formül bizi parabolün geometrik - odak, doğrultman - tanımına götürür:

P herhangi bir nokta, F odak, d doğrultman iken Parabol $= \{P: |PF| = |Pd|\}$ olan doğruların kümesidir. Bu uzaklıkların birbirine oranı $e = \frac{|PF|}{|Pd|}$ dış merkezliliktir. Parabol durumunda e = 1 olur. e < 1 durumunda elips ve e > 1 olduğu durumda hiperbol olur (Aslan Seyhan, s. 25).

Son olarak Ascalon'lu Eutocius (MS 480) *Konika*'nın ilk dört cildine şerhler yazmıştır (Bulmer - Thomas, 1981b, s. 491). Eutocius'un koni kesitlerine herhangi bir orijinal katkısı yoktur ancak yine de bu yazdığı şerhler matematik tarihin açısından çok önemlidir. Hilâl ibn Abî Hilâl el- Himsî (11.yy) *Konika*'nın ilk dört kitabını Yunanca'dan Arapça'ya çevirirken, Eutocius'un şerhlerinden faydalanmıştır. Eutocius bu şerhleri Tralles'li Anthemius'a (MS 6. yy.) ithaf etmiştir (Heath, 1896, s. lxix). Anthemius Ayasofya'nın mimarlarından biridir ve onun da koni kesitleri ile ilgili çalışmaları vardır. Onun çalışmaları daha çok optik temelli, uygulamalı çalışmalardır (Huxley, 1981, s. 169 -170; Aslan Seyhan, s. 26-27).

3. Apollonius ve Eğimli Konjügasyon Teorisi

Büyük Geometrici Pergeli Apollonius'un hayatı hakkında pek fazla bilgi bulunmamaktadır. Farklı kaynaklardan öğrendiğimiz kadarıyla çok uzun bir süre İskenderiye'de Eukleides'in öğrencileriyle birlikte çalışmıştır. Apollonius *Konika*'nın önsözünde gerçekten de bir dönem İskenderiye'de yaşadığını teyit etmektedir. Yine aynı önsözünde Bergama ve Efes'e ziyaretlerde bulunduğunu, Bergama'da bulunduğu sırada ise Bergama'lı Eudemus'la tanıştığını belirtmektedir. Apollonius eserini tamamladıktan sonra ilk üç cildini Eudemus'a göndermiş ve bu ciltlerin başında Eudemus'a notlar yazmıştır (Heath, 1896, s. lxix). Böylece kitaplarını ikinci bir gözün kontrolünden geçirmiştir. Bu durum Pappus'un yukarıda bahsettiğimiz tüm olumsuz yorumların aksine, Apollonius'un eserini yazarken, son derece titiz ve profesyonel davrandığının bir göstergesi olarak düşünülebilir. Apollonius *Konika*'nın her bir cildinin başına kitapların içerikleriyle ilgili detaylı bilgiler veren önsözler yazmıştır. Eserinin ilk üç cildini Eudemus'a itaf etmiştir. 4. Kitaptan itibaren yani Eudemus hayatını kaybettikten sonra kaleme aldığı ciltleri Attalus isimli birine göndermiş ve ona ithaf etmiştir. Attalus'un kim olduğu net olarak bilinmemektedir. Ancak bilim tarihçilerinin bu konuda bazı görüşler bulunmaktadır. Öncelikle bahsi geçen kişinin Bergama Kralı I. Attalus olduğu öne sürülmüştür. Ancak Apollonius'un gayrı resmi hitap şekli bu iddiayı çürütmüştür. Attalus o dönemde Makedon soyundan gelenler arasında yaygın bir isimdir ki bu da bu kişinin kimliğini tam olarak belirlemeyi zorlaştırmaktadır (Toomer, 1981a, s. 179; Aslan Seyhan, s. 28).

Pappus koleksiyonunun VII. kitabında Apollonius'a *Konika* dışında altı adet daha kitap atfetmiştir ve bu eserlerin içerikleri ile ilgili bilgiler vermiştir. Bu kitaplar *Bir Oranın Kesilmesi*[8], *Bir Alanın Kesilmesi*[9], *Belirli Kesitler*[10], *Teğetler*[11],

8 *The Cutting of a Ratio*

9 *The Cutting of an Area*

10 *The Determinate Section,*

11 *The Tangencies*

Eğilimler[12] ve *Düzlem Loci*'dir[13]. Bunlardan yalnızca *Bir Oranın Kesilmesi* Arapça tercümesi vasıtasıyla günümüze ulaşmıştır (Toomer, 1990, s. xii). Bu Arapça tercüme 9 - 10. yy.'a ait olup isimsiz bir yazarın eseridir[14]. Oxford'lu Edmund Halley (1656-1724), 1706 yılında bu metnin Latince tercümesini yayınlamıştır[15] (Jones, s. 510- 511). Apollonius'un diğer kayıp eserleri ile ilgili bilgilerimiz antik yazarların bize aktardıkları kadarıyla sınırlıdır.

