ISSN: **2536-4383**

Araştırma Makalesi

Mühendislik Problemlerinde Boyut Analizi ve Buckingham Pi Teoremi'nin Önemi

***Naci Kalkan** [*a], **Osman Yiğid** [a]*

[a] *Bitlis Eren Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Bitlis 13000*

Özet

Mühendislik problemlerinde bazı temel denklemler çok karmaşık olup çoğunun çözümü oldukça zordur. Bu çalışmada bu tür karmaşık problemlerin çözümü için boyut analizi ve boyut analizinin temelini oluşturan Buckingham Pi teoremi açıklanmıştır. Ayrıca bu teoremin boruda akış ve su dalgalanması gibi mühendislik problemleri üzerinde uygulaması yapılmıştır. Bu çalışmanın amacı karmaşık yapıya sahip olan mühendislik problemlerinin fiziksel büyüklükleri korunmak şartıyla daha etkili bir şekilde çözülebilmesini sağlamaktır.

Anahtar Kelimeler: Boyut analizi, Buckingham pi teoremi mühendislik problemleri, boruda akış, su dalgalanması

The Importance of Dimensional Analysis and Buckingham Pi Theorem Used in Engineering Problems

Abstract

This paper describes dimensional analysis and Buckingham`s Pi Theorem for the solution of complex engineering problems. A short overview about Buckingham`s Pi Theorem is explained with a basic dimensional analysis. This report also includes some engineering practices such as pipe flow and water waves problems in the following pages. The general purpose of the article is to understand how efficiently engineering problems can be solved with the Buckingham`s Pi Theorem.

Keywords: Dimensional analysis, Buckingham pi Theorem, engineering problems, Pipe flow, water waves.

Giriş

Bir problem üzerinde yapılan boyut analizi ile birlikte elde edilen tek denklem, problemi etkileyen tüm parametreler arasındaki ilişkiyi gösterir. Fakat bu denklemdeki her bir parametrenin üst kuvveti farklı olacağından bu kuvvetlerin belirlenmesi için uygun bir analiz yapılmalıdır. Bu analiz sonucunda ortaya çıkacak olan boyutsuz sayı grupları ile problemin çözümü için doğru adımlar atılabilir (1) .

Buckingham pi teoremi boyut analizinin temelini oluşturan en önemli yöntemdir. Buckingham pi teoremi tarihte ilk olarak 'boyutların metodu' adı altında Lord Rayleigh tarafından kendi kitabında (The Theory of Sound) 1877 yılında kullanılmıştır. 1914 yılında E. Buckingham tarafından teorem haline getirilmiştir. Fakat bu tarihten önce A.Vaschy

[*] Corresponding author

e-mail: nacikalkan@gmail.com

Received: 03.05.2016

Accepted: 13.07.2016

(1892) ve D. Riabouchınsky (1911) tarafından bağımsız olarak bazı çalışmalar literatüre kazandırılmıştır (2).

Bu teorem ile birlikte *n* adet değişken içeren her anlamlı fiziksel denklem $n - m$ boyutsuz parametreli denklemle yeniden yazılabilir, burada *m* kullanılan temel boyutların sayısıdır. Ayrıca teorem bu boyutsuz değişkenleri, verilen değişkenlerden hesaplamak için bir yöntem sağlar (3).

Teori

Genellikle $R_1, \ldots, R_n$`e kadar olan fiziksel büyüklükleri günümüzde sık bir şekilde kullanılan birim sistemleri ile hesaplarız. Örnek olarak metre, kilogram, saniye, amper ve Kelvin (m, kg, s, A, K) gibi temel birimleri içeren SI birim sistemi verilebilir. Günümüzde kullanılan ölçüm sistemleri bazen çözüm için yetersiz kalmaktadır.

