Ahi Evran Üniversitesi
Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi

ISSN: 2147 - 1037

http://kefad.ahievran.edu.tr

Reflection of Pre-service Mathematics Teachers' Specialized Content Knowledge on Fractions to Teaching Activities

Melike Tural Sönmez
Melisa Ayça Karacaköylü

Article Information

CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.891260

Received: 04.03.2021
Revised: 03.10.2021
Accepted: 17.03.2022

Keywords:

Pedagogical Content Knowledge, Fraction,
Problem Posing,
Mathematical Representations

Abstract

The aim of this study is to reveal how pre-service mathematics teachers' specialized field knowledge about multiplication and division operations in fractions is reflected in their teaching activities. The pre-service teachers' specialized field knowledge about multiplication and division operations in fractions was examined in the theoretical framework proposed by Ball, Thames and Phelps (2008). In this qualitatively designed study, the participants were purposefully selected from among the fourthgrade teacher candidates studying at the department of primary education in mathematics at a state university. Data collection tools consist of realistic problems and lesson plans created by prospective teachers, transcripts of audio and video recordings of during micro-teaching activities and the interview. The findings of the research are structured according to three headings as coding (representations, explanation and justification) of the collected data. The results of the study show that pre-service teachers have difficulty in switching between representation types. In addition, the findings reveal that teacher candidates have difficulty in posing problems for the given procedure, and they are insufficient to explain the model and the problem with the material. Another finding of the research is the overlap of the explanations in the lesson plans and micro-teaching activities of the pre-service teachers who did not have any problems in representing real life situations.

Matematik Öğretmen Adaylarının Kesirlere İlişkin Özelleştirilmiş Alan Bilgilerinin Öğretim Etkinliklerine Yansıması

Makale Bilgileri

CrossMark

DOI: 10.29299/kefad.891260

Yükleme: 04.03.2021
Düzeltme: 03.10.2021
Kabul: 17.03.2022

Anahtar Kelimeler:

Pedagojik Alan Bilgisi,
Kesir,
Problem Kurma,
Matematiksel Temsiller

Öz

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleri konusundaki özelleştirilmiş alan bilgilerinin öğretim etkinliklerine nasıl yansıdığını ortaya çıkarmaktır. Öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleri ile ilgili özelleştirilmiş alan bilgileri Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından ortaya atılan teorik çerçevede incelenmiştir. Nitel olarak tasarlanan bu çalışmada katılımcılar devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde dördüncü sınıfta öğrenim gören öğretmen adayları arasından amaçlı olarak seçilmiştir. Veri toplama araçları öğretmen adaylarının oluşturdukları gerçekçi problemler, ders planları, mikro öğretim ve görüşme esnasında alınan ses ve video kayıtlarının transkriptinden oluşmaktadır. Araştırmanın bulguları toplanılan verilere ait kodlamalar (temsiller, açıklama ve gerekçelendirme) şeklinde üç başlığa göre yapılandırılmıştır. Araştırmanın sonuçları öğretmen adaylarının temsil türleri arasında geçiş yapmakta zorluk çektiklerini göstermektedir. Ayrıca bulgular öğretmen adaylarının verilen işlem için problem kurmakta zorluk çektiklerini, model ve problemi materyal ile açıklamakta yetersiz kaldıklarını ortaya koymaktadır. Araştırmadan çıkan diğer bir bulgu gerçek yaşam durumları temsillerinde sorun yaşamayan öğretmen adaylarının ders planlarındaki açıklamaları ve mikro öğretim etkinliklerinin örtüşmesidir.

Sorumlu Yazar : Melike Tural Sönmez, Dr. Öğretim Üyesi , Kırıkkale Üniversitesi, Turkiye, melikesonmez@kku.edu.tr, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-3302-6982.

Melisa Ayça Karacaköylü, Kırıkkale Universitesi, Turkiye, melisa_karacakoylu@hotmail.com, ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-0746-5471.

"Bu çalışma Kırıkkale Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir. Proje numarası 2019/159"

Atıf için: Tural Sönmez, M., & Karacaköylü, M. A. (2022). Matematik öğretmen adaylarının kesirlere ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin öğretim etkinliklerine yansıması. *Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(Özel Sayı), 330-384.

1.Giriş

İnsanların düşünce yapılarını geliştiren en önemli araçlardan biri matematiktir. Bu nedenle, eğitimin önemli oluşumlarından belki de en önemlisi matematik eğitimidir (Umay, 2003). Matematiksel kavramların soyut olması nedeniyle öğrenciler matematiği karmaşık bulmakta ve matematiksel kavramları anlamakta güçlük çekmektedirler. Bu süreçte öğretmenlerin yapacakları öğretim çok önemlidir. Öğretmenin uyguladığı hatalar ilköğretimden lise seviyesine kadar gidebilen bir kavram yanılgısı oluşturabilmektedir. Bu nedenle öğretmenlerin güçlü bir alan ve pedagoji bilgisine sahip olması önem taşımaktadır. Son yıllarda öğretmen yeterlikleri birçok araştırmanın konusu olmuştur. Pedagojik alan bilgisi ilk defa Shulman (1987) tarafından 'öğrencileri anlama bilgisi' ve 'öğretim stratejileri' bilgisi olmak üzere iki boyutta incelenmiştir. Öğrencileri anlama bilgisi; öğrencilerin hangi kavramları daha kolay anlayacaklarını, öğrencilerin sahip oldukları hata veya kavram yanılgılarını tespit edebilmeyi ve onların öğrenme karakterlerini anlamayı sağlayan yöntem bilgisidir. Öğretim stratejileri bilgisi ise öğretmenin alan bilgisini öğrencilere aktarabilmeye, öğrencilerin kavram yanılgılarını giderebilmeye yönelik öğrenme ortamı tasarlayabilmeye ilişkin yöntem bilgisidir. Shulman (1987) alan bilgisini açıklarken iki temel yapı kullanmıştır. Bu yapılardan birincisi, alandaki kavram ve olguların doğruluğunu ve geçerliğini saptama yöntemleri, ikincisi ise alan bilgisinin üretilmesi için kullanılan farklı yöntemlerdir.

Shulman'dan (1987) sonra birçok araştırmacı öğretmen yeterliliklerini farklı şekillerde kategorileştirmiştir. Bunlardan biri de Ball, Thames ve Phelps (2008) sunduğu modeldir. Bu model; Shulman'ın (1987) geliştirmiş olduğu pedagojik alan bilgisi modelinin matematik öğretimi bağlamında genişletilmiş bir halidir. Matematik öğretim bilgisi modeli; alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi şeklinde iki bölüme ayırmıştır (Shulman, 1987). Bu modelde öğretmenlerin öğreteceği matematiksel kavram ile bu kavramın ileri düzey formları arasında ilişki kurmasına ve özel alan bilgisine vurgu yapmaktadır. Ball ve arkadaşları (2008) matematik öğretimi için gerekli olan bilgiyi, konu alanı bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak iki temel kategoriye ayırmışlardır. Konu alanı bilgisi öğretmenin öğrenci veya öğretim hakkındaki bilgisinden arındırılmış matematik bilgisidir. Konu alanı bilgisi boyutları genel alan bilgisi, özelleştirilmiş alan bilgisi ve yatay alan bilgisi olmak üzere üç bileşenden oluşmaktadır. Genel alan bilgisi öğretmenin öğreteceği matematiksel kavramları bilmesi ve matematiksel terminolojiyi ve simgeleri doğru bir şekilde kullanabilmesi ile ilgilidir. Dolayısıyla etkili bir öğretmen öğrencilerinin yanlış cevaplarını ve ders kitabındaki yanlış tanımlamaları fark edebilmelidir. Özelleştirilmiş alan bilgisi (ÖAB) ise bireylerin gündelik işlerinde kullanma gereksinimi ve isteği duymayacağı türden, buna karşın öğretim ile ilişkili olan matematiksel bilgi ve becerilerdir. Ball ve arkadaşlarının (2008) sunduğu özelleştirilmiş alan bilgisi Shulman'ın (1987) sunduğu pedagojik alan bilgisinden şu anlamda farklıdır: Öğretimin matematiksel talepleri öğretmenler tarafından gerekli, ancak başkaları tarafından gerekli olmayan özel matematik bilgisi gerektirir. Özelleştirilmiş alan bilgisinde öğretmenlerin öğrencilere anlatacakları konuda standart olmayan yöntemleri, işlemlerin farklı anlam ve yorumlarını anlıyor olması gerekir. Çünkü öğretmenlerin öğrencilere yardım etmek için, sadece matematik yapabilmeleri değil, aynı zamanda matematiğin unsurlarını öğrencilere görünür kılabilmeleri gerekmektedir. Matematik öğretmenlerinin belirli matematiksel uygulamalarla ilgili genişletilmiş uzmanlığa ihtiyaçları vardır. Öğretmenler, matematik dilinin nasıl kullanılması gerektiği hakkında bilinçli olmalıdır. Matematiksel temsillerin etkili bir şekilde seçebilmeyi, açıklamayı ve matematiksel fikirlerini doğrulayabilmeyi bilmelidir. Örneğin bir matematik öğretmeni, kesirler konusunun öğretiminde kesirlerin çeşitli anlamlarını (parça-bütün, bölüm, oran, ölçü ve işlemci) ve bu anlamlar arasındaki farklılıkları bilmesi buna örnek gösterilebilir.