8 ciltten oluşan *Konika*'nın ilk 4 cildinin Yunanca aslı mevcuttur. Bu kitaplar temel geometri bilgileri içerdiğinden uzun yıllar ders kitabı olarak kullanılmış ve sıklıkla kopyalanmışlardır. 5, 6 ve 7. ciltler, 17. yy. ortalarına kadar kayıp eserler olarak kalmıştır.17. yy'da Arapça tercümeleri ortaya çıkmış ve bu sayede bu eserin büyük bir kısmı matematik tarihine kazandırılmıştır. Latince tercümeleri Halley tarafından 1710 yılında yayınlanmıştır (Hogendijk, 1985, s. 30). *Konika*'nın 8. cilt ise halen kayıptır. Ancak Halley diğer ciltleri yayınladıktan sonra 1710 yılında Pappus'un teoremlerinden faydalanarak *Apollonii Pergaei Conicorum Libri Octo (Pergeli Apollonius'un Koniklerinin Sekizinci Kitabı)* (Oxford, 1710) isimli bir rekonstrüksiyon metnini yayınlamıştır. Aslında bu 8. Cilt için yapılmış ilk rekonstrüksiyon denemesi değildir. İbn Heysem (965 - 1040), *Koni Kesitlerinin Tamamlanması* adlı çalışmasını bu konuya tahsis etmiştir. Ayrıca ibn Heysem, Kahire'de kaldığı yıllarda Apollonius'un *Konika*'sını, *Kitâb el-Mahrûtât* ismiyle istinsah etmiştir. Bu elyazması bugün Süleymaniye'de bulunmaktadır (Aslan Seyhan, s. 39-40).

Tıpkı Eukleides'in *Elementler*'de yaptığı gibi Apollionus da eserinde, kendi dönemine kadar işlenmiş konuları, gelişi güzel anlatılmış, birbiriyle bağımsız teoremleri bir düzen dahilinde detaylı olarak işlemiştir. Apollionus bu düzenlemeyi yaparken kendi metodunu yani eğimli konjugasyon teorisini kullandığını belirtmiştir. Eserinin ilk 4 cildinde birkaç nokta dışında orijinallik iddiasında bulunmamaktadır. Pappus'a göre de ilk dört kitap Eukleides'in *Konika*'sıyla aşağı yukarı aynı içeriğe sahiptir. Onun eserinin dehası ve orijinalliği V. ciltten itibaren ortaya çıkmaktadır (Heath, 1896, s. xxxi, 1xxi-lxxvii). Apollionus'un *Konika'sı* geometriyi o dönemde gelinebilecek en üst seviyeye yükseltmiştir. Matematik tarihinde bu eserin içeriğini aşacak olan eserlerin kaleme alınması için simgesellik, Kartezyen geometri ve sonsuz küçükler hesabının tarih sahnesine girmesi gerekecektir (Aslan Seyhan, s. 40).

Yukarıda da bahsetmiş olduğumuz gibi Apollonious *Konika*'ya yazdığı önsözlerinde eserinin içeriği hakkında detaylı bilgiler vermiştir. İlk cildin girişinde,

---

12 *Inclinations* veya *Neuses* (νευσεις νευσεις)

13 Plane Loci

14 Bu çeviri 13. yy.'a ait iki farklı nüshada mevcuttur. Bunlardan biri Oxford Bodleian Seld. 3140, 7/1 ve diğeri İstanbul Ayasofya 4830 ff. 2a - 52b'dedir.

15 Tercümesi Oxford'daki nüshaya dayanmaktadır.

öncelikle Eudemus'un halini hatırını sormuş ve kendisinin de iyi olduğunu bildirmiştir. Metnin devamında *Konika*'nın genel içeriğini şu kelimelerle aktarmıştır:

