ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ / ATATÜRK UNIVERSITY
KAZIM KARABEKİR EĞİTİM FAKÜLTESİ
Kazım Karabekir Faculty of Education
KÂZIM KARABEKİR EĞİTİM FAKÜLTESİ DERGİSİ
JOURNAL OF KÂZIM KARABEKİR EDUCATION FACULTY

Derleme
Doi: 10.33418/ataunikkefd.891101

MATEMATİKSEL AKIL YÜRÜTME BECERİSİNİ SINIFLANDIRMAYA YÖNELİK KAVRAMSAL BİR ÇERÇEVE*

A CONCEPTUAL FRAMEWORK FOR CLASSIFYING MATHEMATICAL REASONING SKILLS

Zeynep ÇİFTCİ
Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Erzurum, Türkiye
e-posta: zbayrakdar@atauni.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-3828-6230

Levent AKGÜN
Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Erzurum, Türkiye
e-posta: levakgun@atauni.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-1435-1771

Başvuru Tarihi: 04.03.2021 Yayına Kabul Tarihi: 08.10.2021 Yayınlanma Tarihi: 30.12.2021

Atıf/Citation: Çiftci, Z, & Akgün, L. (2021). Matematiksel akıl yürütme becerisini sınıflandırmaya yönelik kavramsal bir çerçeve. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 43*, 556-575. Doi: 10.33418/ataunikkefd.891101

Öz

Bireyler tarafından gerçekleştirilen düşünme süreçleri oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Matematiksel akıl yürütme de bir düşünme süreci olduğundan, bu süreci ve sonucunu net bir şekilde ortaya çıkarabilmek de oldukça zordur. Bu çalışmada, matematiksel akıl yürütme becerisine ait sınıflandırma ve bu sınıflandırmaya ulaşırken kullanılabilecek analiz yöntemi, Lithner (2006) tarafından ortaya konulan kavramsal çerçeve kapsamında açıklanmıştır. Bu kavramsal çerçeveye göre matematiksel akıl yürütme ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme, algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme ve yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme şeklinde üç farklı tür olarak sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin sergilemiş olduğu matematiksel akıl yürütme becerilerinin hangi türe ait olduğunu belirlemek için ise matematiksel derinlik, yüzeysellik, çeşitlilik gibi alt bileşenler oluşturulmuştur. Tüm alt bileşenler göz önünde tutularak öğrencinin sergilediği matematiksel akıl yürütme süreci derinlemesine incelenip, kavramsal çerçevede yer

*Bu çalışma birinci yazarın doktora tezinden üretilmiştir.

alan sorulara cevap aranmıştır. Oluşturulan bu kavramsal çerçeve, matematiksel akıl yürütme türünü daha hatasız bir şekilde belirlemeye yardım edeceğinden önemlidir. Ayrıca bu çalışmada, kavramsal çerçevenin okuyucular tarafından daha net bir şekilde anlaşılması amacıyla matematik öğretmenliği öğrencileri tarafından sergilenen matematiksel akıl yürütme süreçlerine yer verilerek analizler yapılmış ve bu analizlere bağlı matematiksel akıl yürütme türleri de beraberinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Matematik Eğitimi, Matematiksel Akıl Yürütme, Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Analizi, Matematiksel Akıl Yürütme Becerisi Türleri, Matematiksel Akıl Yürütme Süreci

Abstract

Thinking processes performed by individuals have a rather complicated structure. Since mathematical reasoning is also a process of thinking, it is very difficult to clearly demonstrate this process and its outcome. In this study, a classification of mathematical reasoning skills and the analysis method that can be used by the researcher while reaching this classification are explained within the conceptual framework introduced by Lithner (2006). According to this conceptual structure, mathematical reasoning is classified into three different types, namely mathematical reasoning based on memory, mathematical reasoning based on algorithm, and mathematical reasoning based on creativity. Sub-components such as mathematical depth, superficiality, and diversity were created to determine which type of mathematical reasoning skills students exhibit. By considering all sub-components, the mathematical reasoning process put forward by the individual was examined in depth and an answer was sought to answer the questions in the conceptual framework. This conceptual structure created is important as it will help determine the type of mathematical reasoning more accurately. Also, in order to understand the conceptual framework more clearly by the readers, the mathematical reasoning processes put forward by the students of mathematics teaching are included, and case studies and analysis processes are presented.

Keywords: Conceptual Framework, Mathematics Education, Mathematical Reasoning, Mathematical Reasoning Analysis, Types of Mathematical Reasoning Skills

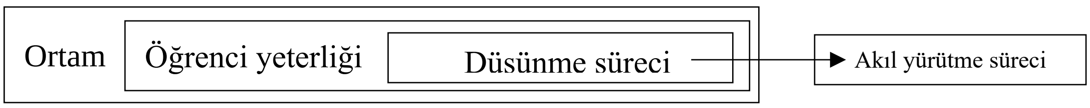
GİRİŞ

Bir düşünme yolu olan akıl yürütme, verilen görevde sonuca ulaşabilme veya bir iddia üretebilmeyi barındırır. Yani iki veya daha fazla olayı ilişkilendirirken ispat yollarını kullanarak bir sonuca ulaşmayı hedefler (Rizgi & Surya, 2017). Bir başka tanımlamada ise akıl yürütme, bir düşünme süreci, bu sürecin bir ürünü veya bunların her ikisi olarak nitelendirilmiştir (Lithner, 2008; Lithner, 2017; Norqvist vd., 2019). Akıl yürüten birey planlı, programlı ve mantıklı bir şekilde düşünüp, problemi "Neden" ve "Nasıl" soruları etrafında anlamlandırarak üst düzey düşünebilmektedir (Erdem, 2011). Akıl yürütmenin belirtilen bu özellikleri, matematik alanıyla doğrudan ilişkilidir. Çünkü matematik, bünyesinde barındırdığı geometri, cebir, olasılık, sayılar ve daha pek çok konuyu öğretirken; gerekçeli düşünme, örüntüler keşfetme, tahminde bulunma, akıl yürütme ve sonuca ulaşma gibi temel becerileri de öğretir (Umay, 2003). Epistemolojik açıdan bakıldığında, akıl yürütme matematiğin yapı taşıdır (Steen, 1999). Akıl yürütme, matematikte var olan kuralların ve işlemlerin öğrenilmesinde, her birey tarafından ihtiyaç duyulan temel bir öğedir (Erdem, 2015). Dolayısıyla matematiksel akıl yürütme, matematik eğitiminin hem araştırma hem de uygulama alanları için oldukça önemli bir konudur (Hjelte vd.,2020). Bireylerin matematiksel akıl yürütme yeteneklerinin ne yönde ilerlediğini belirlemek istiyorsak öncelikli olarak göze alacağımız durum, onların mevcut akıl yürütme yollarıyla olaylar arasındaki geçişleri ve bağlantıları nasıl kurduklarını keşfetmektir (Brodie, 2010). Oldukça karmaşık olan bu düşünce sistemi içerisinde yer alan matematiksel akıl yürütmelerin karakterize edilebilmesi, bu karmaşıklığı azaltacak uygun yolları bulmakla mümkündür (Lithner, 2006). Bu bağlamda çalışmanın amacı, matematiksel akıl yürütmeye ait bir sınıflandırmayı ve matematiksel akıl yürütme süreçlerine yönelik analiz yöntemini, Lithner (2006) tarafından ortaya konulan çerçeve doğrultusunda sunmaktır. Ayrıca çalışmada yer alan çerçeveye örnek olması amacıyla, üç matematik öğretmen adayı tarafından üç farklı problem durumu için sergilenen matematiksel akıl yürütme süreçleri, bu analiz çerçevesi kullanılarak analiz edilmiş ve sunulmuştur.

Matematiksel Akıl Yürütme Nedir?

Matematiksel akıl yürütme, matematiksel nesneleri kullanarak yine bu nesneler hakkında muhakeme yapabilmek şeklinde tanımlanabileceği (Brodie, 2010) gibi; problemlerin çözümünde formüle etme, varsayımlar oluşturarak test etme ve genellemeler yapma şeklinde matematiksel süreçlerin kullanılması olarak da tanımlanabilir (Mata-Pereira & da Ponte, 2017). Yani eldeki mevcut bilgilerden hareketle matematiğin tanım, sembol gibi kendine özgü araçlarını, tümdengelim ve tümevarım gibi düşünme tekniklerini kullanarak yeni bilgiler elde etme sürecidir (Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), 2013). Düşünebilme, yorum yapabilme gibi temel yeteneklere doğuştan sahip olan insanoğlu için, matematiksel akıl yürütme becerisini de bir temel yetenek olarak değerlendirmek mümkündür (Ball & Bass, 2003). Dolayısıyla matematiksel akıl yürütmenin sadece sayıların olduğu durumlarda değil, günlük yaşamın içinde de yer alabileceği sonucuna varılabilir (Yeşildere & Türnüklü, 2007). Bu yetenekler, uygun ortam ve stratejilerin oluşturulması halinde gelişebilir. Bahsi geçen bu uygun ortam ve stratejiler ise ilkokul, ortaokul ve liselerde kullanılan öğretim programları ile oluşturulur (Altıparmak & Öziş, 2005).