Ball ve arkadaşları. (2008) ÖAB'nin özellikle şu üç matematiksel görevden oluştuğunu belirtmişlerdir (Aktaran; Seçir, 2017) Bunlardan ilki *temsiller* olarak nitelendirilen, sayıları ve işlemleri anlamlı bir şekilde resimler veya manipülatifler kullanarak göstermedir. Gerçek yaşam durumları, manipülatifler (kesir çubuğu, vs.), resimler veya diyagramlar (sayı doğrusu, bölge, soyut modeller, vs.), sözlü semboller, yazılı semboller (Lesh, Post ve Behr, 1987) bunlara örnek gösterilebilir. İkinci matematiksel görev *açıklama* olarak nitelendirilen genel kurallar veya algoritmaların altında yatan anlamı açıklamadır. Bununla ilişkili Back, Manilla, ve Wallin (2009) gerekçelendirme türlerini *kendi açıklaması, varsayıma dayalı, kurala dayalı, belirsiz/genel ifade, işlemsel tanım* olarak çeşitlendirmiştir. Üçüncü matematiksel görev ise *gerekçelendirme* şeklinde kodlanan öğretmenlerin, öğrencilerin alternatif strateji ve çözümlerinin matematiksel olarak uygun olup olmadığını anında ve hızlı bir şekilde analiz etmesi ve değerlendirmesi, bunların neden doğru veya yanlış olduğunu gerekçelendirmesidir. Gerekçelendirme ile ilgili sınıflandırmayı Koren (2004) matematiksel temelli açıklama, uygulama temelli açıklama ve kural temelli açıklama şeklinde kategorileştirmiştir. Levenson, Tsamir ve Tirosh (2010) ise öğretmenlerin açıklama ve gerekçelendirme görevlerini birlikte ele alarak, bu görevleri *matematik temelli açıklama* ve *uygulama temelli açıklama* olarak kategorileştirmişlerdir. Uygulama temelli açıklama matematiksel ifadeler için gerçekçi durumlar ve somut materyal kullanımı içerirken; matematiksel temelli açıklamalar, matematiksel tanımlama, daha önceden öğrenilen matematiksel özelliklere ve matematiksel akıl yürütmeye dayanır. Özellikle sorgulamalı matematik öğretiminin uygulandığı sınıflarda öğrenciler yorumları üzerinde açıklamalar beklerler. Bu açıklamalar bir şeyin nasıl ve niçin yapıldığı üzerine olabilir (Perry, 2000). Raman (2002) matematik temelli ve uygulama temelli açıklamaların birbirlerinden üstün olmadıklarını, ikisinin de faydalı olduğunu, sadece birinin kullanımının zorluklar oluşturabileceğini belirtmiştir. Wu (1999) da Raman (2002) ile benzer şekilde öğretmenlerin somut materyal kullanımının sınırlarını bilmeleri gerektiğini ve formal ile informal açıklamalar arasında koordinasyonun sağlanması gerektiğini belirtmiştir. Tirosh, Even ve Robinson (1998), öğrencilerin kavram yanılgılarının farkında olan deneyimli öğretmenlerin farklı türdeki açıklamaları birlikte kullandıklarını, deneyimli olmayan öğretmenlerin ise öğrencilerin hatalarında kuralı hatırlatmayı tercih ettiklerini belirtmişlerdir. Putnam (1992) ise öğretmenin rolünün öğrencileri hayata hazırlamak olduğunu düşünen öğretmenlerin derslerinde deneyimlerden örnekler verdiklerini ve birçok açıklama türünü bir arada kullandıklarını ifade etmişlerdir.

Pedagojik alan bilgisi ile ilgili yapılan çalışmalar öğretmen ve öğretmen adaylarının birçok matematik kavramı hakkındaki alan bilgilerinin yetersiz olduğunu ortaya koymaktadır (Aksu ve Konyalıoğlu, 2015; Hacıömeroğlu, 2005; Kutluk, 2011; Işıksal ve Çakıroğlu, 2006). Oysa bir konunun derinlemesine öğretilebilmesi için öğretmenlerin alan bilgilerinin o konuda yeterli olması gerekmektedir. Bir kavramı derinlemesine anlayan birinin, o kavramla ilişkili olan bütün işlemleri de rahatlıkla yapması beklenmektedir. Byrnes ve Wasik (1991) bir konu hakkında derin kavramsal bilgisi olan öğrencilerin, yaptıkları hataları daha kolay fark ettiklerini ifade etmişlerdir. Matematik öğretiminde işlem ve kavramların anlamlı öğrenilmesi, işlem ve kuralların altında yatan kavramlarla ilişkilendirilmesinden geçmektedir (Schoenfeld, 2014). Öğrenme sürecinde somut deneyimlerini soyut öğrenmelere dönüştürebilecek etkinliklerin yapılandırılması ve uygulanması önemlidir. Stein ve Bovalino (2001) bununla ilişkili olarak başarılı öğretmenlerin, derslerini planlarken materyallerin öğrencilerin matematiksel düşünme biçimlerini nasıl etkileyebildiği üzerine dikkate aldıklarını ifade etmişlerdir. Kılıç, Pekkan, ve Karatoprak (2013) altıncı sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmada materyal kullanımının öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamalarına olumlu katkılarının olduğunu ifade etmişlerdir. Bireyler materyal kullanarak ilişki kurma ve akıl yürütme becerilerini geliştirmektedir (Yavuz, 2013). Gainsburg (2008) yaptığı çalışmasında öğretmenlerin gerçek hayat durumlarıyla öğrettikleri kavramlar arasında bağlantı oluşturmakta zorluk çektiklerini belirtmiştir.

Çiftçi, Yıldız, ve Bozkurt (2015) ortaokul matematik öğretmenlerinin materyal ve materyal kullanımına ilişkin inanışlarının materyal kullanımlarını etkilediği belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarının matematiğin doğası, öğretimi ve öğrenimi hakkındaki inanışları pedagojik eğitimleri esnasında aldıkları eğitim ve okulöncesinden üniversite eğitimleri esnasındaki deneyimlerinden etkilenmektedirler. Raymond (1997) çalışmasında mesleğinin ilk yıllarındaki öğretmenlerin matematik öğretimlerinin geçmiş okul deneyimlerinden, matematiğin doğasına ilişkin inançlarından ve sınıfta oluşan durumlardan (öğrencilerin öğrenme motivasyonu gibi) ve kişilik özelliklerinden etkilendiğini belirtmiştir. Ma (1999) ise matematiksel yeteneğin doğuştan geldiğine dair inançların da kullanılan açıklama türünü ve materyal kullanımını etkilediğini belirtmiştir. Örneğin Ma (1999) çalışmasında öğrencilerinin matematik konularını anlamak için kapasitelerinin olmadığını düşünen öğretmenlerin kural temelli açıklamalar kullandıklarını ortaya koymuştur. Gökmen, Budak, ve Ertekin (2015) ve İskenderoğlu, Türk, ve İskenderoğlu (2016) çalışmalarında öğretmenlerin materyal kullanmaya yönelik yeterlik öz-inançları yüksek olduğunu belirtmişler, bununla birlikte öğretmenlerin derslerinde materyal kullanma düzeyleri ile yeterlik inançları arasında anlamlı bir ilişki bulunmadığını belirtmişlerdir. Yetkin Özdemir (2008) yaptığı çalışmada öğretmen adaylarının derslerde materyal kullanımı konusunda olumlu tutuma sahip olduğunu ortaya koysa da materyalleri sınıflarında etkin bir şekilde kullanabilme konusunda sıkıntı yaşadıklarını ortaya koymuştur. Yetkin Özdemir (2008) ayrıca öğretmen adaylarının öğrencilerin materyal ile kavram arasındaki ilişkiyi kurmalarına yardımcı olabilecek yönlendirmeleri yapılandırma konusunda yetersiz olduklarını tespit edilmiştir.

Kesirler ve Kesir öğretimi

Kesirler, sadece sayılar konusunun içerisinde değil farklı sınıf seviyelerinde birçok konu içerisinde önem arz eden önemli kavramsal zenginliğe sahip bir konudur. Bu nedenle konunun öğrenilmesi büyük önem taşımaktadır (Seçir, 2017). Matematik eğitiminde geçmişten bugüne kadar kesirler ve kesirlerle işlemlerin öğrenme ve öğretimine ilişkin fazlasıyla çalışmaya rastlanmaktadır (Armstrong ve Bezuk, 1995; Behr, Lesh, Post ve Silver, 1983; Mack, 1990). Yapılan çalışmalar ise çoğunlukla kesirler konusunun öğrenilmesi ve kavram yanılgılarının tespit edilmesi üzerine olduğu görülmüştür (Birgin ve Gürbüz, 2009; Mulligan ve Mitchelmore, 1997). Yapılan çalışmalar kesirler konusunda öğrencilerde tespit edilen kavram yanılgıları ve hatalarının öğretmen adayları ve öğretmenlerde de görüldüğünü ortaya çıkarmıştır (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1994; Graeber, Tirosh ve Glover, 1989; Işık, 2011).

İlkokulda kesirler olarak öğretilen konu, ortaokul ve lisede rasyonel sayılar olarak öğrencilerin karşılarına çıkmaktadır. Rasyonel sayı ile kesir arasındaki fark matematikçiler arasında halen tartışılmaktadır. Örneğin Lamon (2007) her kesrin bir rasyonel sayı olduğunu ancak her rasyonel sayının bir kesir olamayabileceğini söylemiştir. Bunun nedenini rasyonel sayıların kesirlere ait olarak atfedilen a/b yapısından farklı olarak, ondalık ve yüzde görünümünde olabileceğidir. Lamon (2007) ayrıca rasyonel sayıların negatif değerler alabilirken, kesirlerin alamayacağını belirtmiştir. Kieren (1993) ise rasyonel sayıların kesirlerin denklik sınıfı olduğunu ve bu nedenle kesirlerin de rasyonel sayı olduğunu belirtmiştir.

Rasyonel sayıların analizi, a/b şeklinde verilen bir rasyonel sayının problem durumu ile farklı anlamların ortaya çıktığı görülmüştür (Behr, Wachsmuth, Post ve Lesh, 1984; Ohlsson, 1988; Toluk, 2002). Bu analizlerin sonunda elde edilen, rasyonel sayıların beş farklı anlamları şunlardır:

$\frac{a}{b}$ kesrinin bir parça bütün ilişkisini belirlediği *parça-bütün anlamı*,

$\frac{a}{b}$ kesrinin bir bölme işleminin sonucunu belirlediği *bölüm anlamı*,

$\frac{a}{b}$ kesrinin bir a niceliğinin b niceliğine kıyaslanmasını gösteren *oran anlamı*,

rasyonel sayılar bir ölçme işleminin sonucunu gösteren *ölçme anlamı*,

rasyonel sayılarda çarpma işleminin kuralını belirleyen *işlemci (operatör) anlamı*dır.

