



Journal of Turkish Operations Management

Belirsizlik altında kaynak kısıtlı çok modlu çoklu proje çizelgeleme

Serdar Soysal^{1*}, Berna Dengiz², Kumru Didem Atalay³

¹ Türk Havacılık ve Uzay Sanayii, Ankara, Türkiye,

e-mail: sersoysal@yahoo.com, ORCID No: <https://orcid.org/0000-0002-7093-7419>

² Endüstri Mühendisliği Bölümü, Başkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye

e-mail: bdengiz@baskent.edu.tr, ORCID No: <https://orcid.org/0000-0002-2806-3308>

³ Endüstri Mühendisliği Bölümü, Başkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye

e-mail: katalay@baskent.edu.tr, ORCID No: <https://orcid.org/0000-0002-9021-3565>

*Sorumlu Yazar

Makale Bilgisi

Makale Geçmişi:

Geliş: 27.02.2021
Revize: 18.04.2021
Kabul: 27.04.2021

Anahtar Kelimeler:

Çok modlu,
Çoklu proje çizelgeleme,
Kaynak tahsisi
Şans kısıtlı programlama,
Stokastik faaliyet süreleri

Özet

Bu makalede, faaliyet sürelerinin stokastik olması durumunda, kaynak kısıtlı çok modlu çoklu proje çizelgeleme problemi (KKÇMÇPÇP) ele alınmaktadır. Geliştirilen modelin amacı, öncüllük ilişkileri ve kaynak kısıtlarına bağlı olarak tüm projelere göre toplam ağırlıklı gecikmeyi en küçükmektir. Ele alınan problem, sınırlı yenilenebilir ve yenilenemez kaynaklar ve faaliyetler için tanımlı, farklı zaman-kaynak kullanım alternatiflerini gösteren modları içerir. Bu çalışmada kaynakların paylaşarak her bir projeye tahsis edilmesini benimseyen ve kaynak tahsis politikası olarak isimlendirilen, kaynak yönetim politikası kullanılmıştır. Problem, şans kısıtlı programlama (ŞKP) modeli olarak formüle edilmiştir. Çözüm yaklaşımının etkinliği, test problemleri üzerinde yapılan sayısal analizler ile gösterilmiştir.

Multi-mode resource constrained multi-project scheduling under uncertainty

Article Info

Article History:

Received: 27.02.2021
Revised: 18.04.2021
Accepted: 27.04.2021

Keywords:

Multi-mode
Multi-project scheduling
Resource dedication
Chance-constrained programming
Stochastic activity duration

Abstract

This paper considers the multi-mode resource constrained multi-project scheduling problem (MMRCMPSP) with stochastic activity times. The objective of the proposed model is to minimize the total weighted tardiness for all projects, subject to precedence and resource constraints. The problem involves limited renewable and non-renewable resources and different modes which state different time-resource alternatives for activities. Resource dedication policy is used as a resource management policy, that resources are dedicated to each project. In this study, the problem is formulated as a chance constrained programming (CCP) model. The effectiveness of the solution approach is demonstrated by computational analyses on a set of test problems.

1. Giriş

Son yıllarda, havacılık, inşaat, savunma sanayi gibi alanlarda işletmeler, kıt kaynakların kullanımını dikkate alarak aynı anda birçok projeyi birlikte yürütmektedir. Kaynak Kısıtlı Proje Çizelgeleme Problemi, birden çok projenin çizelgelenmesine uyarlanarak teknik yazımda “Kaynak Kısıtlı Çoklu Proje Çizelgeleme Problemi (KKÇPÇP)” olarak adlandırılmıştır. Payne’e (1995), göre, projelerin %90’ı çoklu proje ortamında gerçekleştirilmektedir. Ayrıca

şirketlerin %84'ünde aynı anda birden çok proje, eş zamanlı olarak yürütülmektedir (Lova, Maroto ve Tormos, 2000).

Birden çok projenin ve her bir projenin birden çok faaliyetinin olduğu bir durumda, öncüllük ilişkileri ve kaynak kısıtları dikkate alınarak, tüm projelerin aynı anda başlayacağı varsayımı ile tüm faaliyetlerin planlanması, önemli bir işletme yönetimi problemidir.

Bu çalışmada, faaliyet sürelerinin stokastik olması durumunda, kaynak kısıtlı çok modlu çoklu projeli çizelgeleme problemi (KKÇMÇPÇP), kaynak kısıtlı proje çizelgeleme probleminin özel bir durumu olarak sunulmuştur. Kolisch, Sprecher ve Drexl (1995), kaynak kısıtlı proje çizelgeleme probleminin deterministik durum için NP-zor problemler sınıfına ait olduğunu göstermiştir. Bu nedenle, bu çalışmada ele alınan stokastik KKÇMÇPÇP'nin çözümünde işlem yükü çok arttığı için ele alınan problem doğal olarak NP-zor problem sınıfındadır.

Herhangi bir projedeki herhangi bir faaliyet, birkaç moddan birinde gerçekleştirilebilir. Faaliyetlerin gerçekleştirileceği modlar, öncüllük ilişkileri ve kaynak kısıtlamaları temelinde amacı eniyileyecek şekilde seçilir. Bu çalışmada ele alınan problemde birden çok mod dikkate alınmıştır. Bu durumda, her bir faaliyet bu modlardan herhangi birinde o mod için tanımlı zaman-kaynak alternatifine göre gerçekleştirilir.

Çoklu proje çizelgeleme problemi içinde kaynakların yönetimi çok önemlidir. Beşikçi, Bilge ve Ulusoy (2013), kaynak yönetimi politikasını, kaynakların çoklu proje ortamında her bir proje tarafından nasıl kullanıldığının karakterizasyonu olarak tanımlamaktadır. Literatürde, çoklu proje ortamı için genellikle kullanılan ortak yaklaşım kaynak paylaşım politikasıdır. Bu politika, ortak bir havuzdaki mevcut tüm kaynakların projeler tarafından paylaşılması ilkesine dayanmaktadır. Ancak projelerin uzak bölgelerde, farklı şehirlerde ve hatta farklı ülkelerde olması durumunda kaynak paylaşım politikası uygun bir politika değildir. Bu durumda, kaynakları paylaşmak zaman alıcı ve maliyetli olabilir. Örneğin, birçok inşaat projesi farklı ülke veya şehirlerde yürütülebilmektedir. Bu nedenle kaynak paylaşım politikası ile kaynakların projeler tarafından ortak bir havuzdan kullanımı olanaksızdır.

Bu nedenle, bu çalışmada her projeye, proje süreleri boyunca, kaynak tahsis yapan kaynak tahsis politikası kullanılmıştır. Kaynaklar kısıtlı kapasiteye sahip olup yenilenebilir ve yenilenemez olmak üzere iki grup olarak dikkate alınmıştır. Aynı anda başlayabilecek faaliyetlerin birbirlerine göre üstünlükleri (öncelikleri) yoktur. Bu çalışmada, yukarıda belirtilen özelliklere sahip literatürde bulunan KKÇMÇPÇP için, daha gerçekçi bir yaklaşım olan, stokastik faaliyet süreleri tanımlanmıştır.

Ayrıca, dikkate alınan diğer bir gerçekçi yaklaşım da bir faaliyetin hem en erken hem de en geç bitiş zamanlarının stokastik olduğudur. Dolayısıyla faaliyet süreleri ve en erken, en geç bitiş zamanları normal dağılıma sahip rassal değişkenlerle tanımlanmıştır. Literatürde, stokastik faaliyet süresini dikkate alan az sayıda proje çizelgeleme problemleri bulunmaktadır. Ayrıca, özel bir proje çizelgeleme problemi olan KKÇMÇPÇP'lerinde stokastik yaklaşım kullanılarak çözüme ulaşan çalışma sayısı çok daha azdır. Bu çalışmanın yenilikçi bir yanı da stokastik faaliyet sürelerinin yanı sıra, faaliyetlerin en erken ve en geç bitiş zamanları da ilk kez bu çalışmada stokastik olarak dikkate alınmasıdır. Ayrıca, bu çalışmada KKÇMÇPÇP ilk kez Şans Kısıtlı Programlama (ŞKP) ile modellenip çözülmüştür. Makale aşağıda verilen şekilde organize edilmiştir.

Makalenin ikinci bölümünde ele alınan probleme ait literatür taraması verilmiştir. Problem tanımı, matematiksel formülasyonu ve çözüm yaklaşımı, üçüncü bölümde sunulmuştur. Matematiksel modelin çözümleri dördüncü bölümde rapor edilmiştir. Son olarak, beşinci bölümde sonuçlar verilmiş ve gelecekteki çalışmalar için bazı öneriler sunulmuştur.