Lithner (2008), akıl yürütmeyi etkileyen faktörleri Şekil 1'de sunulduğu gibi şematize etmiştir. Belirtmiş olduğu bu yapıya göre bireyin ortaya koyduğu akıl yürütmeler, düşünme süreci, öğrenci yeterlilikleri ve içinde bulunduğu sosyokültürel ortam tarafından etkilenmektedir. Akıl yürütme türlerinin oluşumu, düşünme süreci ile şekillenir. Yani düşünme süreçleri, akıl yürütme türlerinin oluşturucusudur. Belirtilen bu gösterim ile düşünce ve akıl yürütmenin birbirlerine göre konumları da netleşmektedir. Etkileşimli ilerleyen bu yapıda yer alan düşünme süreçleri de öğrencinin sahip olduğu yeterlikler ışığında kendini göstermektedir. Öğrenci yeterliği ise sürekli etkileşim içerisinde bulunduğu sosyokültürel çevre ile şekillenir. Birbiri içine geçmiş şekilde meydana gelen bu girift yapı, ortaya çıkan akıl yürütmelerin alt yapısını oluşturmaktadır.



Şekil 1. Akıl yürütmeleri etkileyen faktörler (Lithner, 2008'den alınmıştır)

Matematiksel Akıl Yürütme Türleri ve Sınıflandırılması

Matematiksel akıl yürütme ile ilgili literatürde birçok sınıflandırma mevcuttur. Bazı sınıflandırmalar, araştırma aracı olarak tasarlandığından oldukça genel bir çerçevede; bazı sınıflandırmalar ise akıl yürütme süreçlerini aşamalara ayırıp bu aşamalarda oluşturulduğundan daha dar bir çerçevededir (Asiala vd., 1997; National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000; Pirie & Kieren, 1999; Schoenfeld, 1985; Sfard, 1991; Skemp, 1978). Ancak öğrencinin akıl yürütmesinin altında yatan anlayışı sınıflandırırken, analitik araçlar kullanan ve akıl yürütmenin kendisini karakterize etmeyi amaçlayan sınıflandırma yapısı oldukça azdır. Lithner (2006), matematiksel akıl yürütmeleri sınıflandırırken, akıl yürütmelere yönelik farklı boyutları göz önünde tutan bir analiz çerçevesi oluşturmuştur. Birçok bilimsel çalışma neticesinde belirlenen (Lithner, 2000a, 2000b, 2003, 2006, 2008) bu farklı boyutlar, matematiksel akıl yürütmenin karakterizasyonu için önemlidir.

Lithner (2006), matematiksel akıl yürütme becerisini, üç tür olarak sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırmaya ait türlere ve özelliklerine aşağıda yer verilmiştir.

1. Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Memorised Reasoning (MR)): Problem çözme sürecinde yer alan matematiksel akıl yürütmeler aşağıdaki iki şartı sağlıyor ise bu matematiksel akıl yürütmeler ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme türü olarak sınıflandırılır.

- Strateji seçimi, hafızadaki bir cevap üzerinden hatırlanarak bulunur.
- Stratejinin uygulanması, sadece yazmayı içerir. Öğrenci, çözümün tüm aşamalarını hatırlar ancak bunların anlamını bilmez (Lithner, 2006).

Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme de öğrenci bir problemle karşılaşınca bu sorunun çözümünü önceki öğrenme tecrübelerinden, derslerinden ya da ders kitabından hatırlayarak birebir uygular. Süreçte kendi bilgi birikiminden herhangi bir katkı ya da yorum yapmaz. Bu sınıflandırma türünün seçilmesine etken olan durumlar öğrencinin inançları, kavram imajları, gerçeğe karşı duyulan endişe ve öğrenme çevresinden edindiği tecrübelerdir (Lithner, 2006).

2. Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Algorithmic Reasoning (AR)): Algoritma, belli bir problemi çözerken takip edilecek kurallar bütünüdür. Matematiksel olarak düşünüldüğünde ise art arda gelen tüm iyi tanımlı prosedürlerdir. Problem çözme sürecinde yer alan matematiksel akıl yürütmeler aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu matematiksel akıl yürütmeler algoritmaya dayalı akıl yürütme türü olarak sınıflandırılır.

- Strateji seçimi, yine hafıza da var olan cevap üzerinden hatırlanır. Ancak ezbere dayalı matematiksel akıl yürütmede olduğu gibi çözümün tüm detayları hatırlanmaz. Kurallar seti, doğru sonuca götürür. Yeni bir çözüm yolu üretilmez.
- Kural verildiğinde ya da hatırlandığında stratejinin geri kalanı akıl yürüten için önemli değildir. Sadece dikkatsizlikten kaynaklanan hatalar sonuca ulaşmaya engel olur (Lithner, 2006).

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme de öğrenci bu sorunun çözüm yolundaki adımları hatırlar, sonrasında bu adımları birebir uygular ve sonuca ulaşır. Adımlarda umulmadık hiçbir durum olmaz. Yeni bir bilgi, yeni bir karar, yeni bir yorum ya da onlara dayandırılan yeni bir anlam olmaz. Öğrenci, uyguladığı algoritmanın kavramsal kısmıyla ilgilenmez. Örneğin, 3. Dereceden bir polinomun türevini alıp; türev konusunda herhangi bir kavramsal açıklamada bulunmama bu türe örnek verilebilir (Lithner, 2006).

Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme kendi içinde üç alt kategoriye ayrılır. Kullanılan algoritmanın elde ediliş şekli bu kategorilerin oluşturulmasına zemin hazırlamıştır. Bu alt kategoriler; Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning), Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning), Rehber Algoritmaya Dayalı

Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning) şeklindedir. Rehber algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme de kendi içerisinde Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning) ve Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning) olarak iki alt kategoriye ayrılır (Lithner, 2006).

- ❖ ***Bilinen Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Familiar Algorithmic Reasoning (FAR)):*** Ortaya konulan matematiksel akıl yürütmenin bu sınıflandırmaya ait olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekmektedir:

- ✓ Strateji seçiminde, soruda yer alan benzer bir noktadan hareket edilerek bilinen bir algoritma seçilir.
- ✓ Seçilen algoritma uygulanır (Lithner, 2006).

İfade edilen benzerlik, problemde geçen bir kelime, grafiksel ya da sembolik bir ifadedir. Örneğin, öğrenci problemde yer alan "en fazla" ifadesi ile "bu soruda maksimum minimum problemlerinde yapılan işlemler kullanılacak" şeklinde bir düşünce ile strateji seçimini yapar ve gerekli algoritmayı uygular (Lithner, 2006).

- ❖ ***Sınırlandırılmış Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Delimiting Algorithmic Reasoning (DAR)):*** Ortaya konulan matematiksel akıl yürütmenin bu sınıflandırmaya ait olabilmesi için aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekmektedir:

  - ✓ Strateji seçiminde kullanılan algoritma, yüzeysel özellikler dikkate alınarak oluşturulmuş bir algoritma kümesinin içerisinden seçilir.
  - ✓ Stratejinin uygulanmasında, seçilen algoritma ile doğru sonuca ulaşılamazsa; algoritma kümesi içerisindeki bir başka algoritma ile yola devam edilir (Lithner, 2006).

Problem türüne yönelik öğrencinin zihninde hatırlanan tüm algoritmalar herhangi bir kavramsal düşünce ortaya konulmadan tek tek uygulanır. Amaç algoritmanın uygunluğu değil bir cevabın elde edilmesidir (Lithner, 2006).

- ❖ ***Rehber Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Guided Algorithmic Reasoning (GAR)):*** Rehber algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme türü sergilenirken kullanılacak algoritmalar, öğrencinin kendi öğrenme yaşantıları neticesiyle edinilmiş algoritmalar değildir. Bu algoritmalar, öğrencinin kendisinden bağımsız olan bir rehber vasıtasıyla elde edilir. Rehberin türüne göre de iki farklı alt kategoriye ayrılır.

  - ✓ ***Kişi Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Person Guided Algorithmic Reasoning (Person-GAR)):*** Rehber seçimi, bir kişi ise ve probleme yönelik strateji seçimi bu kişi vasıtasıyla yapılıyor ayrıca çözen kişide herhangi bir tartışma ortamı oluşturmadan stratejiyi uygulanıp sonuca ulaşıyorsa, bu türe ait bir akıl yürütme gerçekleşmiştir (Lithner, 2006).
  - ✓ ***Doküman Rehberliğinde Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Text Guided Algorithmic Reasoning (Text-GAR)):*** Rehber, teorem, örnek soru, diyagram ya da kuralı barındıran yazılı bir doküman ise ve bu doküman aracılığıyla strateji seçimi yapılarak herhangi bir tartışma ortamı

oluşturulmadan, strateji uygulanıp sonuca ulaşıyorsa bu türe ait bir matematiksel akıl yürütme gerçekleşmiştir (Lithner, 2006).

3. Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme (Creative Reasoning (CR)): Yaratıcılık yeni bir şeyi üretmek için hayal etme ve yeteneği kullanmayı içerir. Problem hakkında yeni bir yol düşünmedir. Problem çözme sürecinde yer alan matematiksel akıl yürütmeler aşağıdaki şartları sağlıyorsa yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme yapılmaktadır:

- Çözüm için hatırlanan yol değil, yeni bir yol bulunmalıdır.
- Stratejinin seçiminde ve uygulanmasında akıl yürütmeler tartışmalar ile desteklenmelidir (Lithner, 2006).

Problem durumuyla karşılaşan öğrenci çözüme yönelik önceki öğrenme tecrübelerinden, soruda yer alan benzer ifadelerden yararlanmadan sadece kavramsal bilgi temelini ve düşünce gücünü kullanarak bir çözüme ulaşır. Burada çözümün kesin doğru olması önemli değildir. İzlenen yolun matematiksel temellere uygunluğu önemlidir. Öğrenci kullandığı kavramların derinlemesine özelliklerini açıklayabilmeli; uyguladığı adımları neye dayanarak attığını belirtebilmelidir (Lithner, 2006).

Matematiksel Akıl Yürütme Türünü Belirlemeye Yönelik Analiz Yöntemi

Matematiksel akıl yürütme türleri tanımlandıktan sonra, öğrencilerin sergiledikleri düşünme süreçlerinde bu türlerden hangisini kullandıklarını belirlemek için bir analiz süreci gerekmektedir. Bu analiz sürecinde dokümanlar üzerine uygulanan betimsel analiz süreci ile araştırmaya katılan öğrencinin o problem için ortaya koyduğu matematiksel akıl yürütme becerisi türü belirlenmeye çalışılır. Bunun için ilk etapta yazıya dökülmüş olan görüşme ile öğrencinin o problemi çözerken kullandığı çalışma kâğıdı karşılaştırmalı olarak araştırmacı tarafından birkaç kez okunur. Sonrasında öğrencinin sergilemiş olduğu bu düşünceler ışığında, Lithner (2006) tarafından betimsel analiz için belirlenen dört soruya cevap aranır. Bu dört soru görüşme verileri yardımı ile araştırmacı tarafından ayrıntılı şekilde cevaplanır. Cevaplanan sorular neticesinde, öğrencinin o problem için sergilemiş olduğu matematiksel akıl yürütme becerisi türü net bir şekilde kendini gösterir. Daha sonra da bu akıl yürütme becerisi türü sürecin tüm özelliklerini yansıtan sınıflandırma kodlarıyla kodlanır. Bu kodlama sistemi, akıl yürütme sürecini özet bir şekilde sunmaya fırsat vermektedir. Dokümanlar üzerinden cevabı aranan dört sorunun neler olduğu ve bu sorularda geçen kavramların ifade ettiği anlamlar aşağıda sunulmuştur.

- Soru 1: Sergilenen matematiksel akıl yürütme sürecinin içerdiği farklı bileşen çeşitleri nelerdir?
- Soru 2: Belirlenen bileşenlerin barındırdığı, matematiksel açıdan anlamlı olan veya olmayan özellikler nelerdir?
- Soru 3: Araştırılan bu süreçte yer alan düşük ve yüksek seviyedeki matematiksel akıl yürütme türleri nelerdir?
- Soru 4: Araştırılan bu muhakeme durumu çalışmasında yaşanılan gelişimin ya da güçlüğün altında yatan ana sebepler nelerdir? (Lithner, 2006)

Örnek analizler yapılırken bu sorulara verilen cevaplar S1, S2, S3 ve S4 şeklinde numaralandırılarak sunulmuştur. Belirtilen bu sorularda 'bileşen' ve 'bileşenlerin özellikleri' kavramları yer almaktadır. Lithner (2006)'in bu kavramlar ve çeşitleri için yapmış olduğu açıklamalar şöyledir:

Bileşen (Component): Akıl yürütme sürecinin temel birimlerini oluşturan çatı ifadedir. Üç farklı bileşen mevcuttur. Bunlar nesne, dönüşüm ve kavramdır.

- ❖ *Nesne (Object):* En temel birimdir. Bir kişinin yaptığı şey ya da yapılan bir şeyin sonucudur. Örneğin, sayılar, fonksiyonlar, grafikler, diyagramlar…
- ❖ *Dönüşüm (Transformasyon):* Bir nesnenin başka bir nesneye dönüşme olayıdır. Örneğin, temel aritmetik işlemlerinin reel sayılara uygulanması bir dönüşümdür.
- ❖ *Kavram (Concept):* Nesneler, dönüşümler ve onların özellikleri üzerine inşa edilmiş olan matematiksel fikirlerdir. Fonksiyon kavramı, sonsuzluk kavramı örnek olarak verilebilir. Kavram ifadesinin sınırları kesin olarak çizilemese de temelde ortak bir anlayışı sağlamak esastır (Lithner, 2006).

Bir bileşenin sahip olduğu nesne, dönüşüm ve kavram ifadeleri matematikçiler tarafından kabul edilebilir doğrulukta ise bu bileşen, kabul edilebilir bileşen (accepted component) olarak adlandırılır. Bunun yanında bir de gerçek yaşamla ilgili olan ifadeler gerçek yaşam bileşeni (real world component) olarak adlandırılır.

Bileşenlerin özellikleri (Property): Belirtilen bileşenlerin matematiksel açıdan durumlarını ifade eden yapıdır. Alt kategorileri ise şöyledir:

- ❖ *Kabul edilebilir özellik (Accepted property):* Bir bileşen özelliğinin bu kategoride olması için kabul gören matematiksel gerçeklere dayalı olması gerekir. Örneğin tabanları aynı olan iki üslü sayının çarpımında üsler toplanır. Bu bir kabul edilebilir bileşen özelliğidir.
- ❖ *Modelleme Özelliği (Modelling property):* Gerçek yaşamdaki bir problemin matematiksel dünyaya aktarılarak çözüm bulunabilmesidir. Bu aktarım üç aşamada yapılır. Birincisi, gerçek yaşam problemi sunulur ve bu problem pür matematik dünyasına transfer edilir. İkincisi, problem matematiksel yöntemlerle çözülür. Üçüncüsü ise, sonuç tekrar gerçek yaşama çevrilir ve yorumlanır. 1. ve 3. safhalarda gerçekleştirilen dönüşümdür. 1. safhada girenler ile 3. safhada çıkanlar kabul edilebilir bileşen (accepted component) değil gerçek yaşam bileşenidir (real world component).
- ❖ *Matematiksel Özellik (Mathematical property):* Bir özelliğin matematiksel özellik olabilmesi için kabul edilebilir özellik (accepted property) ya da modelleme özelliği (modelling property) olması gerekir.
- ❖ *Yüzeysel ve derinlemesine özellik (Surface and intrinsic property):* Derinlemesine özellik problem çözme sürecindeki belli bir durumun bileşenlerinin merkezidir. Yani konunun özüne hâkim olan düşünce yapısını içerir. Yüzeysel özellik ise bu durumla çok az ilişkilidir veya hiç değildir. Yani problem çözme sürecine hâkim olmayan düşünce yapılarını içerir (Lithner, 2006).

Analiz sürecinde, belirtilen dört soru ve o sorulardaki alt kavramlar kullanılarak matematiksel akıl yürütme becerisi türlerine ulaşılmaya çalışılmaktadır. Birinci soru ile öğrencinin ortaya koyduğu düşünce yapısını bölümlere ya da bileşenlere ayırmak amaçlanmaktadır. Böylece içinde bulunulan karışık tablo sadeleştirilmeye çalışılmaktadır. İkinci soru ile bölümlere ayrılıp sadeleşen bu tablodaki bileşenler tek tek ele alınarak bunların matematiksel özellik taşıyıp taşımadıklarını; yüzeysel veya derinlemesine düşünce yapısı barındırıp barındırmadıklarını incelemek amaçlanmaktadır. Uygun bileşenleri ve onların özelliklerini belirlerken asıl hedeflenen durum ise akıl yürütme türünü yakalayabilmektir. Birinci ve ikinci soruda belirlenen bileşenler ve bileşenlerin özellikleri ışığında mevcut akıl yürütme becerisi türü şekillenmeye başlamaktadır. Üçüncü soru ile öğrencinin sunmuş olduğu bu tablodaki düşük ve yüksek seviyedeki matematiksel akıl yürütmelere dikkat çekilir. Bileşenlerdeki özellikler de göz önünde bulundurularak bu tablonun genel resminin ortaya çıkması sağlanır. Ortaya konulan akıl yürütmenin belirtilen matematiksel akıl yürütme becerisi türlerinden hangisiyle uyum gösterdiği açıklanır. Dördüncü soruda ise bu tablonun altında yatan nedenlere odaklanılır. Öğrencinin görüşme sürecinde kullandığı ifadelerden ve görüşme sürecindeki tavrından hareketle böyle bir akıl yürütme sürecini ortaya koyma nedenleri belirlenmeye çalışılır.