Bu anlamları bilmek, kesrin ve kesirlerde işlemlerin anlamlandırılması açısından oldukça önemlidir. Kesirlerde bölme işlemi ile ilgili araştırmalar incelendiğinde, öğretmen adaylarının en az anlamlandırabildikleri konulardan biri kesirlerde bölme işlemi olduğu ortaya çıkmaktadır (Aytekin ve Şahiner, 2020; Li, 2008; Li & Kulm, 2008; Yeşildere, 2008). Kesirlerde bölme işleminin öğretilebilmesi için doğal sayılarda bölme ve kesirler ile ilgili tüm kavramların bilinmesi gereklidir (Ma 1999; Armstrong ve Bezuk, 1995). Aynı şekilde Lo ve Luo (2012) öğretmen adayları kesirlerde bölmeyi anlamlı bir şekilde öğretebilmeleri için tam sayılarda bölmeyi anlamlı bir şekilde öğrenmiş olmaları gerektiğini belirtmiştir. Işık (2011) öğretmen adaylarının kesirlerde bölme işlemine yönelik kurulan problemleri araştırdığı çalışmasında, öğretmen adaylarının işlem ve sayılara anlam vermekte zorlandığını; özellikle bölünenin doğal sayı olduğu durumlarda 'ölçme' anlamını gösteren problem kurabildikleri fakat bölünenin kesir olduğu durumda problemi oluşturmakta zorlandıklarını; bir doğal sayı ile kesir sayısının çarpımına yönelik problem kurma sürecinde ise işlem sonucuna önem verilmeksizin sadece işleme odaklandıklarını, bundan dolayı da kurulan problemlerde parça-bütün ilişkisini kavrayamadıkları gözlemlenmektedir. Işık ve Kar'ın (2012) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde bölme işlemine yönelik kurdukları problemlerin hata analizini yaptıkları çalışmalarında hata tiplerini "*birim kargaşası, kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme, oran-orantı yoluyla problem kurma, parça-bütün ilişkisini kuramama, bölen kesrin paydasına bölme, bölme yerine çarpma işlemini kullanma ve bölen kesir sayısının ters çevrilerek çarpılması yoluyla problem kurma*" şeklinde belirlemişlerdir. Benzer şekilde literatürde öğretmen adayların kurdukları problemlerin analizinde, kesirlerde bölme işleminin bağlamını çarpma işleminin bağlamıyla karıştırdıkları, oranlama yaparak problem kurmaya yöneldiklerini ve problem bağlamında birimi ifade etmede zorluklar yaşadıklarını ifade edilmiştir (Işık, 2011; Seçir, 2017). Işık (2011) öğretmen adaylarının basit kesirlerde çarpmaya yönelik yapılan işlemlerde çarpımın sonucunun daha küçük olacağını kavrayamadıklarını gözlemiştir. Işık (2011) bunun sebebini adayların çoğunlukla doğal sayılarda problemlerle karşılaştıkları çarpma işleminde sonuç çarpanlardan daha büyüktür' mantığıyla hareket ettikleri ile ilişkilendirmiştir. Gökkurt, Şahin, Soylu, ve Soylu (2013) ise öğretmen adaylarının öğrencilerin kavram hatalarını tespit etseler bile, kavram hatalarını düzeltebilmek için uygun pedagojik yaklaşımı sergileyemediklerini ifade etmişlerdir. Seçir (2017) öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin özelleştirilmiş alan bilgilerinin model çizme, problem kurma, matematiksel ifade yazma, gerekçelendirme ve açıklama yapma deneyimleri yoluyla geliştiği belirtmiştir.

Kesirlerin kalıcı ve etkili öğretimi için eğitimde somuttan soyuta ilkesi göz önüne alınarak materyal kullanımı ve gerçekçi bağlamlarla ilişkilendirilmesi önem taşımaktadır. Öte yandan Wu (1999) kesirlerde bölme işleminin öğretiminde somut materyal kullanımının olumlu ve olumsuz sonuçlar doğurabileceğini savunmuştur. Ona göre kesirlerin bölme işleminde görsel yardımcıların kullanımı sadece basit kesirlerin bölümünde elverişlidir ve öğrenciler görselleştirilemeyecek problemleri de anlamalılardır. Hiebert ve Carpenter (1992) da benzer şekilde somut materyal ile ilişkilendirmeye çalıştığımız matematiksel kavramların uzak olması, materyalin yanlış yorumlanmasına neden olabileceğini belirtmişlerdir. Streefland (1991) ve Van den Heuvel-Panhuizen (2003) ise gerçekçi bağlamların kavram oluşturmada etkili bir yöntem olduğunu vurgulamışlardır.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma bölme işlemleri ile ilgili özelleştirilmiş alan bilgileri Ball ve diğerleri (2008) tarafından ortaya attığı teorik çerçevede incelenmiştir. Çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleri konusundaki özelleştirilmiş alan bilgilerinin öğretim etkinliklerine nasıl yansıdığını ortaya çıkarmaktır. Bu amaca yönelik olarak şu sorulara cevap aranmıştır:

- İlköğretim matematik öğretmen adayları kesirlerde çarpma ve bölmeyi gerçekçi problemlerle nasıl temsil etmektedirler?

- İlköğretim matematik öğretmen adayları kesirlerde çarpma ve bölmeyi hazırladıkları ders planlarında nasıl temsil etmektedirler?

- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerini mikro öğretim etkinliklerinde nasıl temsil etmekte, açıklamakta ve gerekçelendirmektedirler?

Bu çalışma materyal kullanmanın önemli olduğunu düşünen öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleri ile ilgili özelleştirilmiş alan bilgilerinin hazırladıkları ders planlarına ve öğretim esnasındaki temsil, açıklama ve gerekçelendirme becerilerine nasıl yansıdığını karşılaştırmalı olarak inceleyerek öneriler sunmasıyla literatüre katkı sağlayacaktır.

2.Yöntem

2.1. Araştırmanın Modeli

Araştırmanın modeli nitel bir çalışma olan durum çalışmasıdır. Durum çalışması tarama modelleri evrendeki belli bir ünitenin (birey, aile, okul, hastane dernek vb.), derinliğine ve genişliğine, kendisini ve çevresi ile olan ilişkilerini belirleyerek, o ünite hakkında bir yargıya varmayı amaçlayan tarama düzenlemeleridir (Karasar, 2005: 86). Bu çalışmada incelenen durum, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerini ders planlarını hazırlama sürecinde ve ders anlatım sürecinde gerçekçi problemlerle ve somut materyallerle ilişkilendirmeleridir.

2.2. Çalışma Grubu

Bu çalışmanın katılımcıları İç Anadolu'da bulunan bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği 4. Sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Çalışmaya 2019-2020 eğitim öğretim yılı ikinci dönem öğretmenlik uygulaması dersinde uygulanmıştır. 35 İlköğretim matematik öğretmeni adaylarından 7 öğrenci amaçlı örneklem yoluyla seçilmiştir. Öğretmen adaylarının isimleri "Hale, Saadet, Züleyha, Seda, Burcu, Şeyda, Necla" olarak kodlanmıştır. Seçim Haser, Kayan ve Bostan (2013) tarafından uyarlanan matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin inanışlar ölçeği uygulanacak üç inanış modeline göre ikinci aşamada olan öğrenciler arasından seçilmiştir. Katılımcıların, inanç modeline göre ikinci aşamada olan öğrenciler arasından seçilmesinin nedeni, inanç boyutunun çalışmada etkisini yok etmektir. Matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin inanışlar ölçeğine göre ikinci aşamada bulunan öğrenciler matematiği dinamik bir disiplin olarak düşünürken, matematik öğrenme ortamlarını öğrencilerin fikirlerini geliştirecek şekilde tasarlanması gerektiğine ve matematiksel fikirlerin anlamak için öğrencilerin oluşturma sürecinde yer almaları gerektiğine inanırlar.

2.3. Veri Toplama Araçları

Çalışmada kullanılan veri toplama araçları öğretmen adaylarının oluşturdukları gerçekçi problemler, ders planları, mikro öğretim esnasında öğretmen adaylarından alınan ses ve video kayıtları ve öğretmen adaylarından görüşme esnasında alınan ses kayıtlarının transkriptinden oluşmaktadır.

2.4. Veri Toplama Süreci

Araştırma 2019- 2020 eğitim öğretim yılının ikinci döneminde sekiz hafta sürmüştür. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiğin doğasına, matematiğin öğretimi ve matematiğin öğrenimine ilişkin inançları Kayan, Haser, Işıksal ve Boston (2013) tarafından uyarlanan matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin inanışlar ölçeğine göre ikinci aşamada olan öğrencilerin bu çalışma için seçilmesinin ardından veri toplama süreci dört aşamada gerçekleştirilmiştir.

Veri toplama işleminin ilk aşamasında öğretmen adaylarına Gerçekçi Matematik Eğitimi yaklaşımı anlatılmıştır. Matematik problemlerinin dil anlatım, bilimsel yönden ve teknik açıdan bulundurması gereken özellikler öğrencilerle paylaşılmıştır. Ardından öğretmen adaylarına Işık (2011)'ın ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerine yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizini yaptığı çalışmasında kullandığı dört çarpma, dört bölme işlemini içeren sekiz maddeden oluşan "problem kurma testi" uygulanmıştır. Öğretmen adaylarından problem kurma testinde verilen işlemlerle ilgili gerçekçi problemler kurmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarına sekiz problemi oluşturmaları için süre kısıtlaması yapılmamıştır. Bu süre ortalama 90 dakika sürmüştür. Öğretmen adaylarının oluşturdukları problemler incelenmiş, hatalı problemler hata nedenleri ile birlikte belirlenmiştir.