2. Literatür Taraması

Bir projenin belirli hedef ve amaçlara ulaşarak tamamlanması için, faaliyetlerin hangi sırada yapılacağı ve ne zaman başlayacağı ile biteceğinin belirlenmesi, kaynakların planlanması, nasıl kullanılacağına tanımlanması, tedarik edilmesi ve yönetilmesi ile ilgili kararlar proje yönetimi kapsamında verilmesi gereken kararlardır. Dolayısıyla proje yönetimi içinde faaliyetlerin çizelgelenmesi problemi, özellikle kaynak kısıtlı çizelgeleme olarak karşımıza çıkmaktadır.

Proje çizelgeleme probleminin birçok uzantısı olup çeşitli araştırma alanlarında sınıflandırılmıştır. Dolayısıyla literatürde bu alanda yazılmış yüzlerce çalışma vardır. Bu çalışmada, kaynak tahsis politikasının ve stokastik faaliyet süresinin dikkate alındığı KKÇMÇPÇP ele alınmıştır. Bu nedenle de literatür taraması i) kaynak kısıtlı çoklu proje ortamında kaynak politikaları ii) çok modlu ortamda projelerin kaynak gereksinimlerinin belirlenmesi ve iii) proje planlamasında ŞKP modellemesi ile ilgili çalışmalarla sınırlı tutulmuştur.

Pritsker, Waiters ve Wolfe (1969), kaynak paylaşım politikasına sahip çoklu proje çizelgeleme problemi için faaliyet sürelerinin deterministik olduğu 0-1 doğrusal programlama modeli önermişlerdir. Çalışmalarında çıktının üretim zamanını, toplam proje tamamlanma zamanını ve toplam gecikme süresi/gecikme cezasını en küçüklemek üzere üç olası amaç fonksiyonu kullanmışlardır. Kurtuluş ve Narula (1985), kaynak paylaşım politikası ile deterministik bir ortamda çoklu proje çizelgeleme problemine ilişkin dört öncelik kuralını dikkate alarak altı ceza fonksiyonunun etkisini incelemişlerdir. Lawrence ve Morton (1993), amaç fonksiyonu ağırlıklı gecikme maliyetini en küçüklemek olan, kaynak kısıtlı çoklu proje ortamında çizelgeleme problemini, deterministik ortamda irdelemişlerdir. Zhu, Bard ve Yu (2006), amaç fonksiyonunun en küçük üretim süresi (minimum makespan) olduğu, çok modlu kaynak kısıtlı proje çizelgeleme problemini incelemişlerdir. Yüksek-düzeyleli komşuluk arama stratejisine sahip bir dal sınır algoritması kesin bir çözüm yöntemi olarak sunulmuştur. Krüger ve Scholl (2009), deterministik ortamda çoklu proje çizelgeleme problemini sıra ve kaynak bağımlı transfer zamanı ve kaynak paylaşım politikasını dikkate alarak incelemişlerdir. Gonçaves, Mendes ve Resende (2008), deterministik bir ortamda kaynak paylaşımı politikasına sahip kaynak kısıtlı çoklu proje çizelgeleme problemi için Genetik Algoritma (GA) önermişlerdir. Beşikçi ve diğ. (2013), KKÇMÇPÇP'ni deterministik ortamda ele alarak kaynak tahsis politikası kullanmışlardır. Beşikçi, Bilge ve Ulusoy (2015), aynı problemi yine deterministik ortamda, kaynak tahsis politikası, toplam bütçe ve teslim tarihleriyle ele alarak iki-fazlı ve monolitik GA geliştirmişlerdir.

Diğer yandan, literatürde deterministik olmayan ortamda farklı proje çizelgeleme problemlerini çözmek için bazı yaklaşımlar önerilmiştir. Herroelen ve Leus (2015), belirsizlik altında örneğin reaktif çizelgeleme, stokastik proje çizelgeleme, bulanık proje çizelgeleme, dayanıklı (robust) çizelgeleme ve duyarlılık analizi gibi temel yaklaşımların kapsadığı bir derleme yayınlamışlardır. Bu yaklaşımlar tek projeli ve tek modlu ortamlar içindir. Golenko-Ginzburg ve Gonik (1998), kaynak kısıtlı tekli proje çizelgeleme için sezgisel bir yöntem önermektedir. Çalışmada, farklı kapasitelere sahip çeşitli kaynak türleri gerektiren stokastik faaliyetler içeren bir proje ele alınmıştır. Tsai ve Gemmil (1998), Tabu Arama algoritması geliştirmiş ve kaynak kısıtlı ve stokastik faaliyet süresi ile tek projeli çizelgeleme problemini çözmüşlerdir. Uzun zaman sonra, Stork (2000), stokastik işlem süresine sahip aynı problem için dal sınır algoritması önermiştir. Ashtiani, Leus ve Aryanezhad (2011), stokastik faaliyet süreleri ile sınırlı kaynak kısıtlı tek proje için çizelgeleme probleminde yeni bir çizelgeleme politikası önermiştir. Bu yeni çizelgeleme politikası sınıfında, bir ön çizelgeleme aşamasında bir dizi uygun sıralama kararları verilirken, kalan kararlar projenin yürütülmesi sırasında dinamik olarak alınır. Ke ve Liu (2005), stokastik faaliyet süresi ile tek proje için çizelgeleme problemini ele alarak toplam maliyeti en küçüklemek amacını sağlayan üç tür stokastik model önermişlerdir. Bu modelleri çözmek için stokastik simülasyon ve GA önermişlerdir.

Yang ve Chang (2005), tek proje için sınırlı ve belirsiz kaynak ve finansman temini altında inşaat projeleri için çizelgeleme problemini ele almışlardır. Problemi ŞKP olarak formüle etmiş ve deterministik eşitliği ile doğrusal programlama teknikleri ile çözümlenmişlerdir. Wang, Huang ve Ke (2015), belirsiz faaliyet süresi olan kaynak kısıtlı proje çizelgeleme problemini ele almış ve ŞKP olarak modellemişlerdir. Modeli çözmek için GA tabanlı algoritmalar geliştirmişlerdir. Uysal, İşleyen ve Çetinkaya (2018), kaynakların stokastik olduğu varsayımını kullanarak kaynak kısıtlı proje çizelgeleme problemini ele almışlardır. Çalışmalarında, şans kısıtlı, parçalı doğrusal, karma tamsayı programlama modeli için deterministik model geliştirerek çözmüşlerdir. Beşikçi ve diğ. (2013), belirsizliği dikkate almadan deterministik bir ortamda KKÇMÇPÇP için matematiksel model ve GA tabanlı çözüm önermişlerdir.

Yukarıda verilen literatür incelemesinden görüldüğü gibi, stokastik faaliyet süreleri veya belirsiz kaynak ve finansman koşulları altında, çoklu proje ortamında kaynak tahsis politikası gibi farklı kaynak kullanım politikasını kabul eden, tek ve çok modlu yapılar dikkate alınmamıştır. Faaliyet zamanlarının çeşitli etkenlerle stokastik olduğu ve projelerin tamamlanmasında önemli rol oynadığı bilinmektedir. Dolayısıyla stokastik zamanlı KKÇMÇPÇP bu çalışmada ele alınarak, literatürdeki bu eksiklik giderilmeye çalışılmıştır.

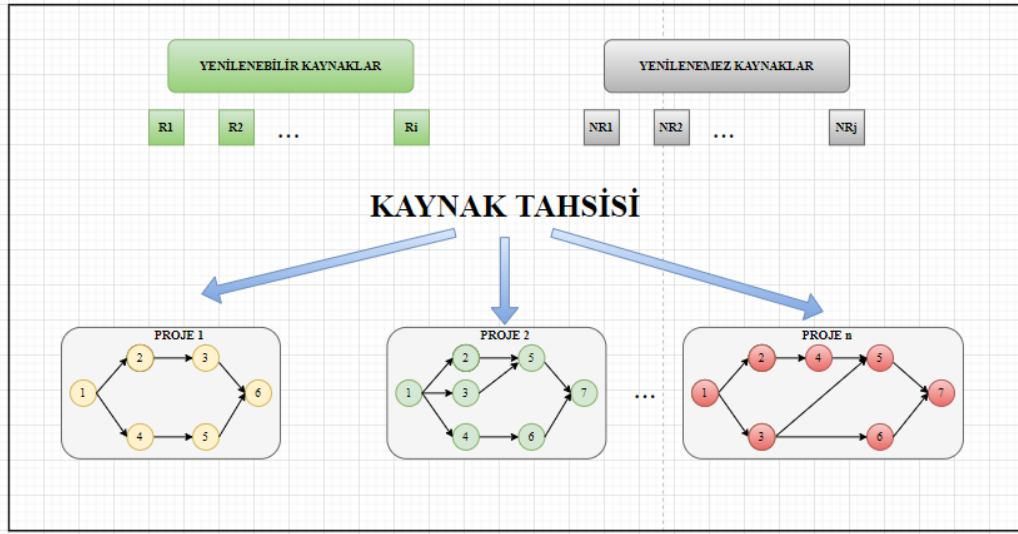
3. Stokastik KKÇMÇPÇP

3.1 Problem Tanımı

Bu çalışmada ele alınan KKÇMÇPÇP sınırlı yenilenebilir ve yenilenemez kaynaklara sahiptir. Bu kaynaklar, projeler arasında paylaşılırak tahsis edilmektedir. Herhangi bir projede başlayan faaliyet kesintisiz devam eder. Başlangıçta tüm projelerin başlamaya hazır durumda olduğu varsayılmaktadır. Her projedeki her bir faaliyet, yürütme modu adı verilen farklı zaman-kaynak alternatifleri arasından yapılacak seçim ile yürütülebilir. Faaliyetler arasında öncüllük ilişkisi vardır. Öncüllerinin tümü tamamlanmadıkça hiçbir faaliyet başlatılamaz. Uygulamadaki

çoğu gerçek hayat problemlerinde, önemli belirsizlikler olsa da literatürde çalışmaların çoğu deterministik ortam koşullarında ele alınmaktadır.