Analiz süreci sonunda da yine Lithner (2006) tarafından sınırları çizilen sınıflandırma kodları kullanılarak, tüm matematiksel akıl yürütme süreçleri için birer kod oluşturulur. Bu kodlama sistemi, analiz sürecinde ayrıntılı bir şekilde anlatılan tüm bilgilerin okuyucu tarafından birkaç simgeyle anlaşılmasına fırsat vermektedir. Belirtilen bu kodlama sistemi, analiz sonucu elde edilen matematiksel akıl yürütme becerisi türünü ve üç farklı bilgiyi barındırmaktadır. Bu bilgiler ise şu şekildedir:

- *Doğruluk (Correctness):* Verilerin MR, AR veya CR olarak sınıflandırılmasından sonra yapılan akıl yürütmenin tam doğru olarak yapılıp yapılmadığını belirtmede kullanılan kategoridir. Bu açıdan bakıldığında yapılan akıl yürütme ile ulaşılan sonuç doğru ise d, yanlış ise y; ne tam doğru ne de tam yanlış yani olası ise o; eğer bu durumların üçü de mevcut değilse veya herhangi bir sonuç yoksa x (belirsiz) olarak kodlama yapılır.
- *Çeşitlilik (Range):* Çözülmeye çalışılan bir problemde, farklı akıl yürütme türleri bir arada bulunabilir. Örneğin yapılan akıl yürütmenin bir kısmı MR'nin özelliklerini gösterirken diğer kısmı AR'nin özelliklerini gösterebilir. Bu durumda akıl yürütmenin türü AR olarak kodlanır. Akıl yürütmeler bu açıdan sınıflandırılırken lokal (l, **l**ocal) ya da **g**lobal (g, global) terimleri ile adlandırılır. Eğer tek bir akıl yürütme türü hakim ise g (global), birden fazla tür mevcut ise l (lokal) bu durumların ikisi de mevcut değilse x (belirsiz) olarak kodlama yapılır.
- *Matematiksel esaslar (Mathematical foundation):* Çözüm oluşturulurken, matematiksel açıdan yüzeysel (**s**urface) ya da derinlikli (**i**ntrinsic) özelliklerden hangisinin dikkate alınarak bir akıl yürütme yapıldığını gösterir. Yüzeysel ise y, derinlikli ise d, bu durumların ikisi de mevcut değilse x (belirsiz) olarak kodlama yapılır (Lithner, 2006).

Sınıflandırma yapılırken akıl yürütmelerin bu özellikleri de dikkate alınarak kodlamalar gerçekleştirilir ve bu kod AR_{xxx} şeklinde ifade edilir. Burada AR, üzerinde çalışılan durum için belirlenen matematiksel akıl yürütme türünü; alt kategorilerdeki birinci x, akıl yürütme ile doğru bir sonuca ulaşıldığını; ikinci x, akıl yürütme türü çeşitliliğini; üçüncü x ise akıl yürütmenin matematiksel temellerini gösterir. Veriler için kullanılan sınıflandırma kodlamasına bir örnek verelim. Yapılan akıl yürütme incelenmiş AR_{dgx} şeklinde bir kod verilmiş olsun. Bu kodun anlamı şudur: öğrencinin yaptığı akıl yürütme temel akıl yürütme türlerinden algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Bunun yanında sırasıyla verilen alt kodlara bakıldığında, doğruluk kategorisinde d kodu ile doğru bir sonuca ulaşıldığı; çeşitlilik kategorisinde g kodu ile sadece algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütmenin özelliklerini sergilediği; matematiksel temeller kategorisindeki x kodu ile de belirsiz bir durumun mevcut olduğu anlaşılmaktadır. Bunun anlamı ise yüzeysel veya derinlikli bir düşünce sergilediği noktasında kesin ayrımın yapılamadığıdır. (Lithner, 2006).

Açıklanan matematiksel akıl yürütme becerisi türleri ve analiz yöntemini kapsayan örnek durumlar aşağıda sunulmuştur. Bu örnek durumlarda öncelikle problem durumu, ardından öğrenciyle yapılan mülakat sürecinin yazılı formuna ve öğrencinin yazdıklarına yer verilmiştir. Veriler ışığında yapılan analizin ardından sınıflandırma kodu sunulmuştur. Sonuçların geçerliği ve güvenirliği için tüm sürecin ayrıntılı şekilde aktarımına özen gösterilmiştir.

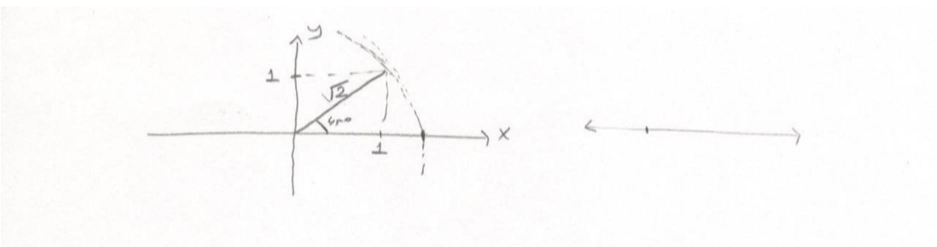
Matematiksel Akıl Yürütme Becerisinin Sınıflandırılması ve Analizine Yönelik Uygulama Örnekleri

Bu bölümde, her bir matematiksel akıl yürütmenin türüne yönelik, matematiksel akıl yürütme süreci ve analizi örneğine yer verilmiştir. Böylece çalışmamızda açıklanan sınıflandırma ve analiz yönteminin daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır. Matematiksel akıl yürütme süreçleri oluşturulurken, üç farklı matematik öğretmen adayına matematikle alakalı birer problem durumu yöneltilerek çözüme ulaşmaları istenmiştir. Çözüm süreci sesli düşünme ile gerçekleştirilerek ses kaydı alınmıştır. Bu ses kayıtları transkript edilerek matematiksel akıl yürütmeye yönelik sunulan çerçeveye uygun olarak analiz edilmiştir. Böylece öğretmen adaylarının ortaya koyduğu matematiksel akıl yürütme türü de belirlenmiştir.

Ezbere Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme İle İlgili Örnek Durum

Problem: **“**$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki kesin yerini çizerek gösteriniz. **“**

Leyla’nın probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu: Leyla’nın probleme yönelik çalışma kâğıdı (Şekil 2), klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 2. Leyla’nın probleme ait çalışma kağıdı

Leyla'nın probleme ait klinik mülakat transkripti:

<u>Leyla</u>**:** *Evet yine bu soru.*
<u>Araştırmacı</u>**:** *Biliyor musun bu soruyu?*
<u>Leyla:</u> *Bu soruya kavram yanılgıları dersinde bakmıştık da. Şöyle x ekseni ile y ekseninden 1 br olan aralığı seçip, şuranın değeri hani kareleri toplamından $\sqrt{2}$ olur. Bunu da işte aralık olarak şöyle şu şekilde yapıp şuraya gelen kısmını…*
<u>Araştırmacı:</u> *Ne çiziyorsun öyle?*
<u>Leyla:</u> *Yani yay çizerek o açıyı x eksenine, şurası 45°'lik bir açı olur. Bu açıyı x eksenine yerleştirerek hani buradaki karşılığına gelen değer $\sqrt{2}$'nin değeri oluyordu.*
<u>Araştırmacı</u>**:** *Peki bu dersten önce bunu sorsaydım nasıl ulaşırdın sonuca?*
<u>Leyla</u>**:** *Iı… Bu dersten önce de Konya'da böyle bir soru sorulmuştu hani öyle hatırlıyorum ama, onun dışında böyle bir şey düşünebilir miydim bilmiyorum. Yani zannetmiyorum.*
<u>Araştırmacı:</u> *Neden peki?*
<u>Leyla</u>**:** *Yani aslında şöyle mesela $\sqrt{2}$'nin tam bir reel sonucunu bulamadığımız için doğal sayılarda mesela sayı doğrusunda yerine yerleştirebilmek için tam olarak orayı kavrayamadığımızdan, hangi sayıyla hangi sayı arasında olduğunu kavrayabiliyoruz ama onun tam olarak değerini bilmediğimiz için yerleştirmek anca yaklaşık olarak yerleştirebilirdik. Yani karesi hangi sayıdan küçük hangi sayıdan büyük diye onun için 1 ile 2 arasında bir değer olabilirdi.*
<u>Araştırmacı:</u> *Tamam Leyla.*