> "… Sekiz kitabın, ilk dördü yeni başlayanlar için temel bir giriş mahiyetindedir. Birinci kitap, üç temel koni kesitinin oluşturulması ve karşılıklı hiperbolün kolları ve bunların temel özellikleri hakkındadır, bu konular önceki yazarlardan daha kapsamlı ve genel olarak incelenmiştir. İkinci kitap, kesitlerin çaplarının ve eksenlerinin özelliklerinin yanı sıra asimptotları ve genel öneme sahip bazı başka şeyleri ele alır. Çaplardan ve eksenlerden ne kastettiğimi bu kitaptan öğreneceksin. Üçüncü kitap, cisim locinin sentezi ve sınırlarının belirlenmesine yarayan birçok takdire şayan teorem içerir. Bu teoremlerin birçoğu ve en güzelleri yenidir, bunları ben buldum. [Bu konuyu incelerken] gözlemledim ki Eukleides üç ve dört çizgiye göre geometrik yerin (locus) sentezlenmesi konusunun tamamını çalışmamış, fakat konuya tamamen şans eseri rastlantısal olarak değinmiş, bu da başarılı olamamıştır. Çünkü bu konunun sentezi benim ilave keşiflerim olmadan tamamlanamazdı. Dördüncü kitap, koni kesitlerinin birbirleriyle ve bir dairenin çevresiyle kaç farklı şekilde kesişebileceğini gösterir[16] ve buna ek olarak başka meseleleri de içerir ki bunlar daha önceki hiçbir yazar tarafından tartışılmamış meselelerdir. Bu meseleler bir koni kesitinin veya daire çevresinin kesiştiği noktaların sayısı ile ilgilidir.[17] Diğer kitaplar daha ileri seviyededirler (περιουσιαστικωτερα). Bunlardan biri [Beşinci Kitap] maksimum minimum problemlerini detaylı bir şekilde ele almıştır[18]. Bir başkası [Altıncı Kitap] konilerin eşit ve benzer kesitleri ile ilgilidir. Diğeri [Yedinci Kitap][19] sınırların belirlenmesi ile ilgilidir. Sonuncusu [Sekizinci Kitap] koni kesitleri problemleri ile ilgilidir." (Heath, 1896, s. lxix-lxxi; Aslan Seyhan, s. 28).

Konika'nın ikinci cildinin önsözünde yine Eudemus'a hitaben bir yazı yazmış, Eudemus'dan eğer mümkünse, Efes'de onu tanıştırmış olduğu geometrici Philonides'e kitabını göstermesini rica etmiştir (Heath, 1896, s. lxxii). Üçüncü kitabın başında bir önsöz bulunmamaktadır (Heath, 1896, s. lxxii; Heiberg, 1891, s. 319). Dördüncü kitabın önsözü Atallus'a yazılmıştır. Burada Apollonius daha önceki kitapları Eudemus'a gönderdiğinden fakat onun vefat ettiğinden bahsetmiş ve Atallus'un onun kitaplarına olan ilgisinden dolayı sekiz kitabın kalanını kendisine göndereceğini bildirmiştir. Sözlerinin devamında kitabın içeriği ve bu içeriğin tarihi hakkında [Samoslu] Conon ((MÖ 280-220), Thrasydaeus, ve Ki-

16 IV. kitap, doğru parçalarının harmonik oranla bölümünden (bir doğru parçasını aynı anda hem içten hem dıştan bölme) ve konilerden oluşan sistemlerden bahsetmiş, iki koni kesitinin en fazla dört noktada kesişebileceğini göstermiştir.

17 Sir Thomas Heath adı geçen eserinde bu cümleyi hiperbolün karşılıklı kolları olarak açıklamıştır.

18 Apollonius'un dehasının en belirgin örneği olan bu kitapta, önceki kitaplarda temeli atılmış maksimum ve minimum problemleri ele alınmıştır. Belirli bir noktadan koniye çizilebilecek en uzun ve en kısa doğrular ele alınmış, evolütler ve eğrilik merkezleri konularının temelleri atılmıştır.

19 Bu kitap eşlenik çaplar üzerinedir.

reneli Nicoteles'den (MÖ 3. yy.) bahsederek çeşitli detaylara yer vermiştir. Burada Nicoteles'in hiperbolün '*karşılıklı kesmeler*'ini birlikte incelediğinden söz etmesi ilgi çekicidir. Geri kalan önsözlerde yani 5, 6. kitaplarda yalnız kitapların içeriklerinden söz etmiş, 7. Kitapta içerikten söz ettikten sonra 8. kitapta konu ile ilgili çeşitli problemleri çözeceğini belirtmiştir (Heath, 1896, s. lxxii- lxxv).

Konika'nın sekizinci cildi Halley'in tahminine göre eşlenik çaplar konusu ile devam etmektedir. Apollonius'un amacı, sistematik bir kitap yazarak bu konuda kendi geliştirdiği teorisini tanıtmaktır. Bunun için koni kesitleriyle ilgili bazı konuları ihmal etmekten çekinmemiştir. Örneğin, parabolün odak noktası ve koni doğrultmanı kavramlarına hiç değinmemiştir. Buradan odak doğrultman özelliklerine aşina olmadığı sonucunu çıkarabiliriz (Toomer, 1981a, s. 187). Ancak öte yandan elips ve hiperbolün odak noktalarına III. [44] - [52][20] de değinmiştir (Aslan Seyhan, s. 29-30).