Özellikle proje faaliyetleri gerçek yaşamda önemli ölçüde belirsizlikler içermektedir. Projenin yürütülmesi sırasında, hava koşulları, kaynak yetersizliği vb. gibi çeşitli etkiler nedeniyle proje faaliyet zamanları değişkenlik göstermektedir. Bu nedenle bu çalışmada problemin gerçekçi bir yaklaşımla çözümü için faaliyet süreleri stokastik olarak ele alınmış ve normal dağılıma sahip rassal değişkenler olduğu varsayılmıştır. Bununla birlikte, gerçekçi diğer bir yaklaşımla, bir faaliyetin hem en erken hem de en geç bitiş zamanı da stokastik olarak ele alınmış ve normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Yukarıda tanımlanan çoklu proje ortamının genel yapısı Şekil 1’de görülmektedir. Buna göre, yenilenebilir ve yenilenemez kaynaklar, çoklu proje ortamındaki her bir projeye tahsis edilerek projelerin kullanımına verilir. Tahsis edilen bu kaynaklar sadece ilgili projeye aittir ve tahsis işleminden sonra diğer projeler ile paylaşılamazlar. Bu çalışmanın amacı, projelerin toplam ağırlıklı gecikmelerini Bölüm 3.2 de verilen kısıtlar altında en küçüklemektir.



Şekil 1. Çoklu Proje Ortamının Genel Yapısı

3.2 Problemin Matematiksel Modeli

Bu çalışmada ele alınan problemin çözümü için ŞKP yaklaşımı önerilmiştir. ŞKP, ilk olarak Charnes ve Cooper (1959, 1962) tarafından geliştirilmiştir. ŞKP, stokastik programlama problemini deterministik programlama problemine dönüştürmek için kullanılan yaklaşımlardan biridir. Şans kısıtlı stokastik programlama problemi rasgele veriler içermektedir. Bu problemlerde, belirlenen olasılık limitlerine kadar kısıt bozulmalarına izin verilir. Kısıtlardaki bozulmaların genişliğini belirten olasılık ölçülerinin kümesiyle, doğrusal kısıtlar birleştiriliyorsa doğrusal programlama modeli şans kısıtlı olarak adlandırılır. Kısıtlardaki kısmi bozulmalara izin veren şans kısıtlı stokastik programlama problemi, yaklaşık güvenilirliği sağlayan bir yöntem olarak değerlendirilebilir. Bu yöntem genelleştirilmiş ve endüstriyel ve ekonomik problemleri de içeren pek çok alanda uygulanmıştır (Atalay ve Apaydın, 2011)

Bu problem stokastik kısıtlar altında, amaç fonksiyonunun en iyilenmesini amaçlamaktadır. Stokastik faaliyet süreli KKÇMÇPÇP’ye ilişkin tanımlar, açıklamalar ve ŞKP modeli izleyen kısımlarda verilmektedir.

Kümeler ve indisler

V	proje kümesi, $v \in V$
J_v	proje “ v ” nin faaliyet kümesi, $j \in J_v$
vN	proje “ v ” nin son faaliyeti
P_v	proje “ v ” nin öncüllük ilişkileri kümesi
M_{vj}	proje “ v ” nin “ j ” inci faaliyetinin mod kümesi, $m \in M_{vj}$
K	yenilenebilir kaynaklar kümesi, $k \in K$
I	yenilenemez kaynaklar kümesi, $i \in I$
T_v	proje “ v ” nin zaman dönemleri kümesi, $t \in T_v$

Parametreler

E_{vj}	proje "v" nin "j" inci faaliyetinin en erken bitiş zamanı (Rassal değişken-RD)
L_{vj}	proje "v" nin "j" inci faaliyetinin en geç bitiş zamanı (RD)
$r_{vjk m}$	proje "v" nin "m" modundaki "j" inci faaliyetinin yenilenebilir kaynak "k" kullanım miktarı
$w_{vji m}$	proje "v" nin "m" modundaki "j" inci faaliyetinin yenilenemez kaynak "i" kullanım miktarı
dd_v	proje "v" ye atanan bitiş tarihi
R_k	yenilenebilir kaynak "k" nın toplam kapasitesi
W_i	yenilenemez kaynak "i" nın toplam kapasitesi
c_v	proje "v" nin göreceli ağırlığı
d_{vjm}	proje "v" nin "m" modundaki "j" inci faaliyetinin süresi(RD)

Karar Değişkenleri

$x_{vjmt} = \begin{cases} 1, & \text{proje "v" nin "m" modundaki "j" inci faaliyeti "t" döneminde tamamlanursa} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$	
BR_{vk}	proje "v" ye tahsis edilen yenilenebilir "k" tipinde kaynak miktarı
BW_{vi}	proje "v" ye tahsis edilen yenilenemez "u" tipinde kaynak miktarı
TC_v	proje "v" nin ağırlıklandırılmış gecikmesi

Faaliyet sürelerinin dağılımı genellikle normal dağılıma yakın dağılımlar gösterdiği için birçok araştırmada faaliyet süreleri normal dağılan rassal değişkenler olarak ele alınmıştır. Brucker, Drexl, Möhring, Neumann ve Pesch (1999), Chakraborty, Sarker ve Essam (2017), ile Yang ve Chang (2005) çalışmalarında tek proje için faaliyet sürelerinin normal dağıldığı varsayımını kullanmışlardır.

Stokastik faaliyet zamanı dikkate alınan çalışmamızda, faaliyet süresinin normal dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır ($d_{vjm} \sim Normal(E(d_{vjm}), Var(d_{vjm}))$).

Burada, (E_{vj}) rassal değişkeninin, v projesinin j faaliyetinin bitiş süresine eşit veya bundan küçük olmasının olasılığının alt sınırı, $(1 - \alpha_r)$ 'dir ve şans kısıtı Eş. (1) ile verilmiştir.

$$P \left[E_{vj} \leq \sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t \in T_v} tx_{vjmt} \right] \geq 1 - \alpha_r \quad (1)$$

öyle ki $E_{vj} \sim Normal(E(E_{vj}), Var(E_{vj}))$ dir. Şans kısıtının deterministik eşitliği ise Eş.(2) ile tanımlanmıştır.

$$\frac{\sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t \in T_v} tx_{vjmt} - E(E_{vj})}{\sqrt{Var(E_{vj})}} \geq K_{\alpha_r} \quad (2)$$

Eş. (2) düzenlenerek Eş.(3) elde edilir.

$$\sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t \in T_v} tx_{vjmt} \geq E(E_{vj}) + K_{\alpha_r} \sqrt{Var(E_{vj})} \quad (3)$$

Ayrıca, (L_{vj}) rassal değişkeninin, v projesinin j faaliyetinin bitiş süresine eşit veya bundan büyük olma olasılığı için üst sınır, α_r 'dir ve şans kısıtı Eş. (4) ile tanımlanır.

$$P \left[L_{vj} \geq \sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t \in T_v} tx_{vjmt} \right] \geq \alpha_r \quad (4)$$

öyle ki $L_{vj} \sim Normal(E(L_{vj}), Var(L_{vj}))$ dir. Şans kısıtının deterministik eşitliği Eş.(5) ile verilmiştir.

$$\frac{\sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t \in T_v} tx_{vjmt} - E(L_{vj})}{\sqrt{Var(L_{vj})}} \leq K_{\alpha_r} \quad (5)$$

Eş. (5) düzenlenirse Eş. (6) elde edilir.

$$\sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t \in T_v} tx_{vjmt} \geq E(L_{vj}) + K_{\alpha_r} \sqrt{Var(L_{vj})} \tag{6}$$

d_{vjm} normal dağılıma sahip rassal değişken olmak üzere, her projedeki faaliyetler arasındaki öncüllük ilişkileri ile ilgili kısıt Eş.(7) ile verilmiştir.

$$\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} (t - d_{vbm})x_{vbmt} \geq \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vamt} \quad \forall (a, b) \in P_v, \quad \forall v \in V \tag{7}$$