Veri toplama sürecinin ikinci aşamasında öğretmen adaylarının oluşturdukları ders planları incelenmiştir. İlköğretim matematik öğretim programı rehberliğinde 'Bir doğal sayıyı bir kesre ve bir kesri bir doğal sayıya böler, bu işlemi anlamlandırır.' ve 'İki kesrin çarpma işlemini yapar ve anlamlandırır." kazanımları için tasarlanacak bir ders için ders planı hazırlamaları öğretmen adaylarından istenmiştir. Bu iki kazanıma yönelik ders planı hazırlamaları için öğretmen adaylarına bir hafta süre verilmiştir. Hazırlanan ders planları toplanmıştır. Öğretmen adaylarının hazırladıkları ders planlarında ders için kullanmayı planladıkları materyal ve gerçekçi bağlamlar gibi temsiller incelenmiştir.

Veri toplamanın üçüncü aşamasında öğretmen adaylarının hazırladıkları ders planları ışığında hazırladıkları etkinliklerden bazılarını mikro öğretim etkinliği ile sınıfta uygulamışlardır. Mikro öğretim etkinliği akıllı tahtanın, yazı tahtasının ve matematik öğretim materyallerinin bulunduğu dolabın olduğu bir sınıfta gerçekleştirilmiştir. Altı öğretmen adayı ve iki araştırmacı da mikro eğitim etkinliğini gözlemlemiştir. Araştırmacılar bu süreçte gözlemci rolünde bulunmuşlardır. Bu süreç video kayıt altına alınmıştır. Öğretmen adaylarının kullandıkları temsiller incelenmiş; matematiksel kavram, problem, materyal arasındaki ilişkiyi nasıl kurdukları, spesifik bağlam için ilişkileri ortaya çıkarabilecek yönergeleri verme ve konuyu açıklama ve gerekçelendirme becerileri incelenmiştir. Bu aşamada ayrıca öğretmen adayının hazırladığı ders planıyla mikro öğretim esnasındaki uygulamaları arasındaki farklar da ortaya çıkarılmıştır.

Veri toplamanın son aşamasında ise ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının materyal kullanma ve kullandıkları materyali gerçekçi problemlerle destekleme becerilerinin netleştirilmesi amacıyla öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmede veri toplamanın ilk aşamasında kesirlerde işlemlerine yönelik hatalı problem kurguları üzerinden sorular sorulmuş, bu işlemleri modellemeleri ve açıklamaları istenmiştir. Bu süreçte araştırmacılar ve öğretmen adayı etkileşim içinde olmuştur. Görüşmeler yaklaşık 20 dakika sürmüştür. Bu süreçte öğretmen adayı ve araştırmacı arasında geçen diyaloglarla araştırma verisinin daha açık ve anlaşılır olması sağlanmıştır.

2.5. Veri Analizi

Veri toplama sürecinin birinci aşaması ile öğretmen adaylarının kurdukları problemler incelenmiş, verilen işlemlerle ilgili gerçekçi problemler oluşturma ile ilgili hata türleri için kodlar oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarının her bir işlem ile ilgili geçerli bir bağlam oluşturabilmiş ise "+" ile geçerli bir bağlam oluşturamamış ise "-" ile gösterilmiş, her bir işlem çarpma işlemleri ve bölme işlemleri için ayrı birer tabloda toplanmıştır. Öğretmen adayların oluşturdukları problemlerden örnekler sunulmuş, hata nedenleriyle ilgili açıklamalar yapılmıştır.

Veri toplama sürecinin ikinci aşamasında toplanan öğretmen adaylarının oluşturdukları ders planları doküman analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının hazırladıkları ders planlarında oluşturdukları temsiller kategorilere ayrılmıştır. Kategoriler Lesh vd. (1987) sunduğu gerçek yaşam durumları, manipülatifler (kesir çubuğu, vs.), resimler veya diyagramlar (sayı doğrusu, bölge, soyut modeller, vs.), sözlü semboller, yazılı semboller kategorileri içinde, gerçek yaşam durumları, modeller ve manipülatifler (materyaller) başlığı altında değerlendirilmiştir. Bulgular bir tabloda sunulmuştur. Ayrıca kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerine ilişkin çizilen model türleri uzunluk, alan, küme, gerçek nesne modelinden hangilerini seçtikleri incelenmiştir.

Veri toplamanın üçüncü aşamasında öğretmen adaylarının ders planları ışığında hazırladıkları mikro öğretim etkinliği esnasında video kaydı alınıp, video transkript edilmiştir. Toplanan verilerde kavramsal kodlama ve sınıflandırmalar yapılmıştır. Kodlar Ball ve arkadaşları (2008) ÖAB'nin üç matematiksel görev olan "temsil, açıklama ve gerekçelendirme" kavramsal çerçevesi içerisinde oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarının seçtikleri temsilller ile ilişkili olarak genel kurallar veya algoritmaların altında yatan anlamı nasıl açıkladıkları *(Açıklama)* kodu başlığı altındaki alt kodlar Koren'in belirlediği (2004); *matematiksel temelli açıklama, uygulama temelli açıklama ve kural temelli açıklama* şeklindeki alt kodlara göre belirlenmiştir. Matematiksel temelli açıklama sadece matematiksel kavramları içerirken, uygulama temelli açıklama matematiksel ifadelere anlam verecek gerçek yaşam bağlamına dayalı ve/veya manipülatifler kullanan açıklamalardır, kural temelli açıklamalar ise matematiksel düşüncelere dayanmayan açıklamaları içerir. Öğretmen adaylarının alternatif strateji ve çözümlerinin matematiksel olarak uygun olup olmadığını nasıl değerlendirdikleri ve gerekçelendirdikleri *Gerekçelendirme* koduyla belirlenmiştir. Hunter (2008) *görsel, sözel ve sayısal* olarak belirlediği altkodlara göre değerlendirilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının materyal seçimleri incelenmiş; matematiksel kavram, problem, materyal arasındaki ilişkiyi nasıl kurduklarının incelenmesi için içerik analizi kullanılmıştır. Bireylerin görüşlerini yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara ve öğretmen adaylarının gösterimlerine yer verilmiştir. Bu aşamada ayrıca öğretmen adayının hazırladığı ders planıyla mikro öğretim esnasındaki uygulamaları arasındaki farklar da ortaya çıkarılmıştır.

2.6. Verilerin Geçerliliği ve Güvenirliği

Öğretmen adaylarının oluşturdukları dokümanlar, uygulamanın hemen ardından analiz edilmiştir. Detaylı analiz yapılırken tüm veri toplama araçlarından gelen veriler göz önüne alınarak bulgulara ulaşılmıştır. Ayrıca, dokümanların, video ve ses kayıtlarının transkriptiyapıldıktan sonra, değerlendirme iki araştırmacı tarafından tek oturum şeklinde yapılmış; bu süreç, araştırmacılar arasında tam uzlaşı sağlanana kadar devam etmiştir.

Araştırmanın Etik Izinleri

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir.

Etik kurul izin bilgileri: Etik değerlendirmeyi yapan kurul adı =Kırıkkale Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu

Etik değerlendirme kararının tarihi=18.03.2021

Etik değerlendirme belgesi sayı numarası=03

3.Bulgular

Araştırmanın alt problemleri bulguların alt başlıkları olarak ele alınmıştır.

3.1.İlköğretim Matematik Öğretmen Adayları Kesirlerde Çarpma Ve Bölmeyi Gerçekçi Problemlerle Nasıl Temsil Etmektedirler?

Yedi ilköğretim matematik öğretmen adayının ilk satırda belirtilen kesirlerde çarpma işlemi ile gerçekçi problem yazımının temsilinin doğruluğu ya da yanlışlığı Tablo 1'de kategorileştirilmiştir. Tablo 1'de adı geçen öğretmen adayı kesirlerde çarpma işlemi ile ilgili geçerli bir bağlam oluşturabilmiş ise "+" ile geçerli bir bağlam oluşturamamış ise "-" ile gösterilmiştir.

Tablo 1. *Öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma işlemiyle ilgili yazdıkları problemlerin analizi*

	$\frac{2}{5}\times\frac{6}{1}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$

Hale	-	+	+	-
Saadet	+	-	+	-
Züleyha	-	+	+	+
Seda	-	+	+	-
Burcu	+	+	+	-
Şeyda	+	-	+	-
Necla	+	-	-	+

Tablo 1 incelendiğinde öğretmen adaylarının basit kesirlerde çarpma işlemi ile ilgili genellikle problem bağlamları oluşturabildikleri fakat bileşik kesirlerde çarpma işlemlerinde uygun olmayan gerçekçi problem kurdukları (bölme ile karıştırma, yanlış işlem, yanlış ifade kategorilerinde) gözlenmiştir (Tablo 3). İki basit kesrin çarpımıyla ilişkili problem yazımında hata yapan iki öğretmen adayının başlangıçta tanımladıkları bütün ya da çokluğu iki kesir için de ifade edemedikleri gözlemlenmiştir.