Apollonius'u kendinden önce koni kesitleri çalışanlardan farklı kılan ve öne geçiren, onun tarihte ilk defa koni kesitlerini bir ve aynı koniden elde etmesidir. Bunu eğimli dairesel bir çift koniyi bir düzlem tarafından keserek başarmıştır (Şekil 8). O *Konika*'nın tamamını *Eğimli Konjügasyon* teorisine uygun olarak yazmıştır. Bu sebeple bu metodun bir diğer ismi *Apollonius Teorisi* olarak bilinir (Şekil 7, 8, 9, 10, 11, 12 (Toomer, 1990, s. xxix, 666 - 669)).

"Buna göre, var sayalım ki, ZDE düzlemi bir koniyi kessin. Şimdi koniyi, eksensel üçgen olan ΔABG'yi de kapsayan ve aynı zamanda ZDE'ye dik olan bir başka düzlemle keselim. Bu düzlem koninin tabanında BG çapı ile kesişecektir (BG ⊥ DE). Bu durumda

i) ZH ∩ ΔABG yalnız bir tarafta $\begin{cases} AG, \text{öyle ki } ZH \,//\, AB \\ AB, \text{öyle ki } ZH // AG \end{cases}$

ii) ZH, ΔABG üçgeninin bir tarafını A tepe noktasının altında, diğer tarafını A tepe noktasının üstünde keser.

iii) ZH ∩ AH & ZH ∩ AG, A'nın altında ise,

Tüm durumlarda herhangi bir K noktası için

$$|KL|^2 = |ML||LN| \qquad (1)$$

olur ve ΔMLZ ~ ΔBGA'den dolayı (i). durum için:

$$\frac{|ML|}{|LZ|} = \frac{|BG|}{|AG|} \quad \& \quad \frac{|LN|}{|BG|} = \frac{|AZ|}{|AB|} \qquad (2)$$

olur.

20 Bu numaralandırma Heath'in çevirisine aittir.

Şimdi varsayalım ki Θ bir doğru olsun. Öyle ki,

$$\frac{\Theta}{|AZ|} = \frac{|BG|^2}{|AB|.|AG|}$$

Θ sabit ve (1) & (2)'den:

$$|KL|^2 = \frac{|BG||LZ|}{|AG|} . \frac{|AZ||BG|}{|AB|}$$

$$|KL|^2 = \frac{\Theta|LZ||AZ|}{|AZ|}$$

$$|KL|^2 = \Theta.|LZ|$$

olur.

Parabol için bu denkleme denk gelen Kartezyen denklem:

$y^2 = px$'dir.

(ii) ve (iii). durumları için ΔMLZ ~ Δ*BSA* ve ΔLNT~Δ*SGA* benzerliklerinden,

$$\frac{|ML|}{|LZ|} = \frac{|BS|}{|AS|} \quad \& \quad \frac{|LN|}{|LT|} = \frac{|SG|}{|AS|} \tag{3}$$

elde edilir.

Şimdi varsayalım ki φ bir doğru olsun. Öyle ki,

$$\frac{\varphi}{|ZT|} = \frac{|BS||SG|}{|AS|^2}$$

olsun. φ sabit ve (1) ile (3). eşitliklerden;

$$|KL|^2 = \frac{|BS||LZ|}{|AS|} . \frac{|LT||SG|}{|AS|}$$

$$= \frac{|BS||LZ||LT||SG|}{|AS|^2}$$

$$= \frac{\varphi|LZ||LT|}{|ZT|}$$

olur.

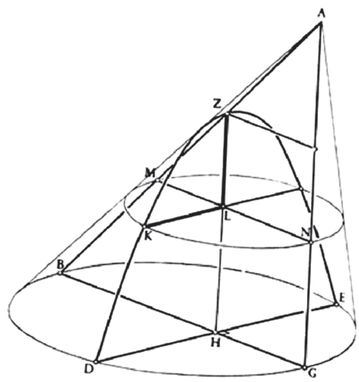
Durum (ii) de $|KL|^2 = \frac{\varphi|LZ||LZ+ZT|}{|ZT|}$ ve buna denk gelen Kartezyen denklem:

$y^2 = x\{p + (p/a).x\}$

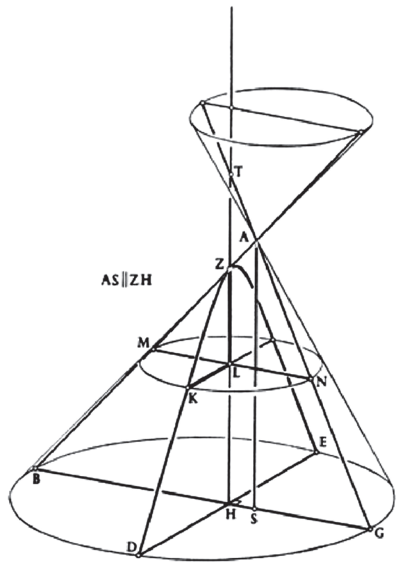
olur.

