Genelleştirilmiş Ortalama Fonksiyonu ve Bazı Önemli Eşitsizliklerin Öğretimi Üzerine

Gabil ADİLOV, Gültekin TINAZTEPE & Serap KEMALİ

Özet – Aritmetik ortalama , Geometrik ortalama , Harmonik ortalama, Kuvadratik ortalama ve bunlar arasındaki ilişkini veren eşitsizlikler, orta öğretim ve üniversite ders programlarında öğrenilen önemli konulardandır. Bu konunun öğretiminde eşiksizlikler tek tek ele alınır ve doğrulukları farklı yollarla kanıtlanır. Bu makalede, bu konunun öğretimi ile bağlı, farklı bir yol izlenilir. Bu ortalamalar, bir Ortalama Fonksiyonunun birer özel durumları olduğundan dolayı, adı geçen Ortalama Fonksiyonunun daha genel durumu olan Ağırlıklı Ortalama Fonksiyonu ele alınır. Bu fonksiyonun monotonluk özelliğine dayanarak ortalamalarla bağlı tüm bilinen eşitsizliklerin (bilinmeyen, çok sayıda diğer eşitsizliklerin de) doğruluğu gösterilir.
Anahtar kelimeler: Ağırlıklı ortalama fonksiyonu, aritmetik ortalama, geometrik ortalama, harmonik ortalama, kuvadratik ortalama, eşitsizlikler.

Abstract – On the Generalized Mean Function and Some Important Inequalities – The Arithmetic mean, Geometric mean, Harmonic mean, Quadratic mean and the inequalities among them are one of the important topics which are taught in secondary and higher education. In the teaching of this subject, the inequalities are considered one by one and its validity is proved via different methods. In this article, the different way related to teaching of this topic is presented. Since these means are the special cases of a Mean Function, this function (Weighted Mean Function which is more general Mean Function) is considered. By using the property of monotonicity of this function, the validity of all the known inequalities between the means (also a lot of the unknown inequalities between the means) can be shown.
Key words: Weighted mean function, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, quadratic mean, inequalities.

Giriş

Eşitsizlikler Teorisi matematiğin önemli alanlarından biridir. Diğer alanlarda, özellikle de Optimizasyon Teorisinde, geniş şekilde uygulanmaktadır. Örneğin, Adilov ve Tınaztepe'de (2002a, 2002b), bir çok geometrik eşitsizliklerin optimalleştirme problemlerine uygulamaları verilmiştir.

Aritmetik ortalama, Geometrik ortalama, Harmonik ortalama, ve Kuvadratik ortalama arasındaki ilişkini ifade eden eşitsizlikler, bu Teoride önemli yere sahiptirler.

Gabil Adilov, Prof. Dr., Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi, <gabil@mersin.edu.tr;> Gültekin Tınaztepe, Yrd. Doç. Dr., Akdeniz Üniversitesi TBMYO, <gilevgi@gmail.com>; Serap Kemali, Öğr. Gör. Dr., Akdeniz Üniversitesi TBMYO, <skemali@akdeniz.edu.tr>.

Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 5, Sayı 2, Aralık 2009, ss. 294-300.
Mersin University Journal of the Faculty of Education, Vol. 5, Issue 2, December 2009, pp. 294-300.

Önce, bu ortalamaları tanımlayalım.

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $x_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$A(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad G(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

$$H(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \qquad K(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

fonksiyonlarına, sırası ile, Aritmetik ortalama, Geometrik ortalama, Harmonik ortalama, ve Kuvadratik ortalama denir. Bu ortalamalar arasındaki ilişkiyi veren eşitsizlikler aşağıdaki gibidir:

$$H(x) \le G(x) \le A(x) \le K(x) \tag{1}$$

Bu eşitsizlikler zincirinin her halkası ayrı ele alınıp, farklı yollarla ispatlanır. Örneğin, $G(x) \le A(x)$ eşitsizliği $y = -\ln x$ fonksiyonunun konveksliyine dayanarak ispatlana bilir.

Bu makalede, önce

$$M_t(x) = \left(\frac{x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}}$$

şeklinde ifade edilen Ortalama Fonksiyonu ele alınır, $H(x), G(x), A(x), K(x)$ fonksiyonlarının, bu fonksiyonun özel durumları olduğu gösterilir. Daha sonra, Ortalama Fonksiyonunun genel durumu olan Ağırlıklı Ortalama Fonksiyonunun çok önemli bir özelliği ispatlanır. (1) eşitsizlikler zincirinin doğruluğu, bu özelliğin bir sonucu olduğu gösterilir.