Bu yüzden kullanılacak bu sistemde temel birimler $F_1, \ldots, F_m$, şeklinde yazılacaktır.

$$R_j = \nu(R_j)[R_j] = \rho_j[R_j] \qquad \textbf{(1)}$$

Burada $\rho_j = \nu(R_j)$ bir sayı , $[R_j]$ ise R_j ‘nin birimi olarak tanımlanmıştır. $[R_j]$ ayrıca güç üretim birimi olarak ifade edilebilir.

$$[R_j] = \prod_{i=1}^{m} F_i^{a_{ij}} \qquad (j, \ldots, n)$$

Önemli konuların birisi olarak da temel birimlerin bağımsız olması gösterilebilir.

$$\prod_{i=1}^{m} F_i^{x_i} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_m = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Tek bir birim sisteminin kullanılması yeterli değildir. Bu yüzden konunun özünde seçilen temel birimler bir hayli değişkenlik gösterebilir. Bu yüzden farklı birim sistemleri tercih edilmektedir. Örneğin daha önce bahsetmiş olduğumuz F_i yerine $\overline{F_i} = x_i^{-1} F_i$ yazılabilir. Burada x_i i=1,....,m olmak şartıyla rastgele seçilmiş pozitif bir sayı olabilir. Bununla birlikte büyüklüklerin hesaplanması için oluşturulan yeni sistem şu şekilde yazılabilir:

$$R_j = \hat{\nu}(R_j)[R_j] = \hat{\rho}_j[R_j]$$

Formül hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} R_j &= \nu(R_j) F_1^{a_{1j}} \cdots F_m^{a_{mj}} \\ &= \underbrace{\nu(R_j) x_1^{a_{1j}} \cdots x_m^{a_{mj}}}_{\hat{\nu}(R_j)} \hat{F}_1^{a_{1j}} \cdots \hat{F}_m^{a_{mj}} \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemden yola çıkarak eşitlik denklem 3 haline dönüştürülür.

$$\hat{\rho}_j = \rho_j \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}} \qquad \textbf{(3)}$$

Örneğin, F_1= m, ve F_s= s, ve R_1 hız ise $[R_1]$ = $ms^{-1} = F_1F_2^{-1}$ ve a_{11}=1, a_{21}= -1. Bununla birlikte $\overline{F_1}$ = km ve $\overline{F_2}$ = h, Bulunan değerler ise x_1=1/1000 ve x_2=1/3600 buna bağlı olarak $\overline{\rho_1} = \rho_1 . 3.6$. Sonuç olarak eğer $\rho_1 = 10$ ise $\overline{\rho_1}$ =30 olur. Bağıntıyla birlikte 10 m/s = 36 km/h yazılabilir.

Boyutsal matris A (R_1,....,R_n) şu şekilde tanımlanabilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a\_m1 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu bölümde konunun en önemli kısmına değinelim: Değişkenlerin boyutsuz kombinasyonları, R_j. Bu değişkenlerin kombinasyonları yalnızsa güç üretimi, $R_1^{\lambda 1} \ldots R_n^{\lambda n}$ için yazılabilir. Bu kombinasyonun birimlerini hesaplayacak olursak:

$$[R_1^{\lambda 1} \cdots R_n^{\lambda n}] = \prod_{i=1}^{m} F_i^{a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1n}\lambda_n} \qquad \textbf{(4)}$$

Eğer bu birim 1 ise kombinasyon boyutsuz olarak adlandırılır. Bununla birlikte önemli bir çıkarım olan $A\lambda$=0 eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T$ olarak yazılır.

Boyutsuz kombinasyonları birim sistemlerinden bağımsız bir değere sahip olması sürpriz olmamakla birlikte beklenen bir durumdur. Denklem 3 kullanılarak hesap yapılacak olursa:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{m} \hat{\rho}_i^{\lambda_j} &= \prod_{j=1}^{m} \left(\rho_i \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}} \right)^{\lambda_j} \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n} \rho_j^{\lambda_j} \right) \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}\lambda_j} \end{aligned}$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{n}\rho_j^{\lambda_j}\right)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}x_i^{a_{ij}\lambda_j}=\prod_{j=1}^{n}\rho_j^{\lambda_j}$$

Çünkü Aλ=0 ,

$$\prod_{j=1}^{n}x_i^{a_{ij}\lambda_j}=1$$

Buna ek olarak, sıfır uzay N(A) için bir değer seçilir ve buna uygun boyutsuz kombinasyonlar alınır. Bu kombinasyon $\pi_1,...,\pi_{n-r}$ (burada r değeri A'nın bir mertebesi olarak alınır), daha sonra herhangi bir boyutsuz kombinasyon π_1^{c1} .... $\pi_{n-r}^{c_{n-r}}$ sonuç, ürün olarak yazılabilir. Belirtilen boyutsuz kombinasyonda üstel fonksiyon değeri özgün bir değer olarak verilir (4). Bu değerler seçilen N(A) 'nın katsayılarıdır. Bu da maksimum bağımsız değişken kombinasyonları olarak adlandırılır. Şimdi Buckingham pi teoremine detaylı olarak bakalım.