Durum (iii) de ise $|KL|^2 = \frac{\varphi|LZ||LZ-ZT|}{|ZT|}$ ve buna denk gelen Kartezyen denklem:

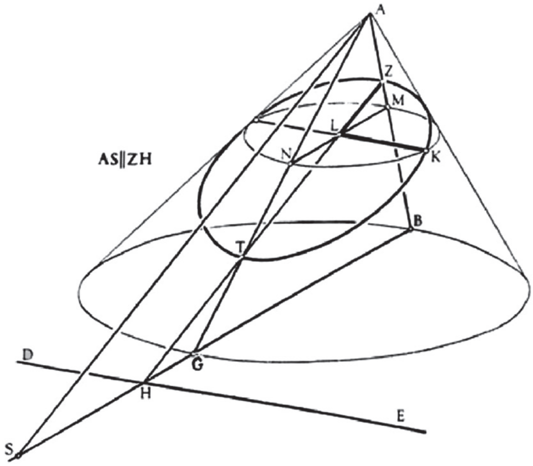
$y^2 = x.\{p - (p/a).x\}$ olur" (Toomer, 1990, s. xxix – xxx; Aslan Seyhan, 2017, s. 30-33).



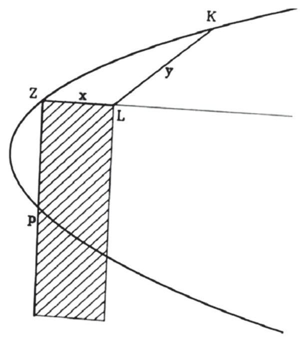
Şekil 7: (Toomer, 1990, s. 666)



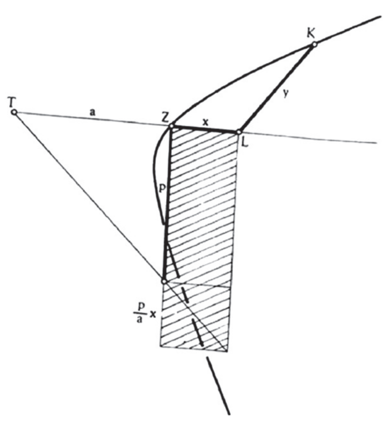
Şekil 8 (Toomer, 1990, s. 667)



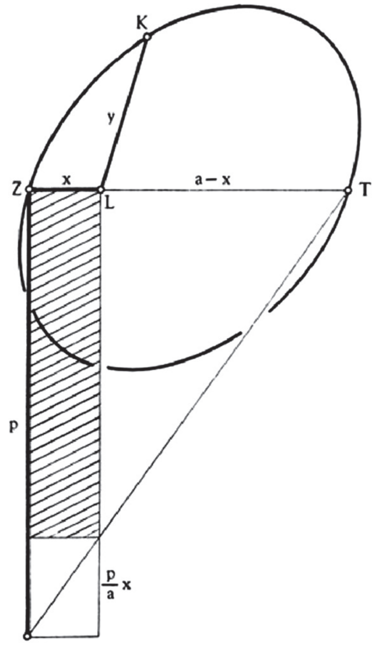
Şekil 9 (Toomer, 1990, s.667)



Şekil 10 (Toomer, 1990, s. 668)



Şekil 11 (Toomer, 1990, s. 668)



Şekil 12 (Toomer, 1990, s.669)

Böylece Apollonius meydana çıkan şekilleri,

(i). için *parabol* (παραβολή),

(ii). için *hiperbol* (ὑπερβολή)

(iii). için *elips* (ἔλλειψις) olarak sınıflandırmıştır.