Tablo 2. *Öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma işlemiyle ilgili oluşturdukları problemlerden örnekler*

No	Öğrenci	İşlem	Problem
1	Şeyda	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$	Yandaki şekilde bir evin 2 duvarı verilmiştir. 1 duvarın 2/3'si boyanıyor. Daha sonra boyanan kısmın 4/5'ü de boyanıyor. Bu duvarın kaçta kaçı boyanmıştır?
2	Şeyda	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$	Yarım pastanın 1/6'i ne kadardır?
3	Hale	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$	Ayşe yarısı su dolu bir şişenin 1/6'sını içerse şişenin ne kadarını içmiş olur?
4	Saadet	$1\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$	Bir tam çikolata ve aynı çikolatanın çeyreği var. Bunu kendisi dahil 4 arkadaşıyla dağıtıyor. Bir kişiye ne kadar düşer?
5	Züleyha	$\frac{2}{5} \times 6$	Ayşe'ye annesi her birinde 5 adet yumurta olan kolilerden 6 adet olmasını istemiştir. Ayşe yumurta kolilerini getirirken her bir kolideki 3 yumurtayı kırmıştır. Sağlam yumurta miktarını kesir ile ifade ediniz.
6	Seda	$\frac{2}{5} \times 6$	Ali 5 ekmeği önce 2 parçaya ayırmış sonra ekmeklerin masadakilere yetmeyeceğini anlayınca böldüğü parçaları tekrar 6'ya bölmüş ve masadakilere dağıtmıştır. Bir kişiye gelen ekmek tüm ekmeklerin kaçta kaçıdır?

Kesirlerde çarpma işlemiyle ilgili gerçekçi problem temsillerden 1. Temsil incelendiğinde Şeyda'nın oluşturduğu gerçekçi problemde *bir bütünün 2/3'ünün 4/5'ini* hesaplayarak problem kurduğu gözlemlenmektedir. Yukarıdaki 2. Temsil ve 3. Temsil incelendiğinde öğretmen adaylarının *bir bütünün yarısını alarak temsil etmesiyle* gerçekçi problem kurduğu gözlenmektedir. Saadet 4. Temsil ile bölme işlemi üzerinden çarpma işlemini anlamlandırdığı görülmektedir. 5. Temsil incelendiğinde Züleyha'nın basit kesri tam sayı ile çarpma ile ilgili oluşturduğu gerçekçi problemde soru kökünde sağlam yumurta sayısını sorması ile *birimi yanlış ifade etmesi nedeniyle* işlemi problem ile temsil edememiştir. 6. Temsil incelendiğinde Seda'nın birçok hata yaparak öncelikle *parça bütün ilişkisini* temsil edememe ve *çarpma yerine bölme işlemi ile ifade etme* hatası ile gerçekçi problemi oluşturamadığı gözlemlenmektedir.

Yedi ilköğretim matematik öğretmeni adayının kesirlerde bölme işlemi ile oluşturdukları gerçekçi problem temsilleri Tablo 2'de kategorileştirilmiştir. Tabloda adı geçen öğrenci kesirlerde bölme işlemi ile ilgili geçerli bir bağlam oluşturabilmiş ise "+" ile geçerli bir bağlam oluşturamamış ise "-" ile gösterilmiştir. Hiç problem oluşturamayan öğrenciler "boş" şeklinde kategorileştirilmiştir.

Tablo 3. *Öğretmen adaylarının kesirlerde bölme işlemiyle ilgili yazdıkları problemlerin analizi*

	$3 \div \frac{3}{5}$	$\frac{7}{8} \div \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$	$4\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{6}$
Saadet	-	Boş	-	Boş
Hale	-	-	+	-
Züleyha	-	-	-	-
Seda	-	-	-	Boş
Burcu	+	+	-	+
Şeyda	-	+	-	-
Necla	+	+	+	-

Tablo 3 incelendiğinde, öğretmen adaylarının genel anlamda kesirlerde bölme işlemleriyle ilgili gerçekçi problem oluşturmada güçlük yaşadıkları gözlemlenmektedir. Öğretmen adaylarından Züleyha ve Seda bölme ile verilen işlemlerin hiçbirinden problem oluşturamamışlardır. Burcu ve Necla'nın 4 işlemden 3'üne ilişkin problem oluşturabilmiştir. Necla'nın oluşturamadığı problem tipi tam sayılı kesrin tam sayılı kesre bölündüğü durumdur. Verilen işlemlerin problem yazımına dönüşümü tek tek ele alındığında, tam sayılı kesrin tam sayılı kesre bölünmesi ile ilgili gerçekçi problemin yazılması yedi öğretmen adayından biri tarafından doğru yapılmış iken (%14), $^7/_8 : {}^1/_4$ işleminin ise yedi öğrenciden ikisi tarafından (%42) gerçekçi probleme dönüştürülebildiği diğer işlemlerin ise yedi öğretmen adayından ikisi tarafından doğru bir şekilde oluşturulduğu (%28), görülmektedir. Öğretmen adaylarının kesirlerde bölme işlemiyle ilgili oluşturdukları problemlerden örnekler Tablo 3'de örnekler sunulmuştur.

Tablo 4. *Öğretmen adaylarının kesirlerde bölme işlemiyle ilgili oluşturdukları problemlerden örnekler*

Temsil No	Öğrenci	İşlem	Problem
1	Hale	$3 \div \frac{3}{5}$	3 kova suyu 5 tane şişeye ve her şişeyi 3/5'ü dolacak şekilde su paylaştırırsak toplam olarak şişelerin doluluk oranı ne olur?
2	Saadet	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$	2 arkadaş bir kitap alıyorlar. İkisi de kitapta okunacak yerleri eşit sayfa okuyacak şekilde paylaşıyor. Arkadaşlardan biri kendi

			okuyacağı sayfaları 5 günde her gün aynı miktarda sayfa okuyor. 1 günde kaç sayfa olur?
3	Necla	$4\frac{2}{3} \div \frac{11}{6}$	Ayşe'nin elinde 4 dolu su şişesi ve 1 tane de 2/3'si dolu su şişesi vardır. Bu dolu şişeleri de 1 1/6 adet bardağa paylaştırıyor. Her bardağa ne kadar su miktarı düşer?
4	Burcu	$1\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}$	Bir yolun 1 1/4'ini gidip daha sonra gittiği yolun 1/5'ini giden kişi ne kadar yol gitmiştir?

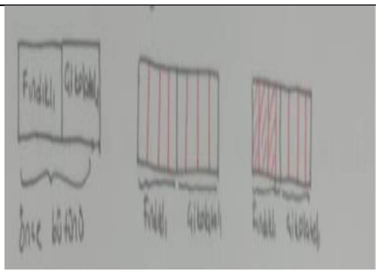
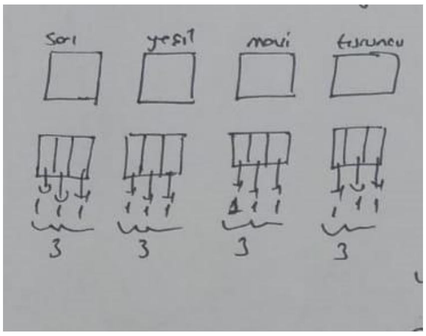
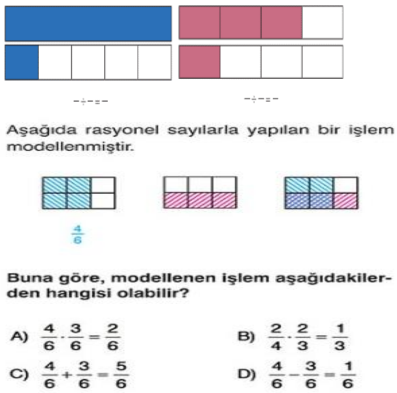
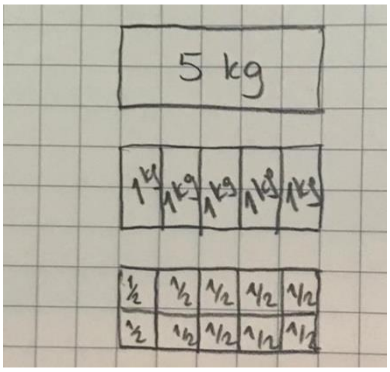
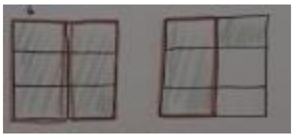
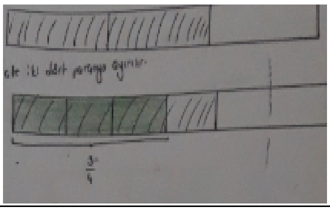
Tablo 4'deki 1. Temsilde verilen Hale'nin yazdığı gerçekçi problem incelendiğinde soru kökünün hatalı oluşturulduğu görülmektedir. İfadede şişelerin 3/5 doluluk oranı ile oluşturulacağı soru içinde ifade edilirken, soruda doluluk oranı sorulmuştur 2. Temsil incelendiğinde Saadet'in problem durumundaki böleni yanlış bir şekilde ifade ettiği ve soru kökünü doğru bir şekilde oluşturamadığı görülmektedir. Kitabın toplam sayfa sayısını soru içinde belirtmeden, bir günde okunacak sayfa sayısını sormaktadır. Aynı zamanda okunacak kitap sayfalarını arkadaşların paylaşması durumu da anlamlı değildir. Yukarıdaki 3. Temsil incelendiğinde Necla'nın yazdığı gerçekçi problem detaylı incelendiğinde ölçme yoluyla tam sayılı kesirlerde bölme işlemine uygun problem oluşturmaya çalışmasına rağmen adet kavramını hatalı kullandığı (*birim karmaşası)* görülmektedir. Yukarıdaki 4. Temsil incelendiğinde Burcu'nun yol örneği verirken *bir bütünden daha fazlasını temsil etmesiyle* gerçekçi problem kurmada anlamsız bir sonuca vardığı gözlemlenmektedir.

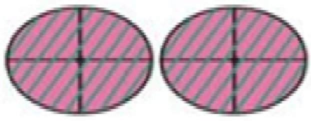
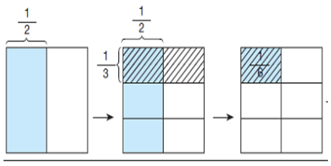
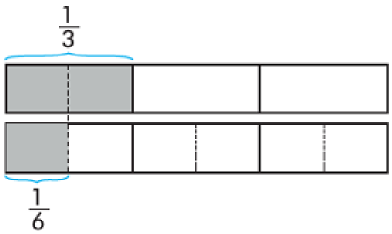
3.2.İlköğretim Matematik Öğretmen Adayları Kesirlerde Çarpma Ve Bölme İşlemlerini Hazırladıkları Ders Planlarında Nasıl Temsil Etmektedirler?