Eş.(7) ile verilen kısıtın şans kısıtı Eş. (8) ile tanımlanmıştır.

$$P \left[\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} d_{vbm}x_{vbmt} \leq \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbmt} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vamt} \right] \geq 1 - \alpha_r \tag{8}$$

$\forall (a, b) \in P_v, \forall v \in V$

Burada $P[.]$ olasılığı ifade etmektedir. $(1 - \alpha_r)$ önceden belirlenmiş güven düzeyi olup, kısıtın olasılığının izin verilen en küçük değerini gösterir ve $0 < \alpha_r < 1$ dir. Eş.(8)'de olasılığın içindeki eşitsizliğin sol tarafındaki rassal değişken c_{bv} ile ifade edilirse Eş. (9) elde edilir.

$$c_{bv} = \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} d_{vbm}x_{vbmt} \quad b \in P_v \text{ and } \forall v \in V \tag{9}$$

c_{bv} rassal değişkeni ortalaması

$$E(c_{bv}) = \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} E(d_{vbm})x_{vbmt} \quad b \in P_v \text{ and } \forall v \in V \tag{10}$$

ve varyansı

$$Var(c_{bv}) = X^T V_{bv} X \quad b \in P_v \text{ and } \forall v \in V \tag{11}$$

olan normal dağılıma sahiptir. Burada $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ ve

$$V_{bv} = \begin{bmatrix} Var(d_{vb1}) & Cov(d_{vb1}, d_{vb2}) \dots Cov(d_{vb1}, d_{vbm}) \\ Cov(d_{vb2}, d_{vb1}) & Var(d_{vb2}) \dots Cov(d_{vb2}, d_{vbm}) \\ \vdots & \vdots \\ Cov(d_{vbm}, d_{vb1}) & Cov(d_{vbm}, d_{vb2}) \dots Var(d_{vbm}) \end{bmatrix}$$

kovaryans matrisidir. Bu durumda Eş. (8) Eş.(12) de görüldüğü şekilde yeniden yazılabilir.

$$P \left[c_{bv} \leq \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbmt} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vamt} \right] \geq 1 - \alpha_r \quad \forall (a, b) \in P_v, \quad \forall v \in V \tag{12}$$

Burada c_{bv} normal dağılan rassal değişkeni standartlaştırılırsa

$$\frac{(c_{bv} - E(c_{bv}))}{\sqrt{Var(c_{bv})}} \sim Normal(0,1)$$

elde edilir ve dönüşüm sonucu Eş. (13) yazılabilir.

$$P \left[c_{bv} \leq \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vam} \right] = F \left(\frac{\left(\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vam} \right) - E(c_{bv})}{\sqrt{Var(c_{bv})}} \right) \quad (13)$$

Burada F standart normal dağılım fonksiyonudur. K_{α_r} standart normal rassal değişkenin değeri olmak üzere $F(K_{\alpha_r}) = 1 - \alpha_r$ dir. Buna göre

$$F \left(\frac{\left(\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vam} \right) - E(c_{bv})}{\sqrt{Var(c_{bv})}} \right) \geq F(K_{\alpha_r}) \quad (14)$$

elde edilir. Buna göre Eş. (14) ancak ve ancak

$$\left(\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vam} \right) \geq E(c_{bv}) + (K_{\alpha_r} \sqrt{Var(c_{bv})}) \quad (15)$$

olduğu durumda sağlanır. Eş. (15)'de c_{bv} değeri yerine yazılarak Eş. (16) elde edilir.

$$\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vam} \geq \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} E(d_{vbm})x_{vbm} + (K_{\alpha_r} \sqrt{X^T V_{bv} X}) \quad (16)$$

d_{vbm} rassal değişkeni bağımsız olduğundan $Cov(d_{vbi}, d_{vbj}) = 0$ 'dır. Bu durumda Eş.(16) Eş.(17)'ye dönüşür.

$$\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=E_{va}}^{L_{va}} tx_{vam} \geq \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} E(d_{vbm})x_{vbm} + \left(K_{\alpha_r} \sqrt{\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=E_{vb}}^{L_{vb}} Var(d_{vbm})x_{vbm}^2} \right) \quad (17)$$

Böylece Eş. (8) ile verilen şans kısıtının deterministik eşitliği Eş.(17) ile ifade edilebilir.

d_{vjm} normal dağılıma sahip rassal değişken olmak üzere, tüm projeler ve kaynak türleri üzerinde yenilenebilir kaynak kullanımıyla ilgili kısıtlar, tahsis edilmiş yenilenebilir kaynakların miktarından daha az veya ona eşit olmalıdır. Buna göre kısıt Eş.(18) ile ifade edilir.

$$\sum_{j \in J_v} \sum_{m \in M_{vj}} \sum_{q=\max\{t, E_{vj}\}}^{\min\{t+d_{vjm}-1, L_{vj}\}} r_{vjkm} x_{vjmq} \leq BR_{vk} \quad \forall k \in K, \forall t \in T, \forall v \in V \quad (18)$$

Eş.(18) ile verilen kısıtta toplamın üst sınırında bulunan d_{vjm} rassal değişkeni normal dağılıma sahiptir ve

$$z_{1-\alpha_r} = \frac{d_{vjm} - E(d_{vjm})}{\sigma_{d_{vjm}}} \sim Normal(0,1)$$

olarak standartlaştırılır. Burada $z_{1-\alpha_r}$; $1 - \alpha_r$ güven düzeyine ait standart normal rassal değişkenin değeri ve $E(d_{vjm})$, $\sigma_{d_{vjm}}$ sırasıyla d_{vjm} rassal değişkenin beklenen değeri ve standart sapmasıdır. Bu durumda Eş.(18), Eş. (19) olarak yeniden yazılabilir.

$$\sum_{j \in J_v} \sum_{m \in M_{vj}} \sum_{q=\max\{t, E_{vj}\}}^A r_{vjkm} x_{vjmq} \leq BR_{vk} \quad \forall k \in K, \forall t \in T, \forall v \in V \tag{19}$$

Burada $A = \min \{t + \sigma_{d_{vjm}} z_{1-\alpha_r} + E(d_{vjm}) - 1, L_{vj}\}$ dır.

E_{vj} ve L_{vj} normal dağılıma sahip rassal değişkenlerdir ve bu rassal değişkenleri zaman parametresi olarak alt ve üst limitlerde barındıran kısıtlar da yeniden düzenlenmelidir. E_{vj} kısıtlardan birinde toplam notasyonunun alt sınırı olarak bulunmaktadır. Bu rassal değişken standartlaştırılarak

$$z_{1-\alpha_r} = \frac{E_{vj} - E(E_{vj})}{\sigma_{E_{vj}}} \sim Normal(0,1)$$

elde edilir, burada $E(E_{vj})$, $\sigma_{E_{vj}}$ sırasıyla E_{vj} rassal değişkeninin beklenen değeri ve standart sapmasıdır. İlgili kısıtta bu rassal değişken yerine $\sigma_{E_{vj}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vj})$ alınarak kısıt yeniden düzenlenir.

L_{vj} kısıtlardan birinde toplamın üst sınırı olarak bulunmaktadır. Bu rassal değişken standartlaştırılarak

$$z_{1-\alpha_r} = \frac{L_{vj} - E(L_{vj})}{\sigma_{L_{vj}}} \sim Normal(0,1)$$

elde edilir; burada $E(L_{vj})$, $\sigma_{L_{vj}}$ sırasıyla L_{vj} rassal değişkeninin beklenen değeri ve standart sapmasıdır ve ilgili kısıtta bu rassal değişken yerine $\sigma_{L_{vj}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vj})$ alınarak kısıt yeniden düzenlenir.