Ortalama Fonksiyonu ve Aritmetik, Geometrik, Harmonik, Kuvadratik Ortalamalar

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $x_i > 0, i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere,

$$M_t(x)=\left(\frac{x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \tag{2}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, t. Dereceden Ortalama Fonksiyonu denir (Bekenbach ve Bellman, 1961).

t parametresinin özel seçilmiş değerleri için bu fonksiyonu inceleyelim.

Teorem 1. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$M_1(x)=A(x) \tag{3}$$

$$M_2(x)=K(x) \tag{4}$$

$$M_{-1}(x)=H(x) \tag{5}$$

$$M_0(x)=\lim_{x\to 0}M_t(x)=G(x) \tag{6}$$

$$M_{+\infty}(x)=\lim_{x\to+\infty}M_t(x)=\max\{x_1,x_2,...,x_n\} \tag{7}$$

$$M_{-\infty}(x)=\lim_{x\to-\infty}M_t(x)=\min\{x_1,x_2,...,x_n\} \tag{8}$$

İspat: (3), (4), (5) eşitliklerinin doğruluğu açıktır. (6)'yı ispatlayalım.

$$M_0(x)=\lim_{t\to 0}M_t(x)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{1}{t}\ln\frac{x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t}{n}}$$

L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$M_0(x)=\lim_{t\to 0}e^{\frac{n}{x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t}\frac{x_1^t\ln x_1+x_2^t\ln x_2+\cdots+x_n^t\ln x_n}{n}}=e^{\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}}=(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

Şimdi de (7)'yi ispatlayalım. $a=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olmak üzere

$$M_{+\infty}(x)=\lim_{t\to+\infty}M_t(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{x_1^t+x_2^t+\cdots+x_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}=$$

$$\lim_{t\to+\infty} a\left(\frac{\left(\frac{x_1}{a}\right)^t+\left(\frac{x_2}{a}\right)^t+\cdots+\left(\frac{x_n}{a}\right)^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}=a$$

Benzer şekilde (8) eşitliyi ispatlanır $\square$

Ağıtlıklı Ortalama Fonksiyonu ve Bir Önemli Özelliği

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$; $x_i>0, i=1,2,...,n$; $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\alpha_i\geq 0$, $i=1,2,...,n$ ve $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ olmak üzere,

$$M_t(x;\alpha)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\right)^{\frac{1}{t}} \tag{9}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Ağırlıklı Ortalama Fonksiyonu denir (Bekenbach ve Bellman, 1961).

Not. (2) Ortalama Fonksiyonu, bu fonksiyonun özel, eşit ağırlıklı, halidir. Yani, (9)'da α_i ağırlıklarının hepsi $\frac{1}{n}$'ye eşit alınırsa, (2) Ortalama Fonksiyonu elde edilir.

Bu fonksiyonun t parametresine bağlı bir özelliğini gösterelim.

Teorem 2. $M_t(x;\alpha)$ Ağırlıklı Ortalama Fonksiyonu t değişkenine göre artan fonksiyondur.

İspat: Her $t\in R$ için $\frac{\partial M_t}{\partial t}\geq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\frac{\partial M_t}{\partial t} = M_t \frac{1}{t^2}\left(\frac{t\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t \ln x_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t} - \ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t \right) =$$

$$\frac{M_t}{t^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t \ln x_i^t - \left(\ln\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t\right)\right]$$

Köşeli parantezin önündeki $\frac{M_t}{t^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^t}$ ifadesinin her $t \in R$ için pozitif olduğu açıktır.

Köşeli parantezin içindeki ifadenin pozitif olması, $f(y) = y\ln y$ fonksiyonunun $\left(0,\infty\right)$ aralığında konveks olduğundan ($f''(y) = \frac{1}{y} > 0,$ her $y > 0$ için) *İensen* eşitsizliğini (Rockafellar, 1970) kullanarak, kolayca gösterilebilir. Böylece, her $t \in R$ için $\frac{\partial M_t}{\partial t} \geq 0$ olur. Dolayısıyla, $M_t(x;\alpha)$ fonksiyonu t değişkeninin artan fonksiyonudur□