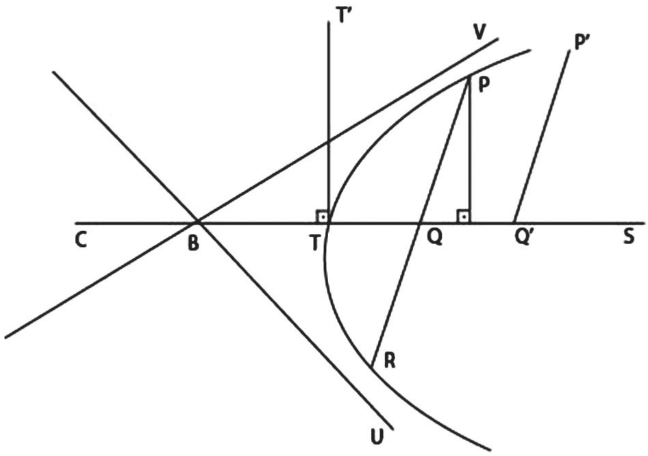
Her üç durum için de burada geçen ‘p’ harfi *latus rectum*u ifade etmektedir. *Eğimli Konjügasyon* teorisinin tam olarak anlaşılabilmesi için bilinmesi gereken üç temel kavramdan biri *latus rectum*dur. Latus rectum dikdörtgenin *dik kenar*ı anlamında kullanılmıştır. Herhalde bundan dolayıdır ki *latus rectum*’un Arapçası ve dolayısıyla da Osmanlıcası tam da bu kelimeyi karşılayan *dıl‘-ı kaim* olarak aktarılmıştır. *Latus rectum*, *parametre* olarak da bilinir. Bir koni ve düzlemin kesişimi sonucu elde edilebilecek bir diğer şekil de aslında elipsin özel bir hali olan çemberdir. Apollonius da Eukleides gibi çemberi bir ‘düzlem şekil’ olarak kabul etmiş ve koni kesiti olarak incelememiştir. Eukleides, *Elementler*’in birinci cildinin on beşinci tanımında çemberi belirli bir noktaya (merkez) eşit uzaklıktaki bir doğru[21]

21 İngilizce çeviride *line* olarak geçen bu kelime çember, koni kesitleri gibi bazı eğrileri de kapsamaktadır. Bu terimin Yunancası γραμμηγραμμη’dur ve yalnız başına kullanıldığında *eğri* manasındadır.

tarafından kapsanan düzlem şekil olarak tanımlamıştır. Ayrıca yine üçüncü postulatında çemberi, belli bir merkez ve belli bir uzaklıkla çizilebilir bir şekil olarak tarif etmiştir. Bu teorinin anlaşılması için gerekli olan diğer iki temel kavram *latus transversum* (Bknz. Şekil 13 ve açıklaması) ve *ordinat açıları*dır. (Aslan Seyhan, s.36-38).

Apollonius'un kullandığı antik geometrik kavramlar zaman zaman günümüz terminolojisiyle uygunluk göstermekte, zaman zamansa göstermemektedir. Onu tam olarak anlayabilmek için kullandığı kavramları yakından incelemek gerekmektedir. Apollonius'a göre "bir koni kesitinin *kirişi* her iki ucu koni üstünde kalan ve koniyi iki noktada kesen bir doğru parçasıdır. Bir koni kesitinin *çapı,* belli bir doğruya paralel olan tüm kirişleri iki eşit parçaya ayırarak kesen doğrudur. Çap tarafından ikiye bölünen bu kirişlerin yarım parçalarına *ordinatlar* denir. Çap ve bahsi geçen ordinat arasında kalan açıya *ordinat açıları*[22] denir. Bu açı her ordinat için aynıdır, çünkü ordinat doğruları paraleldir. Koni ile koninin çapının kesiştiği noktaya koninin *tepesi* denir. Koni kesitinin üzerindeki her bir nokta için o noktadan geçen yalnız bir çap çizilebilir. Bu durumda koni kesitinin her bir noktası bahsi geçen koni kesitinin tepesi olur" (Hogendijk, 1979, s. 39; Aslan Seyhan, s. 37).

Apollonius'un 'hiperbol' dediğinde aslında kastettiği şey hiperbolün yalnız bir dalıdır (Heath, 1896, s. clviii-clxi). Bunu, hiperbolün her iki kolunu kast ettiği durumlarda '*karşılıklı kesmeler*' terimini kullanmasından anlıyoruz. Hiperbolün merkezini ise *asimptotlar*ın kesişme noktası olarak tanımlamıştır. Şekil 13 üzerinde bu kavramları inceleyecek olursak: B noktası PTR hiperbolünün merkezidir. BU, BV asimptotları, BS çapı, T tepe noktasıdır. PQ ordinat ve PQ = QR'dir.



Şekil 13 (Hogendijk, 1979, s. 40).

22 Angle of arrangement.

Eğer TB doğrusunu TB = BC olacak şekilde C noktasına kadar uzatırsak, CT'nin tamamına *latus transversum* denir. Bu kavram Apollonious'un teorisini anlamak için anlamamız gereken en önemli kavramlardandır (Hogendijk, 1979, s. 40; Aslan Seyhan, s. 38).