Stokastik durumda, rassal değişken içeren kısıtlarda, proje “ v ” nin “ m ” modundaki “ j ” inci faaliyetinin süresi güncellenmelidir. Bu güncellemeler olasılıklarla ifade edilen şans kısıtlarının deterministik eşitliklerinin elde edilmesi ile yapılmıştır. Bu durumda (23), (24), (26) ve (27) numaralı kısıtlar ve amaç fonksiyonu rassal değişken içermediği için olduğu gibi bırakılmıştır. (21), (22), (25) numaralı kısıtlarda var olan toplam notasyonunun alt ve üst limitlerindeki rassal değişkenleri yukarıdaki açıklamalar doğrultusunda standartlaştırılarak yeniden düzenlenmiştir. (17) ve (19)’uncu kısıtlar şans kısıtlarından elde edilmiş deterministik kısıtları ifade etmektedir. Tüm bu açıklamalar doğrultusunda, stokastik KKÇMÇPÇP’ye ilişkin şans kısıtlı modelin deterministik matematiksel modeli aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Matematiksel model

$$\min z = \sum_{v=1}^V TC_v \tag{20}$$

Kısıt (17) ve (19)

$$\sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t=\sigma_{E_{vj}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vj})}^{\sigma_{L_{vj}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vj})} x_{vjmt} = 1 \quad \forall j \in J_v, \quad \forall v \in V \tag{21}$$

$$\sum_{j \in J_v} \sum_{m \in M_{vj}} \sum_{t=\sigma_{E_{vj}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vj})}^{\sigma_{L_{vj}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vj})} w_{vjim} x_{vjmt} \leq BW_{vi} \quad \forall i \in I \text{ and } \forall v \in V \tag{22}$$

$$\sum_{v \in V} BR_{vk} \leq R_k \quad \forall k \in K \tag{23}$$

$$\sum_{v \in V} BW_{vi} \leq W_i \quad \forall i \in I \tag{24}$$

$$TC_v \geq c_v \left(\sum_{t=\sigma_{E_{vN}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vN})}^{\sigma_{L_{vN}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vN})} \sum_{m \in M_{vN}} tx_{vNmt} - dd_v \right) \quad \forall v \in V \tag{25}$$

$$BR_{vk}, BW_{vi} \in Z^+ \quad \forall v \in V, \forall k \in K, \forall i \in I, Z^+: \text{Pozitif Tamsayı} \tag{26}$$

$$TC_v \geq 0, x_{vjmt} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J_v, \forall t \in T_v, \forall m \in M_{vj}, \forall v \in V \tag{27}$$

Amaç fonksiyonu (20), tüm projelerde toplam ağırlıklı gecikmeyi en küçükler. Kısıt kümesi (21), her projedeki tüm faaliyetlerin yalnızca bir kez planlanmasını garanti eder. Kısıt kümesi (17), her projedeki faaliyetler arasındaki öncüllük ilişkilerini ifade eder. Aralarında öncüllük ilişkisi bulunan 2 faaliyetten, öncül olanın tamamlanmadan ardıl olanın başlamayacağını garanti etmektedir. Kısıt kümesi (19), yenilenebilir kaynak kapasitesini, kısıt kümesi (22) yenilenemez kaynak kapasitesini kontrol etmektedir. Yenilenebilir ve yenilenemeyen kaynak kullanımı, her bir projeye tahsis edilen, toplam yenilenebilir ve yenilenemeyen kaynak miktarından fazla olamaz. Kısıt kümeleri (23) ve (24), sırasıyla tahsis edilmiş yenilenebilir ve yenilenemez kaynakların, verilen genel kaynak kapasitesinden daha büyük olamayacağını garanti eder. Kısıt kümesi (25), her proje için ağırlıklı gecikme değerlerini tanımlar. Kısıt kümeleri (26) ve (27), $BR_{vk}, BW_{vi}, x_{vjmt}, TC_v$ için uygun aralık ve bütünlük sağlamaktadır.

Stokastik durumda, önerilen model, doğrusal olmayan karma tam sayılı bir modelidir. Bu model, tek projeye indirgenerek ve PSPLIB (<http://www.om-db.wi.tum.de/psplib/main.html>, Kolisch ve Sprecher, 1997)'de verilen en küçük faaliyet sayısına sahip test problemlerini çözmek için kullanılmış ve makul bir süre sınırında çözüm elde edilememiştir. Problem karmaşıklığı NP-zor grupta olduğundan ve model doğrusal olmadığından, kısıt kümesi (17) doğrusallaştırılarak anlamlı bir faaliyet boyutuna sahip problemler için makul bir süre içinde çözüm bulmak bu çalışmada hedeflenmiştir.

Eş. (28)'de verilen, bilinen matematiksel eşitsizlik, doğrusal dönüşüm için kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} &\leq \sum_{i=1}^n a_i, a_i \in R^+ \Rightarrow \sqrt{\sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=\sigma_{E_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vb})}^{\sigma_{L_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vb})} Var(d_{vbm}) x_{vbm}^2} \\ &\leq \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=\sigma_{E_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vb})}^{\sigma_{L_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vb})} \sigma_{d_{vjm}} x_{vbm} \end{aligned} \tag{28}$$

Kısıt (17), Eş. (28)'de verilen dönüşüme göre düzenlenirse Eş. (29) elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=\sigma_{E_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vb})}^{\sigma_{L_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vb})} tx_{vbm} - \sum_{m \in M_{va}} \sum_{t=\sigma_{E_{va}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{va})}^{\sigma_{L_{va}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{va})} tx_{vam} &\geq \\ \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=\sigma_{E_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vb})}^{\sigma_{L_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vb})} E(d_{vbm}) x_{vbm} + \left(K_{\alpha_r} \sum_{m \in M_{vb}} \sum_{t=\sigma_{E_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(E_{vb})}^{\sigma_{L_{vb}} z_{1-\alpha_r} + E(L_{vb})} \sigma_{d_{vjm}} x_{vbm} \right) &\end{aligned} \tag{29}$$

Böylece doğrusal olmayan matematiksel model, doğrusal bir modele dönüştürülmüş olur. Bu çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

4. Deneysel Çalışmalar

Bu bölümde, seçilen test problemlerinin, önerilen KKÇMÇPÇP'nin ŞKP modeli kullanılarak elde edilen çözüm sonuçları verilmiştir. Modelin, işlemci zamanı ve toplam ağırlıklı gecikme üzerindeki etkisini incelemek amacıyla tasarım parametreleri oluşturulmuştur. Bu tasarım parametreleri, farklı σ ve α lardan oluşmaktadır. Stokastik KKÇMÇPÇP için literatürde mevcut bir test problem seti bulunmadığından, literatürdeki deterministik durum için kullanılan test problemleri dönüştürülerek stokastik faaliyet sürelerine sahip problem setleri elde edilmiştir. PSPLIB'nin j10 setinden altı adet tek proje problemi birleştirerek, çoklu projeli problem elde edilmiştir. Mevcut problemlerdeki deterministik faaliyet süreleri normal dağılımın ortalaması ve standart sapmanın ise ortalamanın 1/3'ü kadar olduğu varsayılmıştır. Böylece oluşturulan stokastik KKÇMÇPÇP setleri bu çalışmada sayısal analizler için kullanılmıştır. Oluşturulan test problemlerinin tipik bir örneği, Tablo 1 ve Tablo 2'de sırasıyla öncüllük ilişkileri ile süreler ve kaynak talepleri olarak verilmiştir. Bu kütüphanedeki her projede yer alan faaliyetler için tanımlı olan zaman-kaynak alternatiflerini gösteren 3 farklı mod stokastik problem setinde de kullanılmıştır.

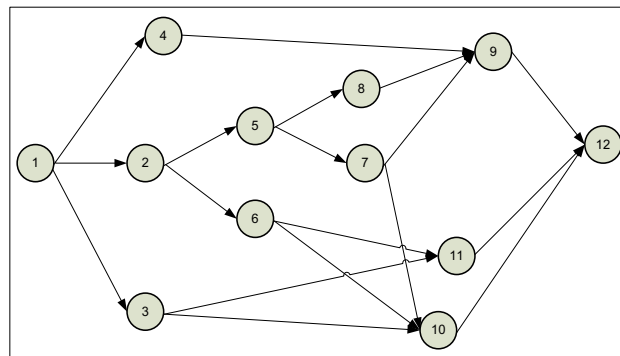
Ayrıca, faaliyet sürelerinin değişiminin problemin çözümü üzerindeki etkisini görmek için faaliyet süresine ait dağılımda, 1σ , 3σ ve 6σ olmak üzere 3 farklı standart sapma dikkate alınarak sonuçlar elde edilmiştir. Öte yandan, stokastik KKÇMÇPÇP'inde α düzeylerinin üç farklı değeri (0.15, 0.1 ve 0.05) dikkate alınarak ŞKP modeli üzerindeki etkisi incelenmiştir. Burada ele alınan güven düzeyi, şans kısıtının sağlandığı en küçük olasılık değerini göstermektedir.

Tablo 1. Tipik bir öncelik ilişkileri örneği

Faaliyet No.	Mod Sayısı	Ardıl Sayısı	Ardılları
1	1	3	2 3 4
2	3	2	5 6
3	3	2	10 11
4	3	1	9
5	3	2	7 8
6	3	2	10 11
7	3	2	9 10
8	3	1	9
9	3	1	12
10	3	1	12
11	3	1	12
12	1	0	

Kaynak: PSPLIB (<http://www.om-db.wi.tum.de/psplib/main.html>, Kolisch ve Sprecher (1997))

Tablo 1'de faaliyet no 1 ve 12 kukla faaliyetler olup, sırasıyla projedeki kaynak ve bitiş faaliyetleridir. Ayrıca, bu tabloda faaliyetler arasındaki öncüllük ilişkisi, her bir faaliyetin ardıllarının listelenmesiyle temsil edilmektedir. Tablo 1'de sunulan verilere dayalı proje ağı Şekil 2'de görülmektedir.