Teorem (Buckingham pi Teoremi)

$\Phi(R_1,\ldots,R_2)=0$ ile $R_j\neq0$ arasındaki fiziksel olarak mantıklı ilişki, birbirinden bağımsız birimsiz tüm kombinasyonları içeren $\Psi(\pi_1,\ldots\pi_{n-r})=0$ denklemini içeren forma eşittir.

Fark edilmesi gereken önemli bir husus şudur ki; yeni denklem orijinal denkleme göre r içerdiğinden dolayı daha az değişkene sahiptir. Bu durum benzer teorik analiz ve deneysel tasarımları basitleştirir.

Şu noktada bunu henüz ispatlayacak durumda değiliz. Fakat diğerlerinden önce "fiziksel olarak mantıklı" ifadesini tam olarak açıklığa kavuşturmak zorundayız.

İlk olarak Φ birim ve değere sahip olmalı

$$|\Phi|=\prod_{i=1}^{m}F_i^{b_i}$$

Değeri, basitçe Rj değerlerinin Φ denklemde yerine yazılmasıyla hesaplanır.

$$v(\Phi(R_1,\ldots,R_n))=\Phi(v(R_1),\ldots,v(R_n))$$

Dahası, farklı birimler kullandığımızda, denklem(3)'teki kurala benzer şekilde Φ'nin değeri de değiştirilmelidir. Böylece…

$$\begin{aligned}&\Phi(\hat{v}(R_1),\ldots,\hat{v}(R_n))\\&=\hat{v}(\Phi(R_1,\ldots,R_n))\\&=x_1^{b_1}\ldots x_m^{b_m}v(\Phi(R_1,\ldots,R_n))\\&=x_1^{b_1}\ldots x_m^{b_m}\Phi(v(R_1),\ldots,v(R_n))\end{aligned}$$

Nihayetinde, bütün gerçek $\rho_1,\ldots,\rho_n$ ve pozitif $x_1,\ldots x_n$ değerleri için

$$\begin{aligned}&\Phi(x_1^{a_{11}}\ldots x_m^{a_{m1}}\rho_1,\ldots,x_1^{a_{1n}}\ldots x_m^{a_{mn}}\rho_n)\\&=x_1^{b_1}\ldots x_m^{b_m}\Phi(\rho_1,\ldots,\rho_n)\end{aligned}$$

Buckingham pi teorisi fiziksel olarak mantıklı denildiği zaman bu denklemi göz önüne almalıyız. Fakat bir özelliğin daha üzerinde durmalıyız. Φ R_j niceliklerinin birleşimi olması gerektiğinden dolayı, Φ'nin birimi R_j değişkenlerinin bir türlü kombinasyonu olmak zorundadır.

Şimdi ispata başlayabiliriz: İlk önce şunu bir kenara yazalım, yukarıdaki paragrafın son beyanında Φ'in yerine $R_1^{C1}\ldots R_n^{Cn}\Phi(R_1\ldots C_1)$ ifadesini yerleştirebiliriz. Burada $C_1,\ldots C_n$ katsayıları yeni denklemi birimsiz yapacak şekilde seçilmişlerdir. Yani denklem(5) te $b_1=\ldots=b_m=0$

Boyut matrisi A, rankı r olan bir matris olsun. Bu matris r kadar birbirinden bağımsız sütuna sahiptir. İlk r sütunlarının $R_1\ldots R_r$ değişkenlerine denk geldiğini varsayabiliriz. Sonra $R_1\ldots R_r$ boyutsal olarak bağımsız olmasına rağmen, bunların kombinasyonlarının boyutsuz olduğu bir durum vardır. Bu da, $\lambda_1=\ldots=\lambda_r=0$ olduğu durumda $R_1\lambda_1\ldots R_r\lambda_r$ boyutsuzdur. (Denklem(4))