Öğretmen adaylarının hazırladıkları ders planları gerçekçi problem içermesi, işlemin model ile desteklemesi ve materyal kullanımı planlama kriterleri açısından incelenmiştir. Öğretmen adaylarının incelenen bu kriterdeki ders planlarından temsil örnekleri Tablo 5'de gösterilmektedir.

Tablo 5. *Öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili hazırladıkları ders planlarında temsil örnekleri*

Kişiler	Gerçek yaşam durumları temsili	Modeller Temsili	Materyal ile temsili

Saadet	Fatma hanım oğlu ve arkadaşları için yarısı çikolatalı yarısı fındıklı olan bir tepsi kurabiye yapmıştır.Çocuklar fındıklı kurabiyelerin $\frac{3}{4}$ ‘ünü yemişlerdir. Buna göre çocuklar tüm kurabiyelerin kaçta kaçını yemişlerdir?		Ders planında materyal kullanımı içermemektedir.
Hale	Alev hanım evine gelen misafirlere kahvenin yanında çikolata ikram edecektir. Her bir misafir için kahvenin yanına kutudaki çikolataların $\frac{2}{24}$’ünü koyacaktır. Çikolata kutusunun $\frac{5}{6}$’sı dolu olduğuna göre Alev hanımın evine kaç misafir gelmiştir?		4 tane farklı renkte karton- makas – kalem .
Züleyha	Semra için bir doğum günü partisi düzenleyen annesi, eş büyüklükte 5 pasta sipariş eder. Doğum gününe Semra’nın 16 arkadaşını davet eden annesi, her bir arkadaşının çeyrek pasta yiyebileceğini düşünür. Sizce verilen pasta siparişi yeterli midir?		kesir takımı
Seda	Kışın sokak hayvanlarının aç kaldığını ve yiyecek bulamadığını gören Ahmet, marketten 5 kilogramlık bir köpek maması alıp her köpeğe 1/2 kilogram mama veriyor. Ahmet'in aldığı mamayla bu şekilde kaç köpeği besleyebileceğini bulalım.		şeffaf kesir kartları
Burcu	Ders planında gerçekçi problem bulunmamaktadır.		Bilgisayar destekli dinamik geometri programı (geogebra programı)

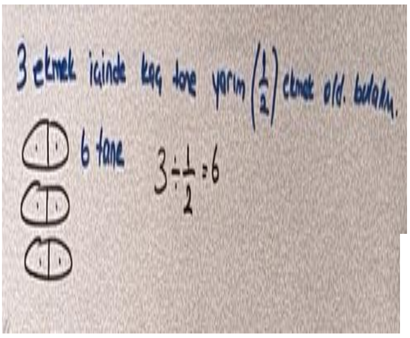
Şeyda	Emine Hanım, bir sürahideki limonatanın $\frac{2}{3}$ litrelik kısmını, $\frac{1}{3}$ litre limonata alan bardaklara boşaltmıştır. Emine Hanım'ın bu iş için kaç tane bardak kullandığını nasıl bulabileceğinizi söyleyiniz.	 	limonata, bardak gibi görseller
Necla	Esin evden okula giderken yolun 1/3km'lik kısmını 2 dakikada yürümektedir. Esin'in bir dakikada toplam yolun ne kadarını yürüdüğünü bulalım.		Şeffaf kesir kartları

Gerçekçi problem yazımının ardından öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili hazırladıkları ders planlarında konuyu gerçekçi problem ile temsile çoğunlukla yer verdikleri gözlenmektedir. Tablo 5'de yer alan öğretmen adaylarının konuyu modelle (diyagram) temsil etmeleri incelendiğinde ders planında genellikle alan modeline yer verildiği, küme modeli ya da uzunluk modeli gibi modellere vurgu yapılmadığı belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ders planları materyal kullanımı açısından incelendiğinde; ders planında şeffaf kesir kartları, kesir takımları, bilgisayar destekli Geogebra programlarının kullanılmasının planlandığı görülmektedir (Bkz Tablo 5). Öğretmen adaylarının temsiller arasında geçiş yapmasının planlanması açısından incelendiğinde; öğretmen adaylarından sadece Şeyda'nın aynı bağlam üzerinde gerçekçi problem, materyal kullanımı ve model gösterimini eş zamanlı planladığı, diğer öğrencilerin farklı bağlamlar için farklı temsiller için planlama yaptıkları görülmektedir. Öğrencilerden Saadet, Necla ve Seda gerçekçi problem ile model çizimi arasında temsil geçişlerini planlarken, Hale gerçekçi problem ve materyal temsilleri arasında geçişi planlamıştır. Necla ders planında materyal kullanımını, bağlamdan ve modelden bağımsız bir şekilde planlamıştır. Züleyha ve Burcu ise aynı bağlam üzerinden temsiller arası geçişleri planlamadığı görülmektedir. Burcu'nun ders planında işlemi temsil eden hiçbir gerçekçi bağlam bulunmamaktadır.

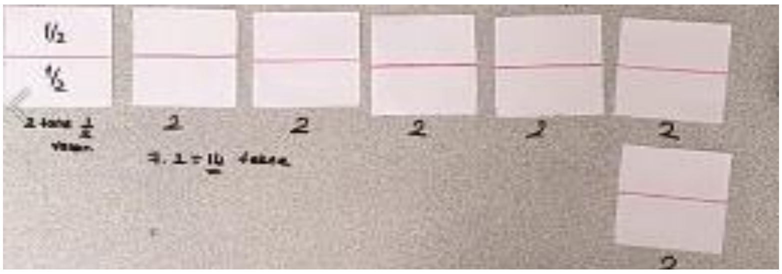
3.3.İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Kesirlerde Çarpma Ve Bölme İşlemlerini Mikro Öğretim Etkinliklerinde Nasıl Temsil Etmekte, Açıklamakta Ve Gerekçelendirmektedirler?

Öğretmen adayları kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerine yönelik hazırladığı ders planlarını uygulamışlardır. Bu bölümde öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili öğretim etkinliklerinin uygulanmasına ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Bu bölümde ayrıca öğretmen adaylarının araştırmacı ile öğretmen adayı arasında yarı yapılandırılmış görüşmeden elde edilen öğretmen adaylarının açıklama ve gerekçelendirmelerini ortaya çıkarmak amacıyla bazı diyaloglar yer almaktadır.

Yapılan incelemede veri toplamanın birinci aşamasında gerçekçi problemleri doğru oluşturan ve ders planlarında temsiller ve açıklamalar arasında geçişleri planlayan öğrencilerin uygulama sırasında konuyu daha iyi açıkladıkları ve gerekçelendirdikleri görülmüştür. Bununla ilişkili olarak Necla'nın öğretim esnasında kullandıkları etkinliklerden örnekler Şekil 1a ve Şekil 1b'de gösterilmiştir.



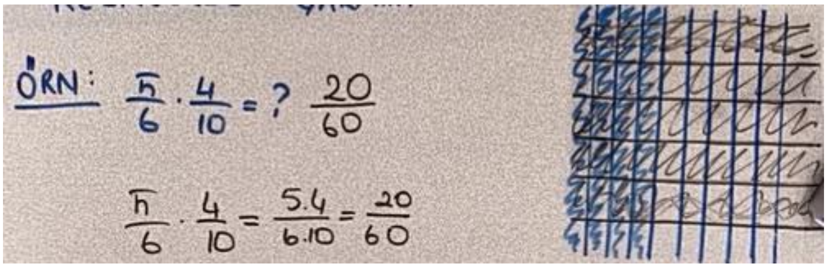
Şekil 1a. **Necla'nın kesirlerde bölmeye ilişkin modeli**



"Ezgi ve arkadaşları origami ile tekne yapmak için elindeki 3 adet elişi kağıdını paylaşmıştır. Her tekne için el işi kağıdının ½ sini kullandığına göre Ezgi ve arkadaşlarının elindeki kağıtları kullanarak origami ile kaç tane yapacağını bulalım."

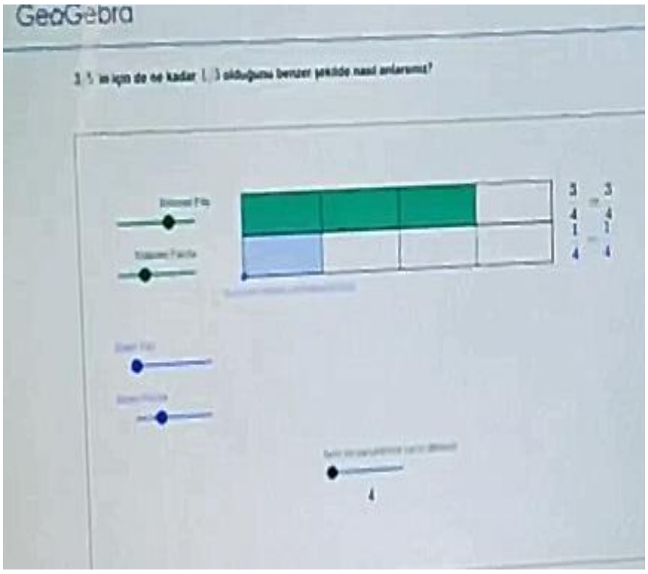
Şekil 1b. Necla'nın kesirlerde bölmeye ilişkin oluşturduğu materyaller ve problem

Şekil 1b'de görüldüğü gibi Necla kesirlerde bölme işlemini *gerçek yaşam durumları ve resim ile temsil* ile yarım ekmek ve eşit kağıt parçaları örneklerini kullanarak *uygulama temelli açıklamalar* ve *görsel, sözel ve sayısal gerekçelendirmeler* kullanmıştır. Necla kesirlerde çarpma işlemini ise Şekil 2'de görüldüğü kendisinin oluşturduğu şeffaf kesir kartlarını *(resim- diyagram ile temsil)* materyal olarak tercih ederek *görsel ve sayısal gerekçelendirme* oluşturmuştur.