Leyla'nın probleme ait matematiksel akıl yürütme analizi:

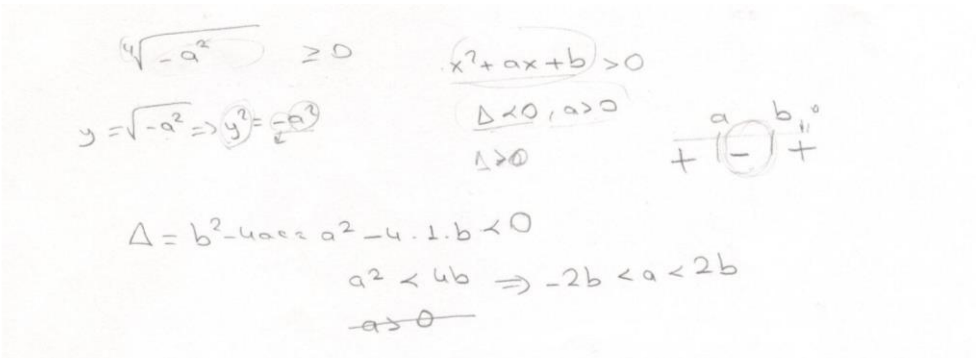
S1: Leyla'nın akıl yürütme sürecinde: i) Çözüm prosedürü ii) Koordinat düzlemi, koordinat düzlemi üzerindeki dik üçgen (nesne) bileşenlerinden oluşmaktadır.
S2: Leyla soruyu okur okumaz, önceki öğrenme çevresinden bu soruyu hatırladığını belirtmiştir. Bu aşamadan sonra onu sonuca götürecek çözüm prosedürünü birebir uygulamıştır. Koordinat sistemini çizmiş üzerine dik üçgeni yerleştirmiş ve uzunluğu $\sqrt{2}$ birim olan hipotenüsü sayı doğrusu üzerine taşımıştır. Uyguladığı çözüm prosedürü ve bu prosedürde kullandığı nesneler matematiksel olarak anlamlıdır. Ancak derinlemesine düşünce yapısı kullanarak, herhangi bir tartışma ortamı oluşturmamıştır.
S3: Benzer soruyu, hem şu an devam ettiği lisans programından hem de bundan önceki lisans programından hatırlayan Leyla, çözüm basamaklarını birebir takip ederek sonuca ulaşmıştır. Herhangi bir yorumda bulunmamış, kendi matematik bilgisinden bir düşünce sunmamıştır. Bu durumda akıl yürütme becerisi türü tipik bir MR örneğidir.
S4: Leyla $\sqrt{2}$ nin kesin yerini önceki yaşantılarından hatırlayarak matematiksel olarak derinlemesine bir tartışma ortamı sunmadan ulaşmıştır. Araştırmacının, "*Bunları hatırlamasaydın sen sonuca nasıl ulaşırdın?*" sorusu karşısında ise Leyla herhangi bir şey düşünemeyeceğini belirtmiştir. Yani bu noktada kendi bilgisine ve bu bilgileri bütüncül olarak düşünebileceğine dair bir güvensizliğin varlığından bahsedilebilir. Bunun nedeni olarak da özellikle irrasyonel sayılar konusunda oluşmuş ya da oluşturulmuş kavram imajlarını gösterebiliriz. Çünkü Leyla irrasyonel sayıları doğal sayılar gibi kavrayamadıklarını belirtmiştir. Sorunun cevabı noktasında sadece$\sqrt{2}$'nin tahmin yoluyla yerini söyleyebileceğini dile getirmiştir. Tüm bu durumlar Leyla'nın akıl yürütürken ezbere yönelmesinin ve derinlemesine fikirler sunmada yaşadığı zorlukların sebepleri olarak gösterilebilir.

Leyla'nın probleme ait sınıflandırma kodu: Leyla'nın Probleme ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{MR_{dgy}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü MR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak yüzeysel bir düşünce tarzı sergilediğinden y (yüzeysel) olarak gösterilmiştir.

Algoritmaya Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme İle İlgili Örnek Durum

Problem**:** " $y = \sqrt[4]{x^2 + ax + b}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesinin gerçek sayılar kümesi olabilmesi için a değerinin nasıl seçilmesi gerektiğini belirleyiniz"

Aylin'in Probleme Ait Matematiksel Akıl Yürütme Durumu: Aylin'in probleme yönelik çalışma kâğıdı (Şekil 3), klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 3. Aylin'in probleme ait çalışma kağıdı

Aylin'in probleme ait klinik mülakat transkripti:

<u>*Araştırmacı:*</u> *Evet Aylin sesli düşünerek soruyu çözmeni istiyorum.*
<u>*Aylin:*</u> *Bu karekök ifadesi çift katlı yani 4. dereceden çift bir derece. Dolayısıyla içerisinin ≥ 0 olması gerekiyor.*
<u>*Araştırmacı*</u>***:*** *Neden?*
<u>*Aylin*</u>***:*** *Çünkü kökün içi negatif olamaz çift katlılarda. Bunu şöyle düşünebiliriz yani $-a$ olsa $\sqrt[4]{-a^2}$ diye bir şey olmaz yani eşiti. Bunu nasıl açıklayayım ıı*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Negatif olunca ne oluyor?*
<u>*Aylin:*</u> *Eksi olunca tanımsız oluyor. hani nasıl tanımsız oluyorsa mesela $y = \sqrt{-a^2}$ desek karelerini alsak $y^2 = -a^2$ gibi bir şey olur ki y'nin karesi hiçbir zaman negatif olmaz. Buda pozitif bu da pozitif ama buradaki işaret negatif olmuş oluyor. bu mümkün olmuyor. Dolayısıyla içinin ≥ 0 olması gerekiyor. Diyor ki en geniş tanım kümesinin reel sayı yani gerçel sayılar kümesi olması için a değerinin nasıl seçilmesi gerekiyor. Bu ifadenin reel sayılar olabilmesi için bence burada $\Delta < 0$ olması gerekiyor.*
<u>*Araştırmacı:*</u> *Neden?*

Aylin: *Şey çünkü* $\Delta < 0$ *olursa şuradaki a'nın da* > 0 *olması lazım.* $\Delta < 0$ *olursa bu ifade her zaman* > 0 *olur.*
Araştırmacı: *Neye bağlı olarak oluyor bu durum?*
Aylin: *Neye bağlı olarak… Şimdi* $\Delta = 0$ *olursa mesela veya işte* $\Delta > 0$ *olursa iki tane kök olmuş oluyor a ve b gibi. Biz bunun işaret tablosunu yapınca, atıyorum a da pozitif olduğu için şu değer de negatif olmuş oluyor ki içerisi negatif olamaz (işaret tablosunu inceledi köklerden a ve b arasını negatif buldu). Yani o yüzden dolayı* Δ*'nın* < 0 *olması gerekiyor ki kök olmasın.*
Araştırmacı: *Peki pozitifli kısımları alsak buradan.*
Aylin: *Negatifleri atsak… onu… pozitifleri alırsak o da olabilir aslında ama işte pozitifleri alırsak mesela şu ifade de pozitif olur ve sağlar. Ama şey burada köklerini bulmamız sıkıntı o yüzden öyle düşünüyorum.*
Araştırmacı: *O yüzden* $\Delta < 0$ *olunca hiçbir kökü olmayacak, a da pozitif olduğu için baştaki* x^2*'nin katsayısı. O zaman nasıl bir şey yapacağız?*
Aylin: *Hı hı evet. O zaman* $\Delta = b^2 - 4ac$ *den* $a^2 - 4.1.b < 0$ *diyorum* $a^2 < 4b$ *oldu. Bir de* $a > 0$ *vardı.*
Araştırmacı: *Hangi* a*?*
Aylin: *Şu a…Ha başta zaten a* > 0 *oluyor bu değil o zaman. Böyle bir ifade geldi.*
Araştırmacı: *O halde a nasıl seçilmeli?*
Aylin: *a -2b ile 2b arasında seçilmeli (*$-2b < a < 2b$*).*
Araştırmacı: *Tamam Aylin. Peki böyle bir çözüm yaptın. Böyle akıl yürütmeyi ya da böyle kavramsal olarak bilmeyi nasıl öğrendin?*
Aylin: *Ben yani önce okuldan öğrendim* $\Delta < 0$ *durumunu filan. Kitaplara çalışınca filan da gördüm. İlk başlarda bunları pek hatırlayamıyordum mesela* $\Delta < 0$ *,* $a > 0$ *gibi biraz hafizamda şey vardı ama işte zamanla bu oturdu yerine. Şimdi mesela böyle bir soru gördüğümde hemen işte şey diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *seçelim,* $a > 0$ *diyelim pozitif olsun filan diye diyebiliyorum. Zamanla oturdu yani biraz bu. Özellikle şu ifade. Yani bu soruları okurken zaten bana bir ipucu veriyor yani en geniş tanım kümesinin reel sayılar kümesi olması için. Yani burada hemen diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *olsun diye. Biraz da herhalde çok soru çöze çöze oluyor.*
Araştırmacı: *Tamam Aylin.*