Aşağıdaki kendiliğinden bire bir karşılıklı ifade ise:

$$(R_1,\ldots,R_n)\leftrightarrow(R_1,\ldots,R_r,\pi_1,\ldots,\pi_{n-r})$$

Açıkçası buradaki zorluk R_k'yi (k>r olduğu durumda) eşitliğin sağındaki nicelikler cinsiden ifade edebilmektir. Fakat lineer cebir bize gösterir ki; A matrisinin k sütunu ilk r sütunlarının kombinasyonudur. Ve dahası uygun $C_1,\ldots,C_r$ seçimleri için $|R_k|=|R_1^{C1},\ldots,R_r^{Cr}|$. Sonra $R_kR_1^{-C1}\ldots R_r^{-Cr}$ boyutsuz olduğu için $\pi_1^{d1}\ldots\pi_{n-r}^{dn-r}$ seklinde yazılabilir. Nihayetinde $R_k=R_1^{C1}\ldots R_r^{Cr}\pi_1^{d1}\ldots\pi_{n-r}^{dn-r}$ seklinde yazabiliriz.

Simdi yukarıdaki birebir karşılıklı ifadeyi kullanarak uygun Ψ denklemi için

$$\Phi(R_1, \dots, R_n) = \Psi(R_1, \dots, R_n, \pi_1, \dots, \pi_{n-r})$$

çok geçmeden $\Psi(R_1,\dots,R_r,\pi_1,\dots,\pi_{n-r})$ fonksiyonunun aslında $R_1,\dots R_r$ den bağımsız olduğunu ispatlayalım. Böylece ifade edebiliriz ki

$$\Psi(R_1, \dots, R_n, \pi_1, \dots, \pi_{n-r}) = \Psi(\pi_1, \dots, \pi_{n-r})$$

Ve böylece Buckingham pi teorisinin ispati tamamlanmış oldu.

$R_1,\dots R_j$ değişkenlerinin bağımsız olduğunu ispatlamak için, denklem(7)'de her R_j yerine onun ρ_j değerini yaz ve bunu denklem(6)'da her iki tarafa yerleştir. Ve $b_i=0$ olduğu unutulmamalı.

$$\Psi(x_1^{a_{11}} \dots x_m^{a_{m1}} \rho_1, \dots, x_1^{a_{1r}} \dots x_m^{a_{mr}} \rho_r, \pi_1, \dots, \pi_{n-r}) = \Psi(\rho_1, \dots, \rho_n, \pi_1, \dots, \pi_{n-r})$$

Şunu söyleyebiliriz ki, verilen pozitif $\rho_1,\dots\rho_r$ sayıları için $x_i,\dots x_m$ sayılarını seçebiliriz ki böylece yukarıdaki denklemin solunda bulunan $x_1^{1_{1j}} \dots x_m^{1_{mj}} \rho_j$ $(j = 1, \dots . r$ için$)$ sayıları verilen herhangi bir pozitif sayı olabilir. Daha açık olmak gerekirse, bunların tamamını 1 e eşit olmaya zorlayabiliriz. Bu da denklemin x_i cinsinden çözüm yoludur (4).

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{a_{ij}} = \frac{1}{\rho_j} \quad , \qquad j = 1, \dots, r$$

Gerçekte, $x_i=\exp(\xi_i)$ yazarsak yukarıdaki denklem

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\xi_i = -\ln \rho_j \quad , \qquad j = 1, \dots, r$$

haline gelir.

Bu denklem çözülebilir bir denklemdir. Çünkü soldaki mxr A yan matrisinin rankı r dir. Dolayısıyla onun satır aralığı $\mathbb{R}^r$ dir. Bu yukarıda iddiayı ve dolayısıyla teoremi ispatlıyor.

Uygulamalar

Boruda akış

Problem olarak boru boyunca akış gösteren bir akışkanın basınç düşüşünün hesaplanması belirlenmiştir.

Eğer seçilen boru, çapına göre uzun ise, basınç düşüşü boru uzunluğu ile orantılıdır diyebiliriz. Diğer bütün etkenler sabit olarak kabul edilir. Burada bizim aradığımız ise ortalama basınç gradyantı olan ÑP'yi bulmak ve belirsiz olan boru uzunluğunu tahmin etmektir.