Varsayalım ki P hiperbol üzerinde bir nokta olsun ve Q , PQ ordinat olacak şekilde, BS çapının üzerinde bir nokta olsun. Bu durumda $\frac{PQ^2}{QT.QC}$ oranı P'nin pozisyonundan bağımsız olacaktır. Bu noktada Apollonius, TC'ye dik bir TT' doğru parçası çizmiştir. Öyle ki;

$$\frac{\mathrm{TT}'}{TC} = \frac{(PQ)^2}{QT.QC}$$

eşitliğini sağlasın. Bu durumda TT''ye *latus rectum* denir. $P'Q' \,//\, PQ$ çizelim ve Q' noktası BS çapının üzerinde bir nokta olsun, bu durumda bir hiperbol $(P'Q')^2 = (Q'T).(Q'C) = (TT') : TC$ özelliğini sağlayan tüm noktaları kapsar. Hiperbolün bu özelliği bir açının üç eşit parçaya bölünmesi meselesinde ve düzgün çokgenlerin çizimlerinde İslâm Dünyası alimlerince sıklıkla kullanılmıştır. Belli bir çapa bağlı *latus transversum* ve *latus rectumun* uzunlukları ancak ve ancak asimptotların dik kesiştiği durumda yani *ortagonal* hiperbolde eşit olmaktadır (Hogendijk, 1979, s. 39-41; Aslan Seyhan, s. 38-39).

4. Sonuç

Koni kesitleri tarihi Apollonius'la başlamaz. Apollonius'dan önce de bu konuda yapılmış çalışmalar ve çeşitli eserler mevcuttur. Hatta Apollonius'dan önce *Eğimli Konjugasyon* teorisi en azından parabol için bilinmektedir. Bu konuda çalışan kimi matematik tarihçilerine göre, Apollonius aslında Archimedes'in olan bazı fikirleri geliştirmiştir. Ancak incelediğimiz kadarıyla *Konika*'da Archimedes'den hiç bahsedilmemiştir. Bu noktada Pappus'un Apollonious hakkındaki etik eleştirileri haklı gibi görünmektedir. Buna rağmen Apollonius eserinde koni kesitlerini icat ettiğini ileri sürmemektedir, hatta dördüncü kitabının önsözünde Samos'lu Conon'dan koni kesitleri teorisinin kâşifi olarak bahsetmektedir (Toomer, 1981a, s. 180; Heath, 1896, s. lxxiii; Aslan Seyhan, s. 30). Yine de Apollonious'un haklı bir orijinallik iddiası vardır. O ilk defa koni kesitlerini bir ve aynı koniden elde etmiş, asimptotları koordinat eksenleri gibi kullanmış, cisim locinin sentezi ve sınırlarının belirlenmesine yarayan birçok takdire şayan yeni teorem geliştirmiş, maksimum ve minimum problemleri, evolütler ve eğrilik merkezleri konularının temelleri gibi çeşitli kavram, teorem ve problemleri ilk defa ele almıştır. Asimptotları koordinat eksenleri gibi kullanmış olması ve eserinin genel anlamda cebir ve geometriyi buluşturan içeriği, aslında Apollonius'un analitik geometrinin temelini attığını göstermektedir.

Modern okuyucu için *Konika* anlaşılması en zor antik matematik eserleri arasındadır. Bunun en temel sebebi Apollonius'un retorik anlatımı ve konunun zorluğudur. Bu konuyu retorik olarak kavrayabilmek modern sembolizme alışık olan matematikçiler için tam anlamıyla bezdiricidir. Fakat tüm zorluğuna rağmen bu eser geometride kanun sayılmış, temel eser olarak okutulmuş ve tarih boyunca en ünlü matematikçiler tarafından çalışılmıştır. İbn Heysem, Newton, Fermat, Halley, Kepler, Leibniz gibi belki de tüm zamanların en büyük astronomları ve matematikçileri asırlar sonra bile hala bu eserin kıymeti karşısında hayrete düşmüşler ve onun hakkını teslim etmişlerdir. *Konika* matematikçiler tarafından yalnız teorik olarak ele alınmamıştır. Bu eserin sunduğu kavramlar ve imkanlar, antik çağın meşhur problemlerinin çözümü için teknik araçlar olarak kullanılmıştır.

Kaynakça

Allman, G. J. (1889). *Greek Geometry From Thales to Euclid*. Dublin - Londra: Dublin University Press.

Anderson, L. (1971a). "Duplication of the Cube", *Historical Topics for the Mathematics*

Classroom, Capsule 51, Washington: National Council of Teachers of Mathematics. s. 197-199.