Şekil 2. Örnek Projenin Temsili Ağı

Tablo 2, her modda çalışan faaliyetlerin süresini ve kaynak kullanımını listeler. Faaliyet 1 ve 12 kukla faaliyetler olduğu için sıfır süre ve sıfır kaynak tüketimi ile temsil edilmiştir. Örneğin 2 nolu faaliyet 1 nolu modda tanımlı kaynağı kullanırsa R1'den 6 birim ve N1'den 9 birim kullanarak bu faaliyeti ortalaması 3 birim ve standart sapması 1 olan normal dağılıma uygun bir sürede tamamlayabilecektir.

Tablo 2. Mod-süre-kaynak talebi gösteriminin tipik bir örneği

Faaliyet No	Mod	Süre Ort	Std.Sp	R 1	R 2	N 1	N 2
1	1	0	0	0	0	0	0
	1	3	1	6	0	9	0
2	2	9	3	5	0	0	8
	3	10	3.33	0	6	0	6
	1	1	0.33	0	4	0	8
3	2	1	0.33	7	0	0	8
	3	5	1.67	0	4	0	5
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
	1	6	2	0	2	0	10
11	2	9	3	0	1	0	9
	3	10	3.33	0	1	0	7
12	1	0	0	0	0	0	0

Kaynak: PSPLIB - j102_2 numaralı problem

Bu çalışmada, stokastik KKÇMÇPÇP için önerilen ŞKP modeli karma tamsayı doğrusal matematiksel modele dönüştürülerek, GAMS 24.1'de kodlanmış ve Intel Core i5 üzerinde 1 saat süre sınırı altında 3.1 GHz kişisel bilgisayarda, CPLEX 12.5.0.1 çözücü kullanılarak çözülmüştür.

Bu çalışmada kullanılan stokastik özellikteki test problem seti, her problem için toplam 6 farklı projesi olan 20 test probleminden oluşturulmuştur. Projedeki faaliyet sayısı iki kukla değişken içermek üzere 12'dir. Herhangi bir projedeki her faaliyetin kullanacağı kaynaklar o projeye tahsis edilen kaynaklar arasından 3 farklı moddan seçilebilmektedir.

Test problemleri için belirlenen, 6 proje ve her proje için tanımlanan 12 faaliyet sayısı, 1 saatlik süre içerisinde, çözüm üretilebilen, en büyük proje ve PSBLIB deki faaliyet sayısı kombinasyonunu ifade etmektedir. PSBLIB de yer alan, görece olarak daha fazla faaliyet içeren (12'den çok) büyük ölçekli projeler kullanılarak oluşturulan, tek projeli problemlerde, verilen zaman kısıtında uygun çözüm elde edilememiştir. Ancak, proje sayısındaki değişimin, işlemci zamanı üzerindeki etkisini incelemek amacıyla 3, 4 ve 5 projeli ve 12 faaliyetli problemler için, belirli standart sapma ve α değerleri kullanılarak denemeler yapılmıştır. Bu deneme sonuçları, Tablo 3 de listelenmiştir.

Her bir problemdeki projelerin ağırlıklarını belirlemek için, projelerin teslim tarihleri dikkate alınmıştır. Buna göre, en geç teslim tarihine sahip olan proje, en düşük ağırlık değerine sahiptir. Teslim tarihleri sıralamasına göre, 3 projeli test problemi için, 1'den 3'e, 4 projeli test problemi için, 1'den 4'e ve 5 projeli test problemi için, 1'den 5'e kadar projeler ağırlıklandırılmıştır.

Tablo 3. Proje sayısının işlemci zamanına etkisi

Proje Sayısı	PSPLIB Proje No	α	Standart Sapma						
			1 σ		3 σ		6 σ		
			Toplam Ağırlıklı Gecikme	İşlemci Zamanı (San.)	Toplam Ağırlıklı Gecikme	İşlemci Zamanı (San.)	Toplam Ağırlıklı Gecikme	İşlemci Zamanı (San.)	

3	$j_{102_2}, j_{103_3}, j_{103_4}$	0,15	12	1474,12	18	1532,23	34	1484,27
		0,10	15	1572,45	23	1569,51	42	1601,03
		0,05	17	1429,20	25	1397,41	60	1522,34
4	$j_{104_2}, j_{104_3}, j_{104_4}, j_{103_5}$	0,15	22	1895,25	54	1792,11	88	1950,41
		0,10	30	1768,32	68	2061,52	112	1888,30
		0,05	35	1818,54	80	1872,45	134	1829,08
5	$j_{104_5}, j_{105_4}, j_{104_8}, j_{104_9}, j_{103_6}$	0,15	20	2163,52	36	2068,49	64	2163,74
		0,10	26	1986,79	48	2163,45	92	2038,42
		0,05	29	2204,27	67	2052,41	128	2081,58

Tablo 3'te görüldüğü üzere, çoklu proje ortamında, proje sayısı arttıkça, ŞKP modelinin çözümü için kullanılan işlemci zamanı da artmaktadır. ŞKP modelinin çözümünde, proje kümesinin eleman sayısının artması, modelin çözüm süresini doğrudan etkilemektedir.

Çoklu proje ortamında, en geç teslim tarihine sahip olan proje en düşük ağırlık değerine sahip olacak şekilde, her bir problemdeki altı proje, teslim tarihleri sıralamasına göre 1'den 6'ya kadar ağırlıklandırılmıştır.

Stokastik KKÇMÇPÇP'nin ŞKP ile çözümüyle, her projeye tahsis edilen R1, R2, N1 ve N2 kaynak miktarları, her bir faaliyetin bitiş süresi vb. karar değişkenlerinin değerleri elde edilebilmektedir. Örneğin bu çalışma için oluşturulan 1. test problem seti içinden PSPLIB deki j_{102_2} numaralı proje girdileri ile elde edilen sonuç aşağıdaki Tablo 4'te verilmektedir.

Tablo 4. j_{102_2} projesi için karar değişkenleri değerleri

Proje	$x_{1213,2}$	$x_{1211,4}$...	$x_{19223,2}$	$x_{110325,7}$	BR_{1R1}	BR_{1R2}	BW_{1N1}	BW_{1N2}	TC_1
j_{102_2}	1	1	...	1	1	8	4	29	40	7,8

PSPLIB kütüphanesindeki $j_{102_2}, j_{103_3}, j_{103_4}, j_{103_5}, j_{103_6}, j_{103_7}$ projeleri kullanılarak oluşturulan test problem setinin çözümü ile elde edilen sonuçlara göre, j_{102_2} projesinin 2. faaliyeti, mod 1 tercihi ile beraber 3,2 zaman birimde tamamlanmaktadır. Yine aynı projenin 9. faaliyeti, mod 2 tercih edilerek 23,2 zaman birimde tamamlanmaktadır. j_{102_2} projesine tahsis edilen yenilenebilir kaynak R1 sayısı, 8 iken R2 sayısı, 4'tür. Bununla birlikte, j_{102_2} projesine tahsis edilen yenilenemez kaynak N1 sayısı 29 iken N2 sayısı 40'tır. Modelin çözümü sonucu, aynı proje için hesaplanan ağırlıklandırılmış gecikme değeri 7,8'dir.

Önerilen modelin sayısal analizi amacıyla faaliyet sürelerinin farklı σ düzeyleri ve farklı α olasılık düzeyleri için elde edilen sonuçları Tablo 5'de verilmektedir. Tablo 5 incelendiğinde, problemlerin en küçük ve en büyük çözüm süresi arasındaki farkın yaklaşık 1000 saniye (16,66 dakika) olduğu görülmektedir.

Tablo 5'de faaliyet süresi standart sapması 1σ 'dan 6σ 'ya geçişken aynı anda amaç fonksiyon değerinin arttığı yani beklendiği şekilde stokastik faaliyet sürelerinin değişiminin toplam ağırlıklı gecikmeyi arttırdığı görülmektedir. Standart sapmanın artması, faaliyet sürelerinin değişkenliğini artırarak, ortalamadan daha büyük farklılıkların oluşmasına neden olduğu için, projelerin tamamlanma sürelerini değiştirmiştir. Bu değişimde faaliyet sürelerinin artış gösterdiği gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, toplam ağırlıklı gecikme etkilenmektedir. Örneğin 1. problem için, α düzeyi 0.10 olduğunda, faaliyet sürelerinin standart sapması 6σ için toplam ağırlıklı gecikme değeri en yüksek değerini (150birim) almaktadır.

Öte yandan, 1σ ve 3σ sapmaları için toplam ağırlıklı gecikme değerleri sırasıyla 36 ve 84 zaman birimidir. Bu nedenle, herhangi bir karar destek sistemi içinde bu modelin kullanılması ile, gecikmeyi azaltmak için faaliyet süresindeki değişkenliği azaltmanın etkisi, proje yöneticisi tarafından alternatif arayışlarla değerlendirilebilir. Birçok kontrol edilebilir ve kontrol edilemeyen faktörlerin, örneğin çalışan becerileri, kaynak miktarı, beklenmedik hava koşulları veya coğrafi koşullar gibi, ortaya çıkarılabileceği değişkenlikler, yönetimin dikkate alabileceği farklı durumlar için farklı stratejik kararlarla değerlendirilebilir ve böylelikle projeler yönetilebilir olacaktır.