Aylin'in probleme ait matematiksel akıl yürütme analizi:

S1: Aylin'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Köklü sayılar kavramı, aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.
S2: Aylin çözüm prosedürünü öğrenme yaşantılarından edindiği kavramsal bilgilerle inşa etmiştir. Attığı adımlarda kullandığı ifadelerin veya yapıların, araştırmacı tarafından sorgulanması durumunda bunları açıklayabilmiştir. Örneğin, çift dereceli köklü sayılarda kökün içindeki sayının neden sıfırdan büyük olması gerektiğini; Δ değerinin neden sıfırdan küçük olması gerektiğini, aksi durumda neler olacağını matematiksel esaslar ışığında belirtmiştir. Çözüme ulaşacağı son aşamada yaptığı aritmetik işlem hatası nedeniyle doğru sonuca ulaşamamıştır. Ancak sadece sonuca yönelik ve yüzeysel olmayan bir düşünce tarzı sergilemeyi başarmıştır.
S3: Aylin akıl yürütme sürecini, attığı adımların farkında olacak şekilde ilerletmiştir. Konu ile alakalı kavramsal bilgiye hâkim olduğu anlaşılmaktadır. Derinlemesine matematiksel özellikleri göz önünde bulundurmuştur. Buraya kadar ortaya koyduğu akıl yürütme becerisi türü CR özelliklerini taşıyormuş gibi görünse de görüşme sonunda

kullandığı ifadeler gerçek türü belirlememizde yardımcı olmuştur. Aylin'in "*özellikle şu ifade, yani bu soruları okurken zaten bana bir ipucu veriyor. Yani en geniş tanım kümesinin reel sayılar kümesi olması için yani burada hemen diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *olsun diye.*" şeklindeki düşüncesi, onun bu tip sorularda bir algoritma kullandığının göstergesidir. Bu sebeple verilen soru için akıl yürütme becerisi türü AR olarak sınıflandırılmaktadır.

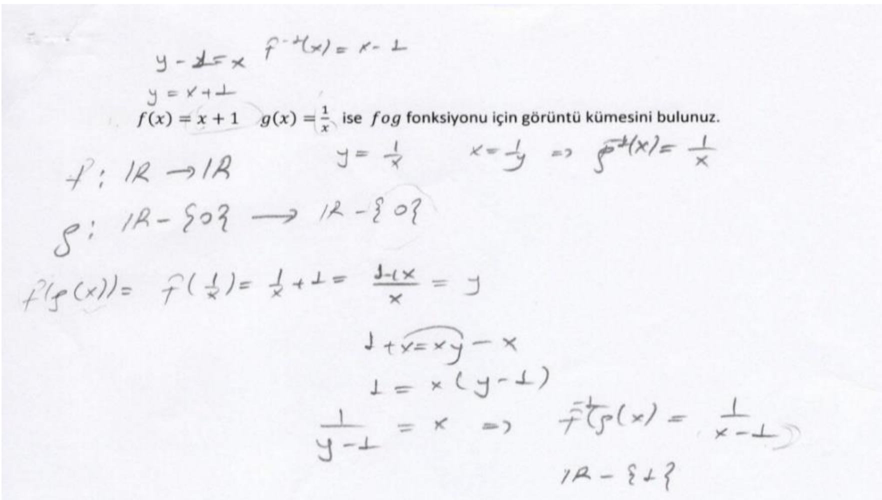
S4: Aylin ortaya koyduğu akıl yürütme süreciyle, konuyla ilgili matematiksel kavramlara hâkim olduğunu gösteren bir durum sergilemiştir. Bu hâkimiyet, süreçte kullandığı kavramların anlamlarını kolayca açıklayabilmesi ve yorum yapabilmesi aracılığıyla anlaşılabilmektedir. Araştırmacının bu hâkimiyetin nedenini sorgulamaya yönelik sorduğu soruya Aylin, " *Ben yani önce okuldan öğrendim* $\Delta < 0$ *durumunu filan. Kitaplara çalışınca filan da gördüm. İlk başlarda bunları pek hatırlayamıyordum mesela* $\Delta < 0$, $a > 0$ *gibi biraz hafızamda şey vardı. Ama işte zamanla bu oturdu yerine. Şimdi mesela böyle bir soru gördüğümde hemen işte şey diyebiliyorum* $\Delta < 0$ *seçelim,* $a > 0$ *diyelim pozitif olsun filan diyebiliyorum*" şeklinde cevap vermiştir. Yani kavramlar üzerindeki hâkimiyetin yanında bir aşinalık da söz konusudur. Bu durumu ise hem kendi çalışmaları hem de öğrenme çevresiyle elde ettiğini belirtmiştir.

Aylin'in probleme ait sınıflandırma kodu: Aylin'in probleme ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{AR_{ogd}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü AR; doğruluk kategorisinde, problemde olası bir sonuca ulaşıldığından o (olası); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde tek tür akıl yürütme var olduğundan g (global); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır

Yaratıcılığa Dayalı Matematiksel Akıl Yürütme İle İlgili Örnek Durum

Problem: "$\mathrm{f(x) = x + 1 \; g(x) = \frac{1}{x}}$ ise fog fonksiyonu için görüntü kümesini bulunuz"

Hikmet'in probleme ait matematiksel akıl yürütme durumu: Hikmet'in probleme yönelik çalışma kâğıdı (Şekil 4), klinik mülakat transkripti, matematiksel akıl yürütme analizi ve sınıflandırma kodu aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4. Hikmet'in probleme ait çalışma kâğıdı

Hikmet'in probleme ait klinik mülakat transkripti:

<u>Hikmet</u>**:** *Tamam şimdi önce fonksiyonlar verildiği için fonksiyonun tanım kümesi görüntü kümesi verilmemiş. Bunu da verilen fonksiyon üzerinden belirleyeceğiz. Mesela $f(x)$ fonksiyonu için tanım kümesine baktığımızda bunu tanımsız yapan bir nokta yok o yüzden reel sayılardan, hani şuraya y desek fonksiyonun tersini alsak $y = x + 1$, $y - 1 = x$ oluyor. Bu fonksiyonun tersini veriyordu. Buda $f^{-1}(x) = x - 1$ yapıyor. Burada da yine fonksiyonu tanımsız yapan değer yok o yüzden reel sayılardan reel sayılara oluyor.*
<u>Araştırmacı</u>**:** *Tamam*
<u>Hikmet:</u> *Bu fonksiyona baktığımız zaman g fonksiyonunda da tanım kümesine baktığımızda tanımsız yapan bir nokta var. Oda 0 sıfır noktası. Onun dışında tanımsız yapan bir nokta yok. O yüzden reel sayılardan sıfırın çıkarılmış halidir $(R - \{0\})$. Görüntü kümesini incelediğimiz de $y = 1/x$ yapacak tersini incelediğimiz de $x = 1/y$ olur. Yani buda $g^{-1}(x) = 1/x$ i verir. Yine burada da reel sayılardan sıfır çıkarmak zorunda kalacağız $(R - \{0\})$. Şimdi fonksiyon f altında g fonksiyonu $f(g(x))$ evet bunun görüntü kümesini soruyor bize. Bunu nasıl bulacağız (öğrenci düşünmektedir). Şöyle yapabiliriz yine fonksiyonda yerine yazabiliriz yani $f\ (1/x) = (1/x) + 1$ olur. Buradan da $(1 + x)/x$ şeklinde gelir buda yine y ye eşittir. Burada x i yalnız bırakıp tersini bulacağız. $1 + x = xy$ yapar $1 = x(y - 1)$ olur buradan da $1/(y - 1) = x$ olur. Dolayısıyla verilen fonksiyonun tersini $1/(x - 1)$ olarak buluruz. Buradan da burayı tanımsız yapan bir değer vardır o da 1 dir. O yüzden görüntü kümesi olarak baktığımızda görüntü kümesi reel sayılardan 1 in çıkarılmış halidir $(R - \{1\})$.*
<u>Araştırmacı</u>**:** *Daha önce böyle sorularla karşılaştın mı?*
<u>Hikmet:</u> *Yani karşılaştım da hani ilk önce şöyle düşünmüştüm biraz önce de düşünmüştüm ama hani dedim direk sonuçta bunun görüntü kümesi bunun tanım kümesi olacak. Oradan gideyim dedim ama oradan zorlanacaktım çünkü bunu yerine yazdığım zaman birde bunun tersini aldığım zaman farklı bir fonksiyon ortaya çıkacak ama burada yazdığımız zaman farklı bir fonksiyon ortaya çıkmıyor. Hani tanım kümesi olarak direkt bu geliyor. Buna bağlı bir görüntü kümesi bulacağız oda biraz işimizi zorlaştıracak.*
<u>Araştırmacı:</u> *Öyle tek tek düşününce, tamam.*