Anderson, L. (1971b). "The Quadrature of the Circle", *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, Capsule 53, Washington: National Council of Teachers of Mathematics. s. 201-204.

Aslan Seyhan, İ. (2017). *Osmanlılarda Koni Kesitleri: Seyyid Ali Paşa* (Yayınlanmamış Doktora Tezi), Ankara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Baravalle, H. (1971). "The Number $\pi\pi$", *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, Capsule 44, Washington: National Council of Teachers of Mathematics. s. 149-154.

Bir, A. ve Kaçar M. (2005). "Salih Zeki'nin Teslis-i Zaviye Konusundaki 'Bir Hendese Meselesi' Adlı Yazı Dizisi", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, VII/1, s. 45-66.

Bulmer - Thomas, I. (1981a). Menaechmus. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 9, s.269). New York: Charles Scribner's Sons.

Bulmer - Thomas, I. (1981b). Eutocius of Ascalon. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 4, s. 489 - 491). New York: Charles Scribner's Sons.

Bulmer - Thomas, I. (1981c). Pappus of Alexandria. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 10, s. 293 - 304). New York: Charles Scribner's Sons.

Burton, D. (2011). *The History of Mathematics*. New York: McGraw Hill.

Cajori, F. (2014). *Matematik Tarihi.* Ankara: ODTÜ yayıncılık.

Coolidge, J. L. (1968). *A History of the Conic Sections and Quadratic Surfaces.* New York Dover Publications.

Dörrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics Their History and Solution.* New York: Dover Publications.

Fried, M. N. (2011). *Edmond Halley's Reconstruction of the Lost Book of Apollonius's Conics Translation and Commentary*. New York: Springer-Verlag.

Glenn R. (1992). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, *Proclus.* Princeton: Princeton University Press.

Habegger, P. (1971). "The Trisection Problem", *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, Capsule 52, Washington: National Council of Teachers of Mathematics. s. 199-201.

Hann, J. *(*1850). *A Rudimentary Treatise on Analytical Geometry and Conic Section*. Londra: J. Weale.

Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga Treatise on Conic Sections.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimedes.* Cambridge: Cambridge at the University Press.

Heath, T. L. (1921a). *A History of Greek Mathematics* (C. 1). Londra: Oxford at the Clarendon Press.

Heath, T. L. (1921b). *A History of Greek Mathematics* (C. 2). Londra: Oxford at the Clarendon Press.

Heath, T. L. (1931). *A Manual of the Greek Mathematics*. Londra: Oxford at the Clarendon Press.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (C. 3). New York: Dover

Publications.

Heiberg, J. L. (1891). *Apollonii Pergaei Quae Graece Exstant cum Commentariis Antiquis*, Lipsiae in aedibus B.G. Tuebneri.

Hogendijk, J. P. (1979). *On The Trisection of an Angle and The Construction of a Regular Nonagon by means of Conic Sections in Medieval Islamic Geometry.* Utrecht: Utrecht University.

Hogendijk, J. P. (1985). *Ibn AI-Haytham's Completion of the Conics.* New York: Springer-Verlag.

Huxley, G. L. (1981). Anthemius of Tralles. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 1, s. 169 - 170). New York: Charles Scribner's Sons.

Jones, A. (1986). *Pappus of Alexandria Book VII of the Collection* (C. 1, C. 2). New York Springer-Verlag.

Kline, Moris. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Knorr, W. R. (1982). Observations on Early History of Conics. *Centaurus* 26 (s. 1 - 24).

Kökçü, A. (2019). *Bir Zamanlar Geometri*. Ankara: Nobel.

Kramer, E. (1983). *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. New York: Hawthorn Books Inc Publishers.

Morrow, Glenn R. (1981). Proclus. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 11, s. 160 - 162). New York: Charles Scribner's Sons.

Ostermann, A. ve Wanner, G. (2012). *Geometry by It's History*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Terzioğlu, N. ve İlker, A. N. (1960). *Modern Geometri, Konikler (Teorem ve Problemler).* İstanbul: Şirketi Mürettibiye Basımevi.

Toomer, G. J. (1981a). Apollonius of Perga. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 1, s. 179 - 192). New York: Charles Scribner's Sons.

Toomer, G. J. (1981b). Ptolemy. *Dictionary of Scientific Biography* (C. 11, s. 186 - 206). New York: Charles Scribner's Sons.

Toomer G. J. (1990). Apollonius *Conics Books V to VII: The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banu Musa.* New York: Springer-Verlag.

Young, J. R. (1871). *A Rudimentary Treatise on Analytical Geometry and Conic Section.* Londra: Crosby Lockwood.