Konuyla ilgili bütün değişkenler borunun diğer bütün değişkenlerini içermektedir: Boru çapı: D ve boru pürüzlülüğü: e. İlk yaklaşım yapılırken sadece boru iç yüzeyindeki ortalama pürüzlülüğe izin verilecektir; bu da uzunluğa eşittir (4). Problem ile ilgili bazı akışkan özellikleri de mevcuttur. Burada kinematik viskozite, v= μ/ρ, yoğunluk ρ, ile birlikte kullanılır. Newton tipi akışlarda kesme hareketinde, kesme gerilmesi (birim alana düşen) hız gradyanı ile doğru orantılıdır.

Dinamik viskozite, μ, de ise orantı sabittir. Bundan dolayı dinamik viskozitenin , μ, birimi $Nm^{-2}/s^{-1} = kgm^{-1}s^{-1}$, ve bu yüzden kinematik viskozitenin, v, birimi m^2s^{-1} olarak yazılabilir.

Sonuç olarak, ortalama akış hızına, v, ihtiyaç vardır.

Boyutsal matris şu şekilde yazılabilir:

	∇P	ν	D	e	v	ρ
m	-2	1	1	1	2	-3
kg	1	0	0	0	0	1
s	-2	-1	0	0	-1	0

Buradan sıfır uzay N(A)'yı bulabiliriz ve bulunan bu değeri boyutsuz kombinasyonları bulmak için kullanabiliriz. Fakat bir gerçek var ki boyutsuz kombinasyonlar deneme yoluyla daha kolay bulunabilirler. Matris sistemine baktığımızda 3 sütun ve 6 satırdan oluşan değişken sistemi olduğu görülmektedir. Bu yüzden 6-3=3 adet bağımsız boyutsuz kombinasyon bulmamız gerekmektedir. Bunun için sonsuz olasılık mevcuttur. Bu ihtimali en aza indirmek için yaygın olarak kullanılan boyutsuz sayılar kullanılacaktır (4).

$$Reynold's\ Number \quad Re = \frac{vD}{v}$$

$$Relative\ Roughness \quad \varepsilon = \frac{e}{D}$$

$$\frac{\nabla P \cdot D}{\rho v^2}$$

Burada ÑP' nin değişkenlerin bir fonksiyonu olması beklenmektedir. Ayrıca bulunan değerin yukarıda verilen büyüklükler ile bağlantısının olması gerekir çünkü bu büyüklükler değişkeni ÑP olan özgün bir çözüm sağlar:

$$\frac{\nabla P \cdot D}{\rho v^2} = f(Re, \epsilon)$$

bu eşitliği şu şekilde yazacak olursak:

$$\nabla P = \frac{2\rho v^2}{D} f(Re, \epsilon)$$

halini alır.

Denklemde farklı olarak başına 2 gelmesinin sebebi ise Fanning's sürtünme faktörünün dikkate alınmasıdır. Fanning yaptığı analizlerde çap yerine yarıçap kullanmıştır (4).

Boyutsal matrisi tekrar yazmaya gerek yoktur. Açıkça görülmektedir ki 3 boyutsuz büyüklük bulunur. Bu büyüklüklerin her biri birbirinden bağımsız olarak en az bir değişken içerirler. Üç temel birim bulunduğundan, boyutsal matrisin üçten fazla satırı olması söz konusu değildir. Ayrıca üçten fazla bağımsız boyutsuz kombinasyon olması da mümkün değildir. Kısacası, boyutsal matris boyutlandırmaları en uygun şekilde özetlemeyi ve lineer cebirdeki problem içerisindeki her bir işlemi kolaylaştırmayı sağlar.

Suyun Dalgalanması

Öncelikle sudaki yüzeysel dalgalanmaları tanımlayalım. Bu dalgalar, dalga numarası $k = 2\pi/\lambda$ (λ: dalga boyu) ve açısal hız (w) ile karakterize edilirler. Burada bulmamız gereken açısal hız fonksiyonunun dağılımıdır. Bunun için bazı parametreler önemli rol oynayacaktır. Bunlar derinlik (d), dalga yüksekliği (h), yer çekim ivmesi (g) ve akışkan özellikleri olan her bir küçük dalga için yoğunluk (ρ) ve yüzey gerilimi (τ) olarak sıralanabilir. Burada viskozitenin ihmal edildiğini kabul ediyoruz.