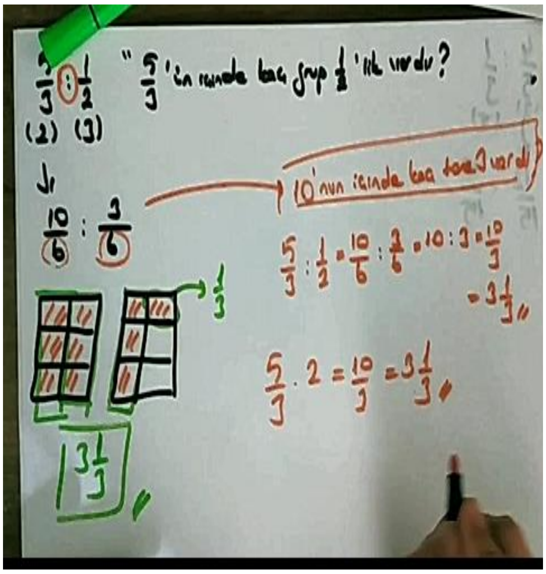


Şekil 2. Necla'nın kesirlerde çarpmaya ilişkin modeli

Kesirlerde çarpma ve bölme işlemleriyle ilgili gerçekçi problem yazımında diğer öğretmen adaylarına göre daha başarılı olan Burcu da öğretim esnasında *gerçek yaşam durumları ve manipülatif ile temsiller* yapmış, *görsel sayısal gerekçelendirmeler* ve *uygulama temelli açıklamalar* kullanmıştır. Burcu'nun Geogebra kullanımı ile dinamik bir şekilde desteklediği öğretiminden örnek Şekil 3a'da verilmiştir.



Şekil 3a. Burcu'nun GeoGebra kullanarak kesirlerde bölmeye ilişkin modeli



Şekil 3b. Burcu'nun kesirlerde bölmeye ilişkin modeli

Şekil 3a incelendiğinde Burcu mikro öğretimde $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ kesrinin sonucuna ulaşmak için hem Geogebra uygulamasına başvurduğu hem de sayısal sonucu A4 üzerinde model oluşturarak gerekçelendirdiği görülmektedir. Şekil 3b'de Burcu mikro öğretim analizinde bileşik kesrin basit kesre bölümünde $\frac{5}{3} \div \frac{1}{2}$ kesrinin sonuca ulaşılmasını ifade ederken paydaları eşitleyip modelleme yaparak " $\frac{10}{6}$ kesrinin içerisinde kaç adet $\frac{3}{6}$'lık grup vardır? Ya da paydaları eşit olduğu için 10'un içerisinde kaç adet 3 vardır?" soruları ile çözümü sözel olarak da gerekçelendirmiştir. Burcu'nun matematiksel temelli ve uygulama temelli temsiller konusunda geçişlerin yapması açıklama ve gerekçelendirme sürecini kolaylaştırmıştır.

Öğretmen adayları ders planlarında kesirlerde bölme işlemi ile ilgili *gerçek yaşam durumları temsiline* ya da *manipülatiflere* yer vermelerine rağmen, öğretmen adaylarından bazılarının öğretim aşamasında bu temsilleri etkili bir şekilde kullanamadıkları ya da kullanmaktan kaçındıkları görülmüştür. Bu duruma örnek oluşturan öğretmen adaylarından biri Züleyha'dır. Züleyha, kesirlerde bölme işlemiyle ilgili gerçekçi problem yazımında sorun yaşamış, ders planında bir tamsayının daha büyük bir tamsayıya bölümünü örneklemiş ve kesir takımlarını kullanmayı planlamış fakat öğretimde materyal ile konuyu temsil (*manipülatif ile temsil*) etmekten kaçınmıştır. Bu durum onun, *sözel gerekçelendirmeler* yapmasını kısıtlamış, *kural temelli açıklama* yapmaya yöneltmiştir. Züleyha'nın mikro öğretim sonrasında yapılan görüşmede $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ işlemini açıklaması ve gerekçelendirmesi istenmiştir. Araştırmacı ile Züleyha arasında şu diyalog geçmiştir:

Araştırmacı: $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ işlemini bize materyal ile anlatabilir misin?

Züleyha: (4 özdeş materyali eline alır. $\frac{1}{2}$'si olarak 2 tanesini gösterir.) Bunu 8 eşit parçaya ayıracağız.

Araştırmacı: Tahtadaki ifade peki $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ midir?

Züleyha: Aslında $\frac{1}{2}$ 'den 8 tane daha mantıklı.

Araştırmacı: Bu $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ *değil midir? Bu durum bölme anlamına mı geliyor?*

Züleyha: Aynı anlama gelmiyor.

Araştırmacı: Peki, problem ile ifade edebilir misin?

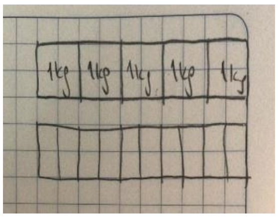
Züleyha: 'Bir elmanın yarısının 8'de 1'ini yedim ne kadarını yedim? (Sonrasında öğretmen adayı oluşturduğu problemden emin olamaz ve vazgeçer.)

Yukarıdaki diyaloglardan yola çıkılarak Züleyha'nın kesirlerde bölme işleminde böleni yanlış ifade ettiği ve bölme işlemini çarpma üzerinden yapılandırmaya çalıştığı, konuya *gerçek hayat durumları ile temsil* ederek, *uygulama temelli açıklamalar* yapamadığı görülmektedir.

Kesirlerde bölme işlemiyle ilgili gerçekçi problem yazımında sorun yaşayan öğretmen adaylarından bir diğeri Seda, ders planında bir tam sayının basit kesre bölümünü gerçekçi problem kurarak örneklemiş ve çözümünü modelleme yoluyla açıklamıştır. Ders planında şeffaf kesir kartlarını kullanmayı hedeflemektedir. Seda yarı yapılandırılmış görüşmede ders planında bulunan örneği kullanmak isteyip yeni bir gerçekçi yaşam durumu ve manipülatif kullanmaktan kaçınmıştır. Seda ders planında bulundurduğu gerçekçi problemde tam sayının basit kesre bölümünü aşağıdaki gibi ifade etmiştir. 'Kışın sokak hayvanlarının aç kaldığını ve yiyecek bulamadığını gören Ahmet marketten 5 kg'lık bir köpek maması alıp her köpeğe $\frac{1}{2}$ kg'lık mama veriyor. Ahmet'in aldığı mamayla bu şekilde kaç köpeğin doyabileceğini bulalım.'

Araştırmacı: Peki, bu durumu nasıl temsil edebilirsin?

Seda: Şu şekilde (Şekil 4)



Şekil 4. Seda'nın kesirlerde bölme işlemine ilişkin modeli

Şekil 4'de görüldüğü gibi, Seda bölme işlemini *resim ile temsil* etmeyi seçmiştir. Seda'nın bir bütün üzerinden $5 \div \frac{1}{2}$ işlemini tahtada çizerek modellediği görülmektedir. 5 tamı bir bütün olarak görüp öncelikle 1 kg'lık parçalara ayırıp daha sonrasında her 1 kg'ı $\frac{1}{2}$ parçalara ayırmıştır. Seda'nın bu çizimi işlemi gerçekçi problem temsilinden *görsel gerekçelendirme* yapmaya çalıştığı görülmektedir.

Gerçekçi problem yazımında başarılı performans gösteremeyen fakat ders planlamada gerçekçi problemlere ve materyal kullanımına yer veren öğrencilerden bir diğeri Saadet'tir. Saadet mikro öğretim etkinliklerinde somut materyal kullanımını planlamasına rağmen, mikro öğretim etkinliğinde konuyu sadece tahtada diyagram ile temsil etmiş, bu çizim üzerinden matematik temelli açıklamalar oluşturmuştur. Mikro öğretim etkinlikleri uygulamasının ardından yarı yapılandırılmış görüşmede araştırmacı ile öğretmen adayı (Saadet) arasında geçen örnek bir diyalog şu şekildedir:

Araştırmacı: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} =?$ *İşlemini nasıl temsil ederdiniz?*

Saadet: Bir şekli 3'e bölüyorum yatay olarak sonrasında 2'sini tarıyorum. 2/3 'ü buluyorum. Daha sonra 1/3 ü yani bu şekli 3 eş parçaya böl diyor. Onu da şu şekilde (dikey) bölüyorum.

Saadet: Oluşturduğumuz şekilde kesişen kısımlar çarpımımızın sonucu oluyor.

Araştırmacı: Peki bunu bize materyaller ile aktarabilir misin?

(Öğretmen adayı kesir karoları ile 1/3lük parçalar arar. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} =?$ *işlemini anlatmaya karar verir.)*

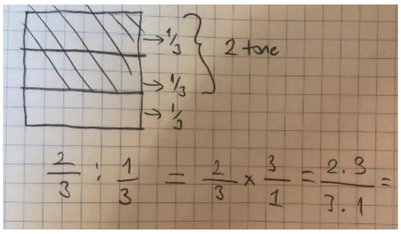
Saadet: 1/3 'lük karoları yatay olarak şöyle koydum. Daha sonra ¼'lük karoları ise dikey olarak koydum. 1 bütünü 4 eş parçaya bölmüş oluyorum ¼ oluyor.

Saadet: 1/3 'lük parça ile ¼ 'lük parçayı kesiştirdiğimde cevap 1/12 oluyor.

Araştırmacı: Peki bunu net göstermem için nasıl bir materyale ihtiyacım vardı?

Saadet: Karoların biraz daha büyük boyutluları olsa ve biraz daha şeffaf olsalar iyi olabilir. Çünkü çift taraflı bantlarla bunu tahtaya yapıştırabiliriz. Öğrencilerin görmeleri açısından bir sıkıntı olmaz.