Hikmet'in problem 1'e ait matematiksel akıl yürütme analizi

S1: Hikmet'in akıl yürütme süreci: i) Çözüm prosedürü ii) Tanım ve görüntü kümesi kavramları iii) Fonksiyon girdi çıktıları (nesne), aritmetik işlemler (transformasyon) bileşenlerinden oluşmaktadır.
S2: Hikmet uyguladığı çözüm prosedüründe izlediği adımları açıklamıştır. Öncelikle verilen her bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini belirlemekle işe başlamıştır. Tanım kümelerine nasıl ulaştığını belirttikten sonra fonksiyonların terslerinden hareketle görüntü kümelerini de oluşturmuştur. Bu adımların ardından bileşke fonksiyonunu oluşturup yine ters fonksiyon özelliğinden görüntü kümesini ortaya çıkarmıştır. İzlemiş olduğu bu çözüm prosedürü ve süreçte yer verdiği kavramları matematiksel olarak anlamlı bir şekilde kullanmıştır. Yine matematiksel olarak derinlemesine özellikleri göz önünde bulunduran bir düşünce sergilemiştir.
S3: Hikmet akıl yürütme sürecinde hem algoritmadan faydalanmış, hem de matematiksel olarak derinlemesine düşünceler sergilemiştir. Fonksiyonların görüntü kümelerini bulma ve bileşke fonksiyonu oluşturma aşamasında algoritmaları kullanarak sonuca ulaşmıştır.

Algoritmaları uygulama esnasında ise herhangi bir açıklamada bulunmamıştır. Bu sebeple belirtilen kısımlardaki akıl yürütme becerisi türü AR'dir. Verilen f ve g fonksiyonları ile fog fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulma aşamalarında ise kavramlarla ilgili yorumlar yaparak ilerlemiş ve sonuca ulaşmıştır. Oluşturduğu tartışma ortamlarından dolayı belirtilen bu kısımlardaki akıl yürütme becerisi türü ise CR özelliklerini taşımaktadır.

S4: Hikmet'in bu soru için ortaya koyduğu akıl yürütme süreci incelendiğinde, kullandığı kavramlara hâkim olduğu anlaşılmaktadır. Uygulamış olduğu çözüm prosedürünün dışında farklı bir çözüm prosedürünü de zihninden geçirdiğini görüşmenin son kısmındaki *"... oradan gideyim dedim ama oradan zorlanacaktım..."* ifadesinden anlıyoruz. Yani Hikmet'in, birden fazla yolu düşünebildiği anlaşılmaktadır. Bu durum ise sağlam bir kavramsal alt yapı ile mümkün olabilir. O halde Hikmet'in sergilemiş olduğu bu sürecin altında sağlam bir kavramsal alt yapının varlığından söz edebiliriz.

Hikmet'in probleme ait sınıflandırma kodu: Hikmet'in Probleme ait ortaya koyduğu ve araştırmamız kapsamında analiz edilen akıl yürütme becerisi türü, sınıflandırma kodları kullanılarak $\mathbf{CR_{dld}}$ olarak kodlanmıştır. Bu kodlamada; akıl yürütme becerisi türü CR; doğruluk kategorisinde, problemde doğru bir sonuca ulaşıldığından d (doğru); çeşitlilik kategorisinde, akıl yürütme sürecinde iki farklı tür akıl yürütme var olduğundan l (lokal); matematiksel esaslar kategorisinde, matematiksel olarak derinlemesine bir düşünce tarzı sergilediğinden d (derinlemesine) olarak kodlanmıştır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Matematik eğitimine yönelik hazırlanan öğretim programlarıyla, çok daha yetkin problem çözücüler yetiştirmek amaçlansa da; öğrenciler, problem çözümleri sırasında ezberci ve algoritmik akıl yürütmeleri daha çok tercih etmektedirler (Lithner, 2006). Hedef ve sonuç arasındaki bu fark matematiksel öğrenmelerde güçlüklerin yaşanmasına sebep olmaktadır (Hiebert, 2003). Matematiksel öğrenmeler zaten doğası gereği oldukça karmaşıktır (Niss, 1999). Bununla beraber matematikteki tüm kuralların ve işlemlerin temelinde matematiksel akıl yürütmeler vardır (Umay & Kaf, 2005). Dolayısıyla matematiksel öğrenme sürecindeki karmaşıklık, matematiksel akıl yürütmeleri de kapsamaktadır. Bir düşünme süreci olan matematiksel akıl yürütmelerle ilgili yapılan araştırmalar, her bireyin farklı tarzda matematiksel akıl yürütmelere sahip olduğunu göstermektedir (Akkuş-Çıkla & Duatepe, 2002; Bishop vd., 2001; Malloy, 1999). O halde bireye özgü gerçekleşen matematiksel akıl yürütme süreçlerini ortaya çıkarmaya yönelik bir çerçevenin varlığı, bu alanda öğrencilerin ne tür ve ne şekilde matematiksel akıl yürütmeler benimsediklerini daha net ortaya çıkarmayı sağlayacaktır.

Uluslararası öğretim programlarında (NCTM, 2013) ısrarla üzerinde durulan ve öğrencilere kazandırılması hedeflenen beceri olan matematiksel akıl yürütme, matematik eğitimi araştırmalarının merkezindedir (Lithner, 2006). Matematiksel akıl yürütmenin karakterizasyonuna yönelik birçok çerçeve çalışması literatürde mevcut olmasına rağmen bunlar dar kapsamlıdır. Lithner (2006), yapmış olduğu birçok bilimsel çalışma neticesinde (Lithner, 2000a, 2000b, 2003, 2006, 2008) matematiksel akıl yürütmenin türlerini belirli çizgilerle birbirinden ayırmış ve bu türlere karar vermeyi sağlayacak analiz yöntemini belirlemiştir. Bu çalışma ile matematiksel akıl yürütme süreçlerinde kullanılabilecek Lithner (2006) tarafından ortaya konulan çerçeve sunulmuştur. Ayrıca bu çerçeveye uygun olarak analiz edilmiş matematiksel akıl yürütme süreçlerinin örneklerine de yer verilmiştir. Böylece analiz yönteminin nasıl uygulandığı gösterilmiştir.

Çerçeve ile üç farklı matematiksel akıl yürütme türünün olduğu belirtilmiştir. Bunlar, ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme, algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme ve yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Sınıflandırma türlerinde yer alan ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme, her ne kadar en alt seviyedeki akıl yürütme türü gibi görünse de bir problem durumu karşısında öğrencinin herhangi bir yorum yapmamasına göre ezberden bir şeyler söyleyebilmesi yönünden önemlidir. Yani öğrenme ortamlarındaki farklı deneyimlerin bir akıl yürütme süreci başlattığı sonucuna varmamızı sağlayabilir. Öğrenme ortamlarında karşılaşılan farklı etkinliklerin öğrencilerin akıl yürütme ve düşünme becerilerini olumlu etkilediğini savunan Apaydın ve Taş (2010) ve etkileşimli öğrenme ortamlarının matematiksel akıl yürütmeyi başlatmaya katkı sağladığını belirten Zembat (2006)'ın çalışmalarında, ezbere dayalı matematiksel akıl yürütmeleri görülmektedir. Diğer sınıflandırma türü olan algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme ise akıl yürütmeye yönelik birçok bilimsel çalışma da yer almaktadır (Boesen vd., 2010; Karakoca 2011; Lithner, 2000a; Lithner, 2000b; Lithner, 2003; Lithner, 2004). Özellikle bugüne kadar öğrenme çevrelerinde edindikleri tecrübelerden hareketle kullanılan bu akıl yürütme türü sayesinde, öğrenci hem zamandan kazanırken hem de düşünsel anlamda yorulmamaktadır. Ayrıca seçilen algoritmanın her durumda çalışıyor olması öğrenme ortamlarında sıkça karşılaşılan benzer problem durumlarına uygulanışını kolaylaştırmaktadır. Bu durum bu akıl yürütme türünün daha çok tercih edilmesinin sebebi olarak gösterilebilir. Matematiksel akıl yürütme türlerinden üçüncüsü ise öğrencilerin derinlemesine düşünüp, kavramlar arasında bağlar kurarak olaylara bütüncül olarak bakabildiği akıl yürütmelerin hakim olduğu yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütmedir. Öğrenme ortamlarının öğrenmeye açık, tartışma durumlarının sıkça oluşturulduğu, herkesin düşüncelerini rahatça ifade edebildiği şekilde tasarlanması öğrencilerin bu akıl yürütme türünü tercih etmelerine katkı sağlayabilir. İlgili alan yazında yer alan çalışmalarda da (Yankelewitz, 2009; Başaran, 2011; Tıraşoğlu, 2013; Erdem, 2015) bu tarz etkileşimli ortamların öğrencilerdeki matematiksel akıl yürütme becerisini geliştirmeye olumlu yönde katkı sağladığı sonuçlarına ulaşılmıştır.