Belirtilen değişkenlerin boyutsal olarak özeti şu şekilde yazılabilir:

Değişken	ω	k	h	d	ρ	τ	g
Birim	s^{-1}	m^{-1}	m	m	kgm^{-3}	$Nm^{-1} = kgs^{-2}$	ms^{-2}

Burada yedi adet değişken ve üç temel birim bulunmaktadır. Dolayısıyla buradan dört bağımsız boyutsuz kombinasyon beklenmektedir. Burada Bond boyutsuz sayısı (Bo) mantıklı görünmektedir:

$$hk, \ dk, \ \frac{\omega^2}{gk}, \ Bo = \frac{\rho g}{\tau k^2}$$

Bulunan bu dört kombinasyonu, tek kombinasyon olan ve w içeren forma indirgersek:

$$\omega^2 = gk\psi(hk, dk, Bo)$$

Bu parametre bize dalgalarla ilgili gerekli bilgiye ulaşmamıza imkân sağlamaktadır. Örneğin dalga boyu büyük ise Bond sayısı büyüktür ve bu yüzden yüzey geriliminin etkisi ihmal edilebilir. Eğer su derinliği dalga uzunluğu ile kıyaslanırsa $dk \approx \infty$, bu arada dalganın küçük olan yüksekliği dalga uzunluğu ile kıyaslanırsa $hk \approx 0$ olur. Bütün bu yaklaşımlarla beraber Ψ' nın sabit olacağı beklenir. Bu yüzden w^2, gk ile orantılıdır ve $w^2 = gk$ yazılabilir.

Bununla birlikte derin sularda gerçekleşen çok kısa dalgalarda, dalga hareketi için sadece yüzey gerilimi dikkate alınır ve g probleme dâhil olmaz. Burada yeni bir boyut analizi yapılabilir. Bu analizde Ψ, g 'nin lineer bir fonksiyonu olarak açıkca görülür ve $dk \gg 1$, $hk \ll 1$ olur. Yeni oluşan form şu şekilde ifade edilebilir.

$$\omega^2 = \frac{\tau k^3}{\rho}$$

Sonuç

Boyut analizi genel olarak mühendislikte kullanılmasına rağmen gerektiğinde tüm sayısal alanlarda kullanılabilmektedir. Bu çalışmada karmaşık yapıya sahip mühendislik problemlerinin çözümü için boyut analizi ve boyut analizinin temelini oluşturan Buckingham Pi teoremi tanıtılmıştır. Boyutsuz parametreler olan Pi'lerin nasıl oluşturulacağını hem teorik olarak hem de boruda akış ve su dalgalanması gibi mühendislik problemleri üzerinden anlatılmıştır. Yapılan bu çalışmayla birlikte boyut analizi ve Buckingham pi teoreminin üç temel amacını şu şekilde özetleyebiliriz:

- Parametreler arasındaki bağıntı eğilimini kestirmek
- Model performansından prototipin performansının ölçeklendirme yasalarını bulmak
- Sayısal ve fiziksel deneyleri tasarlamada ve deney sonuçlarını raporlamada kullanılmak üzere boyutsuz parametreler oluşturmak

Kaynaklar

[1] Boyut Analizine Giriş. [Çevrimiçi] [Alıntı Tarihi: 27 Mart 2014.] http://eng.harran.edu.tr/moodle/moodledata/7/yesilata/01_Ders_Notlari/07ch4.pdf

[2] White, F. M. The Buckingham Pi Theorem in Dimensional Analysis. Fluid Mechanics Sections 5.1-5.4.

[3] Chandler, Matthew. *Buckingham Pi Theorem.* 1998.

[4] Hanche-Olsen, Harald. Buckingham's pi theorem. [Çevrimiçi] 2004. http://www. math. ntnu. no/~ hanche/notes/buckingham/buckingham-a4. pdf.

[5] Donald F. Young, Bruce Roy Munson, T. H. Okiishi. *A Brief Introduction To Fluid Mechanics.* [dü.] 2nd. John Wiley & Sons, Inc., 2001.