Bu çalışmada ayrıca, aynı standart sapma değerlerinde öngörülen α olasılık düzeyinin etkisi de incelenmiştir. α değeri düştükçe amaç fonksiyon değerinin (toplam gecikmenin) arttığı görülmektedir. Şans kısıtının sağlandığı

en küçük olasılık değerini gösteren $1-\alpha$ değeri, α değeri küçüldükçe büyümektedir. Bu durumda, ilgili şans kısıtının sağlanması daha katı hale gelmektedir. Bununla birlikte, kısıtın bozulmasına daha az izin verilmektedir ve projelerin tamamlanma süreleri buna bağlı olarak değişmektedir. Örneğin 1σ seviyesinde, α düzeyi 0.15'ten 0.05'e düşerken, 4. problemde toplam ağırlıklı gecikmelerin sırasıyla 29, 35 ve 42 zaman birimi olduğu görülmektedir.

Tablo 5. Standart sapma ve α düzeylerinin etkisi

Problem No	PSPLIB Proje No	α	Standart Sapma					
			1σ		3σ		6σ	
			Toplam Ağırlıklı Gecikme	İşlemci Zamanı (San.)	Toplam Ağırlıklı Gecikme	İşlemci Zamanı (San.)	Toplam Ağırlıklı Gecikme	İşlemci Zamanı (San.)
1	j102_2, j103_3, j103_4, j103_5, j103_6, j103_7	0,15	32	2694,87	69	2572,90	122	2864,99
		0,10	36	2921,07	84	2486,01	150	2929,75
		0,05	40	2715,30	95	2977,20	189	2313,85
2	j104_2, j104_3, j104_4, j103_5, j103_6, j103_7	0,15	31	2060,12	72	2030,25	127	2031,05
		0,10	40	2710,00	91	2679,13	167	2690,19
		0,05	44	2708,49	108	2712,37	192	2094,31
3	j104_5, j105_4, j104_8, j104_9, j103_6, j103_7	0,15	26	2698,68	54	2879,34	102	2275,81
		0,10	31	2797,67	70	2433,73	129	2737,79
		0,05	33	2634,66	83	2778,73	145	2608,41
4	j105_3, j104_3, j105_6, j103_5, j103_6, j103_7	0,15	29	2730,10	71	2406,22	128	2219,61
		0,10	35	2220,47	83	2427,09	163	2917,60
		0,05	42	2914,46	105	2542,75	214	2366,24
5	j102_2, j104_3, j105_6, j103_5, j103_6, j103_7	0,15	30	2397,43	64	2686,21	116	2259,17
		0,10	34	2849,15	75	2259,44	141	3011,26
		0,05	38	2985,47	95	2766,31	197	2896,88
6	j105_3, j107_2, j107_4, j107_6, j103_6, j103_7	0,15	34	2455,61	82	2297,51	154	2813,85
		0,10	40	2887,69	96	2362,12	184	2734,41
		0,05	47	2788,54	125	2281,83	244	2916,03
7	j107_2, j107_9, j107_4, j107_6, j108_7, j103_7	0,15	27	2322,24	72	2089,57	125	2253,82
		0,10	33	2412,97	84	2564,57	153	2164,26
		0,05	40	2558,32	107	2710,19	199	2942,73
8	j107_2, j107_9, j1010_2, j1010_5, j1010_6, j1010_10	0,15	30	2799,87	62	2376,14	114	2125,70
		0,10	34	2311,40	78	2752,34	141	2938,56
		0,05	39	2929,96	94	2147,66	173	2056,55
9	j102_2, j104_3, j1011_6, j1012_5, j103_6, j103_7	0,15	36	2939,38	81	2925,77	149	2462,87
		0,10	40	3001,50	96	2459,36	178	2022,56
		0,05	50	2363,70	116	2505,92	220	2705,50
10	j105_3, j107_2, j107_4, j107_6, j1012_6, j1012_9	0,15	30	2844,24	67	2660,90	122	2691,71
		0,10	35	2895,63	81	2904,96	152	2148,99
		0,05	41	2787,76	101	2378,69	187	2997,09
11	j1012_2, j107_9, j107_4, j1013_1, j108_7, j103_7	0,15	36	2827,82	74	2500,30	135	2906,92
		0,10	38	2511,15	92	2726,99	161	2544,95
		0,05	48	2499,18	108	2574,67	205	2086,81

12	<i>j</i> 107_2, <i>j</i> 107_9, <i>j</i> 1010_2, <i>j</i> 1010_5, <i>j</i> 1010_6, <i>j</i> 1010_10	0,15	31	2396,58	64	3013,95	111	2900,81
		0,10	34	2348,49	77	2139,08	136	2726,55
		0,05	39	2200,22	96	2206,43	169	2019,62
13	<i>j</i> 102_2, <i>j</i> 104_3, <i>j</i> 1011_6, <i>j</i> 1012_5, <i>j</i> 103_6, <i>j</i> 103_7	0,15	35	2220,04	79	2609,91	151	2468,93
		0,10	40	3018,39	95	2633,99	178	2468,26
		0,05	49	2356,77	112	2427,18	226	2826,27
14	<i>j</i> 105_3, <i>j</i> 107_2, <i>j</i> 107_4, <i>j</i> 107_6, <i>j</i> 1012_6, <i>j</i> 1012_9	0,15	33	2428,84	69	2881,34	120	2542,91
		0,10	37	2242,08	78	2341,81	149	2228,78
		0,05	43	2461,87	98	2293,41	184	2849,65
15	<i>j</i> 1012_2, <i>j</i> 107_9, <i>j</i> 107_4, <i>j</i> 1013_1, <i>j</i> 108_7, <i>j</i> 103_7	0,15	24	2476,44	56	2026,01	99	2911,58
		0,10	30	2601,23	68	2541,20	133	2063,23
		0,05	31	2154,31	82	2931,20	161	2801,10
16	<i>j</i> 1013_2, <i>j</i> 1013_3, <i>j</i> 1014_4, <i>j</i> 1014_5, <i>j</i> 1014_6, <i>j</i> 103_7	0,15	31	2879,43	75	2353,46	137	2206,04
		0,10	40	2492,18	87	2072,37	177	2362,56
		0,05	44	2631,62	111	2102,87	212	2297,69
17	<i>j</i> 1014_5, <i>j</i> 1014_4, <i>j</i> 1014_8, <i>j</i> 1014_9, <i>j</i> 103_6, <i>j</i> 103_7	0,15	25	2269,69	65	2680,09	117	2955,11
		0,10	34	2583,26	82	3006,77	154	2895,09
		0,05	36	2865,21	101	2217,11	183	2055,58
18	<i>j</i> 1035_3, <i>j</i> 1035_4, <i>j</i> 1035_6, <i>j</i> 1035_7, <i>j</i> 1035_8, <i>j</i> 103_7	0,15	30	2016,95	67	3003,78	131	2412,37
		0,10	36	2535,00	80	2397,66	152	2131,24
		0,05	39	2578,09	98	2967,35	203	2938,94
19	<i>j</i> 1035_2, <i>j</i> 1035_3, <i>j</i> 1035_6, <i>j</i> 1035_5, <i>j</i> 103_6, <i>j</i> 1036_1	0,15	25	2647,25	63	2112,92	104	2810,14
		0,10	32	2102,64	75	2406,36	132	2623,00
		0,05	31	2624,23	87	2105,06	166	2874,23
20	<i>j</i> 1036_3, <i>j</i> 1036_2, <i>j</i> 1036_4, <i>j</i> 1036_6, <i>j</i> 1036_7, <i>j</i> 1037_7	0,15	32	2706,61	81	3007,34	139	2796,21
		0,10	39	2883,13	92	2361,95	173	2511,58
		0,05	45	2846,06	113	2196,40	217	2236,79

Elde edilen bu sonuçlara göre, yüksek standart sapma ve düşük α düzeylerinde toplam gecikmenin arttığı görülmektedir. Buradan hareketle problemin farklı α değerleriyle çözümlenerek karar vericinin farklı durumları göz önünde bulundurması önerilmektedir.

5. Sonuç

Bu çalışmada KKÇMÇPÇP gerçekçi bir yaklaşımla, faaliyet sürelerinin stokastik olduğu durum için ele alınmıştır. Problem ŞKP modeli olarak formüle edilmiştir. Deneysel sonuçlar, bu çalışma için oluşturulan test problemlerinin çözümü ile elde edilmiştir. Test problemleri, her biri 12 faaliyetten oluşan 6 proje içermektedir. KKÇMÇPÇP, NP-zor bir problemdir. Bu nedenle, ŞKP modelinin çözebildiği, PSPLIB kütüphanesinde yer alan en yüksek faaliyet sayısına sahip projeler üzerinde test problemleri oluşturulmuş ve çözüm üretilmiştir. Bu problemlerde, faaliyet zamanları stokastik olarak ele alınmıştır.