(1) eşitsizlik zincirini M_t fonksiyonunu kullanarak yazarsak, $M_{-1} \leq M_0 \leq M_1 \leq M_2$ şeklini alır. Bunun da doğruluğu Teorem 2'den çıkar. t parametresinin her hangi bir artan $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ dizisi alınırsa, bilinen ortalamalar dışındaki farklı ortalamalar için de eşitsizlikler zinciri elde edilebilir:

$$M_{t_1} \leq M_{t_2} \leq \cdots \leq M_{t_k} \tag{10}$$

Geometrik ortalama ve Aritmetik ortalamalar arasındaki farklı bir ilişki (istatistik anlamda), Adilov ve Tinaztepe (2005) 'de araştırılmış ve ilginç sonuçlar elde edilmişdir. Bu ortalamalarla bağlı daha farklı eşitsizlikler Adilov ve Tinaztepe (2009)'da incelenmişdir.

Sonuç

Çalışmada, matematiğin önemli konularından olan, orta öğretim ve üniversite ders programlarında yer alan Aritmetik ortalama, Geometrik ortalama, Harmonik ortalama, Kuvadratik ortalamalar ve bunlar arasındaki eşitsizliklerin öğretimi problemi ele alınır, incelenir ve aşağıdaki yolun izlenilmesi önerilir:

1) $M_t(x)$ Ortalama Fonksiyonu tanımlanır;
2) Aritmetik ortalama, Geometrik ortalama, Harmonik ortalama, Kuvadratik ortalama adı ile geçen, çok bilinen fonksiyonların, $M_t(x)$ Ortalama Fonksiyonunun t değişkeninin özel eğerlerindeki durumlara karşılık geldiği gösterilir (Teorem 1);
3) Daha genel fonksiyon olan, $M_t(x;\alpha)$ Ağırlıklı Ortalama Fonksiyonu tanımlanır ve $M_t(x)$ fonksiyonunun, bu fonksiyonun özel hali (eşit ağırlıklı hali, yani $i=\overline{1,n}$ için $\alpha_i = \frac{1}{n}$) olduğu gösterilir;
4) $M_t(x;\alpha)$ fonksiyonunun t değişkenine göre monoton artan özelliğine sahip olduğu gösterilir (Teorem 2);
5) (1) eşitsizlikler zincirinin doğruluğu, $M_t(x;\alpha)$ fonksiyonunun monotonluk özelliğinin bir sonucu olduğu gösterilir;
6) Bu özelliğe dayanarak, (10) şeklinde daha farklı eşitsizliklerin de elde edilebileceği gösterilir.

Eşitsizliklerin öğretiminde izlenen bu yolun sağladığı faydalar aşağıdaki gibi listelenebilir:

a) (1) eşitsizlikler zincirinin her halkasını ayrı-ayrı ele alıp, ispatlanmasına gerek yoktur. Teorem 1 ve Teorem 2 gibi iki teoremin ispatlanması yeterlidir;
b) Ortalamaların, aynı bir $M_t(x;\alpha)$ fonksiyonunun özel durumları olarak öğrenildiği için, aralarındaki ilişkinin daha açık şekilde anlaşılmasını ve öğreniminin daha kalıcı olmasını sağlar;
c) Konu anlatımı merkezine Genelleştirilmiş Ortalama Fonksiyonunun konulması, yalnız (1) şeklindeki eşitsizliklerin varlığı değil, $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ koşulunu sağlayan $t_1, t_2, \cdots, t_k$ değişkenlerine karşılık gelen her türlü ortalamalar arasında da benzer eşitsizliklerin varlığını ve doğruluğunu göstermeye olanak sağlar.

Kaynakça

Adilov, G.R.ve Tınaztepe, R. (2002a). Geometrik optimalleştirme problemleri üzerine I, *Matematik Dünyası*, Cilt 11, Sayı 4, 2-5.

Adilov, G.R.ve Tınaztepe, R. (2002b). Geometrik optimalleştirme problemleri üzerine II, *Matematik Dünyası*, Cilt 11, Sayı 5, 2-7.

Adilov, G.R. ve Tınaztepe, G. (2006). On the asymptotic aggregation problem of high dimensional systems, *Systems and Control Letters*, *55* (5), 414-417.

Adilov, G.R. ve Tınaztepe, G. (2009). The sharpening some inequalities via abstract convexity, *Mathematical Inequalities and Applications, 12*, 33-51.

Beckenbach, E. ve Bellman, R. (1961). *Inequalities*, Spinger-Verlag.

Rockafellar, R.T. (1970). *Convex analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.