Matematiksel akıl yürütmeye yönelik analiz yönteminin varlığı, bir düşünme yolu olan matematiksel akıl yürütmedeki karmaşıklığa ışık tutacaktır. Bu sayede öğrencileri mevcut matematiksel akıl yürütme becerileri belirlenerek onları geliştirmeye yönelik çalışmalar yapılabilir. Belli öğretim yöntemleri kullanılarak bu yöntemlerin öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerine etkileri incelenebilir.

Katkı Oranı Beyanı: Birinci yazar araştırma fikrinin ortaya çıkması, literatür taraması, araştırma verilerinin toplanması ve incelenmesi ile araştırmanın raporlanması aşamalarında, ikinci yazar araştırma fikrinin geliştirilmesi, yöntemin belirlenmesi, tartışma bölümünün zenginleştirilmesi ve makalenin genel düzenlemesinde katkıda bulunmuştur.

KAYNAKLAR

Akkuş Çıkla, O. & Duatepe, A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *23*(23), 32-40.

Altıparmak, K. & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, *6*(21), 25-37.

Apaydın, Z. & Taş, E. (2010). Farklı etkinlik tiplerinin öğretmen adaylarının akıl yürütme becerileri üzerindeki etkileri. *Türk Fen Eğitimi Dergisi, 7*(4), 172-188.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S., & Oktac, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 241–309.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Başaran, S. (2011). Üniversite öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerileriyle ilgili duyuşsal ve demografik etmenlerin araştırılması (Tez No. 286085) [Doktora tez, Orta Doğu Teknik Üniversitesi-Ankara]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Bishop, J. W., Otto, A. D., & Lubinski, C. A. (2001). Promoting algebraic reasoning using students' thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School, NCTM*, *6*(9), 508-514.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*. *75*(1), 89-105. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9242-9

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York: Springer.

Erdem, E. (2011). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi (Tez No. 301094) [Yüksek lisans tezi, Adıyaman Üniversitesi-Adıyaman]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Erdem, E. (2015). Zenginleştirilmiş öğrenme ortamının matematiksel muhakemeye ve tutuma etkisi (Tez No. 381651) [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi-Erzurum]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Eds), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp 5–26). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Hjelte, A., Schindler, M., & Nilsson, P. (2019). Kinds of mathematical reasoning addressed in empirical research in mathematics education: A systematic review. *Education Sciences, 10*(289), 2-15. doi:10.3390/educsci10100289

Karakoca, A. (2011). Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları (Tez No. 288002) [Yüksek lisans tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi-Eskişehir]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 83–95. https://doi.org/10.1080/002073900287417

Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in school tasks. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 165–190. https://doi.org/10.1023/A:1003956417456

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29–55.https://doi.org/10.1023/A:1023683716659

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercise. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 371–496. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning.* Research Reports in Mathematics Education (In Press), Department of Mathematics, Ume˚a University.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 49(*6), 937-949. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3

Malloy, C. E. (1999). *Developing mathematical reasoning in the middle grades recognizing diversity*. *Developing mathematical reasoning in grades K12* (Lee V. Stiff, 1999 yearbook editor), Reston: Virginia; National Council of Teachers of Mathematics.

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169–186. DOI 10.1007/s10649-017-9773-4

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013*). Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınevi.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2013). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 1–24.

Norqvist, M., Jonsson, B., & Lithner, J. (2019). Eye-tracking data and mathematical tasks with focus on mathematical reasoning. *Data in Brief, 25*, 104216. https://doi.org/10.1016/j.dib.2019.104216

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165-190. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_3

Rizgi, N. R., & Surya, E. (2017). An analysıs of students' mathematıcal reasonıng ability in VIII grade of Sabılına Tembung Junıor Hıgh School. *International Journal Of Advance Research And Innovative Ideas In Education, 3*(2), 3527-3533.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies İn Mathematics*, 22, 1–36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15.

Steen, L. A. (1999). Twenty question about mathematical reasoning. L. V. Stiff, F. R. Curcio. (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 yearbook* (pp. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press,

Tıraşoğlu, N. B. (2013). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme bağlamında matematik zihin alışkanlıklarının belirlenmesi (Yüksek lisans tezi) Eğitim Bilimleri Enstitüsü. (Tez No. 354666) [Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi-Ankara]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *2003*(24), 234-243.

Umay, A. & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 188-195.

Yankelewitz, D. (2009). *The development of mathematical reasoning in elementary school students' exploration of fraction ideas* (Doctoral dissertation). New Brunswick, Rutgers, The State University of New Jersey.

Yeşildere, S. & Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, *40*(1), 181–213.

Zembat, I. O. (2008). Pre-service teachers' use of different types of mathematical reasoning in paper-and-pencil versus technology-supported environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(2), 143–160. https://doi.org/10.1080/00207390701828705

Extended Abstract

Introduction

The changing world of today, which is rapidly developing in every field, needs people who can adjust to the change and tackle the problems with solution-focused approachand multidirectional thinking. The members of the education field, who are aware of this need, improve the teaching programs so that students gain reasoning skills would be the priority, because, individuals can reasonably evaluate the problems they encounter by reasoning, which is a thinking process. They can reach a meaningful result by thinking holistically about the information they acquire. The number one field that needs to use reasoning processes is mathematics because of its nature. Mathematical reasoning is actively utilized while teaching the rules, processes, patterns and many other elements of mathematics, because, mathematics is built on the cause-effect chain. For this reason, it is important to have an effective mathematical reasoning ability in learning environment. The identification and classification of mathematical reasoning, which is the subject of research in education, is very difficult due to the complexity of reasoning which is a thinking process. In this study, the types of mathematical reasoning skills presented by Lither (2008) and the analysis method used to determine these types are explained. In this way, it is possible to classify the mathematical reasoning skills put forth by individuals in terms of superficiality or depth. The steps followed in reaching these classifications that are created, namely the existence of an analysis method and the validity and reliability of the scientific work done; as well as the classification of the mathematical reasoning skills studied are important.

Conclusion and Suggestion

In the classification created by Lithner, low or high level mathematically thinking processes presented by a student who encounter problems is essential. Accordingly, mathematical reasoning is divided into three types. The first is Memorised Reasoning (MR). The solution strategy in this reasoning is retrieved through a solution in memory. The individual in this types who uses writing only, remembers all stages of the solution but does not know the meaning of what he writes. The second one is Algorithmic Reasoning (AR). The whole sequence of rules to be followed when solving a problem is called an algorithm. When the solution strategy is determined in this reasoning, the solution that exists in memory is retrieved again. However, only the algorithm, not the complete solution, is retrieved as it is in memorized reasoning. This algorithm is applied to the problem encountered. No new solution is produced. There is no evaluation of the conceptual structure of the mathematical structures used in the algorithm. The third one is Creative Reasoning (CR). In mathematical reasoning, the concept of creativity involves thinking about a new way of solving a problem. In this types of reasoning, a student puts forward a new solution to a problem by reasoning and supporting with arguments. There may be mathematical reasoning situations in which only one or both of three types are used together. The important point is to be able to determine the correct types when examining these processes. In this phase, the analysis method developed by Lithner is used again. The four main questions determined by the results of the long research are answered by the mathematical reasoning process performed by the student. The big picture or the reasoning types is determined by a structure moving from piece to the whole. The first question is, “What different kinds of *components* are involved in mathematical reasoning?”. The second question is, "What kinds of mathematical and non-mathematical *properties* do the components have?”. The third question is, "What types of high and low-quality reasoning take place in the learning environment? “. The fourth question is, "What are the main reasons behind progress and/or difficulties in the reasoning situations studied? “. Finally, the type of mathematical reasoning and subfields are symbolized by the coding system developed in the literature.

Mathematical reasoning is an important topic that is focused on newly developed educational programs in recent years in our country as well as in many other international educational programs, because, reasoning improves the system of thinking and prepares individuals for today's world. However, it has a complex structure. For this reason, it is difficult to determine at what level the mathematical reasoning skills have been gained in the teaching process. The existence of an analysis method for mathematical reasoning will shed light on the stated complexity. In this way, studies can be done to improve students' current mathematical reasoning skills by determining them. Using certain teaching methods, the effects of these methods on students' mathematical reasoning skills can be examined.

Etik Kurul Belgesi: Bu araştırma herhangi bir canlı üzerinde gerçekleştirilmediği için etik kurul onayı alınmasını gerektirmemektedir.