Stokastik KKÇMÇPÇP'nin çözümü sonucunda, her projenin ayrı ayrı toplam ağırlıklı gecikmesi, her bir projeye ayrılmış yenilenebilir ve yenilenemez kaynak miktarları, her bir projeye ait faaliyetlerin hangi modda gerçekleştirileceği ve faaliyetlerin bitiş süreleri elde edilmektedir.

Önerilen modellerle ilgili sayısal analizler, tasarım parametreleri olan 3 farklı α düzeyi (0.15, 0.1, 0.05) ve üç farklı standart sapma (1σ , 3σ ve 6σ) kullanılarak yapılmıştır. Böylece problemin çözümünde kullanılan tasarım

parametrelerinin, amaç fonksiyon değeri olan toplam ağırlıklı gecikme ve çözüm süresi üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Sayısal analiz sonuçlarına göre faaliyet sürelerinin standart sapması değiştikçe ağırlıklı gecikme süreleri de farklılaşmaktadır. Standart sapmanın artması, faaliyet sürelerinin değişkenliğini arttırarak, ortalamadan daha büyük farklılıkların oluşmasına sebep olduğu için, projenin önceden belirlenen teslim tarihinden sapmasını arttırmaktadır. ŞKP da rasgele değişken içeren tüm kısıtlar belirli bir olasılığa sahiptir. Kısıtın sağlanma olasılığının, izin verilen en küçük değerini belirleyen α düzeyi küçüldükçe, $(1-\alpha)$ güven düzeyinden dolayı, kısıtın sağlanması koşulu daha katı hale gelmektedir. Bu da faaliyetlerin tamamlanma süresini ve bağlı olarak projenin tamamlanma süresini etkilemektedir. Buna göre, faaliyet sürelerinin standart sapması arttıkça veya α düzeyi azaldıkça ağırlıklı toplam gecikme değeri artmaktadır.

Çalışmada önerilen ŞKP modeli ile nispeten küçük boyutlu problemler çözülebildiği için bu araştırmanın devamında, büyük boyutlu KKÇMÇPÇP'leri makul bir sürede çözebilecek uygun bir meta sezgisel algoritmanın geliştirilmesi planlanmıştır.

Araştırmacıların Katkısı

Bu araştırmada; Serdar Soysal, literatür taraması, problemin ortaya konması, çözüm yönteminin önerilmesi, uygulanması ve makalenin oluşturulması konusunda, Berna Dengiz ve Kumru Didem Atalay is kavramsal çerçevenin oluşturulması, makalenin sunumu ve yazım kontrolünün yapıp düzenlenmesi konusunda katkıda bulunmuştur

Çıkar Çatışması

Yazarlar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

Kaynaklar

Ashtiani, B., Leus, R., & Aryanezhad, M-B. (2011). New competitive results for the stochastic resource-constrained project scheduling problem: Exploring the benefits of pre-processing. *Journal of Scheduling*, 14(2), 157-171. doi: <https://doi.org/10.1007/s10951-009-0143-7>

Atalay, K. D., ve Apaydın, A. (2011). Şans kısıtlı stokastik programlama problemlerinin deterministik eşitlikleri. *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 1(1), 1-18. Erişim adresi: <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/35689>

Beşikçi, U., Bilge, Ü., & Ulusoy, G. (2013). Resource dedication problem in a multi-project environment. *Flexible Services and Manufacturing Journal*, 25, 206–229. doi: <https://doi.org/10.1007/s10696-012-9140-9>

Beşikçi, U., Bilge, Ü., & Ulusoy, G. (2015). Multi-mode resource constrained multi-project scheduling and resource portfolio problem. *European Journal of Operational Research*, 240, 22–31. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.06.025>

Brucker, P., Drexl, A., Möhring, R., Neumann, K., & Pesch, E. (1999). Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models, and methods. *European Journal of Operational Research*, 112, 3–41. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00204-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00204-5)

Chakraborty, R. K., Sarker, R. A., & Essam, D. L. (2017). Resource constrained project scheduling with uncertain activity durations. *Computers and Industrial Engineering*, 112, 537-550. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.12.040>

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1959). Chance-constrained programming. *Management Science*, 6(1), 73–79. doi: <https://doi.org/10.1287/mnsc.6.1.73>

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Chance constraints and normal deviates. *The American Statistical Association Journal*, 57, 134–148. doi: <https://doi.org/10.2307/2282444>

- Golenko-Ginzburg, D., & Gonik, A. (1998). A heuristic for network project scheduling with random activity durations depending on the resource allocation. *International Journal on Production Economics*, 55, 149–162. doi: [https://doi.org/10.1016/S0925-5273\(98\)00044-9](https://doi.org/10.1016/S0925-5273(98)00044-9)
- Gonçalves, J. F., Mendes, J. J. M., & Resende, M. G. C. (2008). A genetic algorithm for the resource constrained multi-project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 189, 1171–1190. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.074>
- Herroelen, W., & Leus, R. (2015). Project scheduling under uncertainty: Survey and research potentials. *European Journal of Operational Research*, 165, 289–306. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.04.002>
- Ke, H., & Liu, B. (2005). Project scheduling problem with stochastic activity duration times. *Applied Mathematics and Computation*, 168(1), 342–353. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.09.002>
- Kolisch, R., Sprecher, A., & Drexel, A. (1995). Characterization and generation of a general class of resource constrained project scheduling problems. *Management Science*, 41(10), 1693–1703. doi: <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.10.1693>
- Kolisch, R., & Sprecher, A. (1997). PSPLIB—a project scheduling problem library. *European Journal of Operational Research*, 96, 205–216. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00170-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00170-1)
- Krüger, D., & Scholl, A. (2009). A heuristic solution framework for the resource constrained (multi-) project scheduling problem with sequence-dependent transfer times. *European Journal of Operational Research*, 197, 492–508. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.07.036>
- Kurtulus, I. S., & Narula, S. C. (1985). Multi-project scheduling: analysis of project performance. *IIE Transactions*, 17(1), 58–66. doi: <https://doi.org/10.1080/07408178508975272>
- Lawrence, S. R., & Morton, T. E. (1993). Resource-constrained multi-project scheduling with tardy costs: Comparing myopic, bottleneck and resource pricing heuristics. *European Journal of Operational Research*, 64, 168–187. doi: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(93\)90175-M](https://doi.org/10.1016/0377-2217(93)90175-M)
- Lova, A., Maroto, C., & Tormos, P. (2000). A multicriteria heuristic method to improve resource allocation in multiproject scheduling. *European Journal of Operational Research*, 127, 408–424. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00490-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00490-7)
- Payne, J. H. (1995). Management of multiple simultaneous projects: a state-of-the-art review. *International Journal of Project Management*, 13, 163–168. doi: [https://doi.org/10.1016/0263-7863\(94\)00019-9](https://doi.org/10.1016/0263-7863(94)00019-9)
- Pritsker, A. A. B., Waiters, L. J., & Wolfe, P. M. (1969). Multiproject scheduling with limited resources: a zero one programming approach. *Management Science*, 16, 93–108. Erişim adresi: <https://www.jstor.org/stable/2628369>
- Stork, F. (2000). Branch-and-bound algorithms for stochastic resource-constrained project scheduling. Erişim adresi: http://www.redaktion.tu-berlin.de/fileadmin/i26/download/AG_DiskAlg/FG_KombOptGraphAlg/preprints/2000/Report-702-2000.pdf
- Tsai, Y. W., & Gemmil, D. D. (1998). Using tabu search to schedule activities of stochastic resource-constrained projects. *European Journal of Operational Research*, 111, 129–141. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00311-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00311-1)
- Uysal, F., İşleyen, S. K., ve Çetinkaya, C. (2018). Resource constrained project scheduling with stochastic resources. *Journal of Applied Research on Industrial Engineering*, 5(1), 39–49. doi: <https://doi.org/10.22105/JARIE.2018.98906.1019>
- Wang, L., Huang, H., & Ke, H. (2015) Chance-constrained model for RCPSP with uncertain durations. *Journal of Uncertainty Analysis and Applications*, 3(12). doi: <https://doi.org/10.1186/s40467-015-0034-8>
- Yang, I-T., & Chang, C-Y. (2005). Stochastic resource-constrained scheduling for repetitive construction projects with uncertain supply of resources and funding. *International Journal of Project Management*, 23, 546–553.

doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijproman.2005.03.003>

Zhu, G., Bard, J. F., & Yu, G. (2006). A branch-and-cut procedure for the multimode resource-constrained project-scheduling problem. *Inform Journal on Computing*, 18(3), 377-390. doi: <https://doi.org/10.1287/ijoc.1040.0121>