Mikro- öğretim etkinliğinde Saadet $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \div \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} =?$ işlemi üzerinden konuyu Şekil 5 'deki diyagram ile anlatmıştır.



Şekil 5. Saadet'in kesirlerde bölme işlemine ilişkin modeli

Şekil 5 öğretmen adayının *diyagram ile temsilin* ardından *kural temelli açıklamalar* yaptığını özetlemektedir. Görüşmede araştırmacı ile Saadet arasında aşağıdaki konuşmalar geçmektedir.

Saadet: Bir bütünü 3'e bölüyor, daha sonrasında bunun 2 parçasını boyuyoruz. Daha sonrasında bunun 1/3'ünü istiyor. Yani bizim taralı alanımıza baktığımızda zaten 1/3'ten iki tane olduğunu görüyoruz. Öğrenci 1/3 'ten 2 tane olduğunu gördüğü için cevap 2'dir diyebiliyoruz.

Saadet: Daha sonrasında öğrenciye ters çevirip çarpmayı gösteriyoruz. Birinci kesri aynen yazıp, ikinci kesri ters çevirip çarpıyoruz.

Araştırmacı: Peki çizdiğiniz bu şekil ters çevirip çarpma algoritmasının mantığını bize açıklıyor mu?

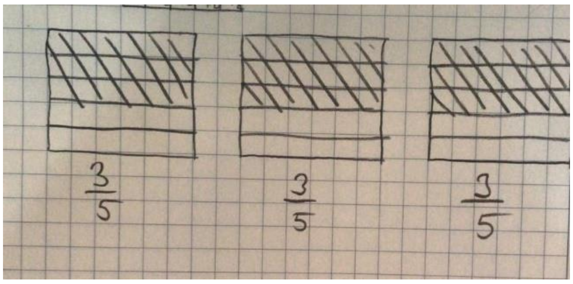
Saadet: Mantığı hakkında bir şey verilmiyor.

Araştırma: Öğrenciniz size ters çevir çarp algoritmasını açıklamanızı ve gerekçelendirmenizi isteseydiniz ne yapardınız?

Saadet: Ben de şekiller verirdim. Anı kurtarırdım, daha sonrasında daha net araştırıp bilgi verirdim.

Araştırmacı ile öğretmen adayı arasında geçen diyalog incelendiğinde öğretmen adayının basit kesrin basit kesre bölme işlemini modelleyebilmesine rağmen, bu işlemin arkasında yatan kavramsal bilgiye sahip olmadıkları, gerektiğinde *matematiksel temelli açıklamalar* yapamadığı; *kural temelli açıklamalar* ile durumu geçiştirdiğini göstermektedir.

Kesirlerde çarpma ve bölmeye ilişkin gerçekçi problem kurmakta sorun yaşayan öğretmen adaylarından bir diğeri Hale'dir. Hale'nin ders planı incelendiğinde konuyu *gerçekçi yaşam durumları* ve *diyagramlar ile temsil* etmeyi planlamasına rağmen ders anlatımını *kural temelli açıklamalar* ile yapılandırmıştır. Hale'nin mikro eğitim etkinliği ardından yapılan görüşmede $3 \div \frac{3}{5} =?$ İşlemini temsil etmesi istenmiştir. Araştırmacı ile öğretmen adayının arasında aşağıdaki konuşmalar geçmiştir.



Şekil 6. Hale'nin kesirlerde bölme işlemine ilişkin modeli

Hale: 3 tane tamımız var. Her birinin 5'de 3'ünü alacağız. Bu ifade ile sonuç aynı çıkmıyor ama bence çok doğru bir mantık.

Öğretmen adayının ifadesinden verilen işleme uygun *uygulama temelli açıklamalar* ve *sözel gerekçelendirmeler* oluşturamadığı ortaya çıkmaktadır. Oysa öğretmen adayının ders planında işlem doğru bir şekilde modellenmiştir (Tablo 4). Anlatımın ardından yapılan görüşmede, öğretmen adayı ve araştırmacı arasında diyalog şu şekilde devam etmektedir:

Araştırmacı: Bu çizimde neyi göstermeye çalıştın bize ifade edebilir misin?

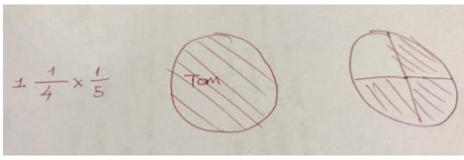
Hale: Her bir tam parçanın içinde 3/5'i göstermeye çalıştım.

Araştırmacı: Sence bütünlerin içinde başka 3/5'lik parçalar da bulabilir misin?

Hale: Aaa, evet..6 tane almadığım parça var onların içinden de alabilirim.

Yukarıda geçen diyalogdan araştırmacının sorgulamalarının ardından Hale'nin kalan 6 parçayı da fark ettiği gözlemlenmektedir.

Gerçekçi problem yazımında Hale ile benzer performans gösteren Züleyha'nın mikro öğretim sonrasında yapılan görüşme de $1\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$ işlemi yöneltildiğinde *diyagram üzerinden temsile* başvurduğu gözlemlenmektedir. Züleyha kesirlerde çarpma işlemiyle ilgili temsili bileşik kesirdeki $\frac{1}{4}$ ifadesini dikkate almadan, sonucu 1 tam üzerinden değerlendirmiştir.



Şekil 7. Züleyha'nın kesirlerde çarpmaya ilişkin modeli

Züleyha kural temelli açıklamadan kaçınmasına rağmen öncelikle işlem yapıp modeli ona uygun ifade etmek istediği dikkat çekmektedir. Bu yönden öğretmen adaylarının bileşik kesirlerde çarpma işlemlerinde temsil etmede zorluk çektiği gözlemlenmiştir. Konu ile ilişkili öğretmen adayı ile araştırmacı arasında aşağıdaki diyalog geçmektedir.

Araştırmacı: Bu işlemi gerçekçi problem ile nasıl temsil edebilirsiniz?

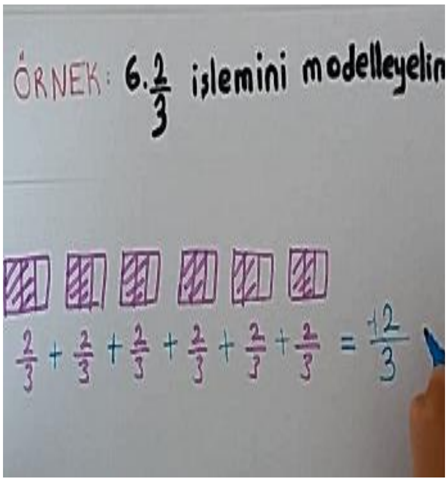
Züleyha: 1 tam $\frac{1}{4}$ elmam vardı. Bu elmanın $\frac{1}{5}$'ini aldım. Ne kadar elma almış oldum?

Araştırmacı: Bize bunu çizerek gösterebilir misin?

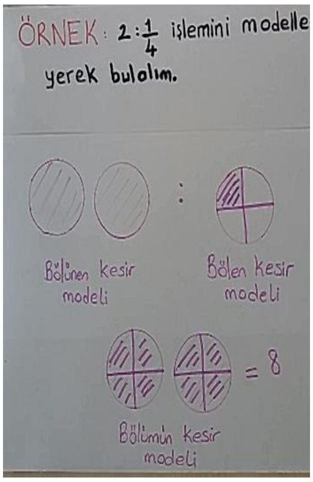
Züleyha: 20'de eşitleyelim. Hayır. Çok saçma.

Öğretmen adayının problemlerde sonuca ulaşmak için önce işlemi denediği sonrasında ise çıkarım ile modele yöneldiği gözlemlenmektedir. Bu yönüyle daha çok bileşik kesirlerde modelleme konusunda sorun yaşadığı tespit edilmiştir.

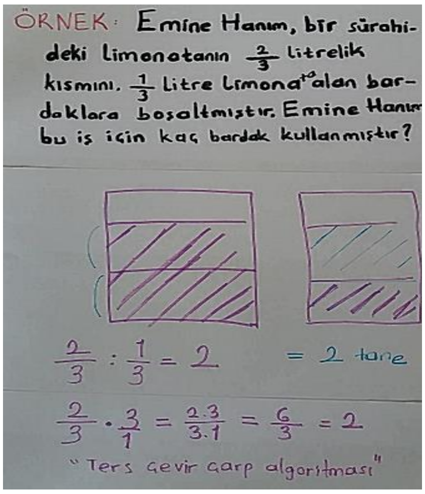
Tam sayılı kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerinin gerçekçi problem yazma konusunda başarılı olamayan, basit kesirlerde kısmen başarılı olan Şeyda'nın ders anlatımındaki gerekçelendirmeleri basit kesirler üzerinden yapması dikkat çekicidir. Şeyda'nın ders anlatımı için seçtiği örnekler aşağıdaki Şekil 8a, Şekil 8b ve Şekil 8c'de verilmiştir.



Şekil 8a. Şeyda'nın kesirlerde çarpmaya ilişkin modeli



Şekil 8b. Şeyda'nın kesirlerde bölmeye ilişkin modeli



Şekil8c. Şeyda'nın kesirlerde bölmeye ilişkin gerçekçi problem ile modeli

Şekil 8c'de bulunan modelleme, işlem ve *diyagram temsillerinin* yanı sıra Şeyma '6 tane $\frac{2}{3}$'ü toplamak 6 çarpı $\frac{2}{3}$ ile aynı şeydir.' şeklinde çarpma işlemini, '2 tamın içerisinde kaç adet $\frac{1}{4}$' lük kısım vardır?' diyerek bölme işlemini *matematiksel temelli* açıklamıştır.

4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerini hazırlıkları ders planlarındaki ve mikro öğretim etkinliklerinde nasıl temsil ettikleri, açıkladıkları ve gerekçelendirdikleri ve nasıl bağlamlar oluşturdukları araştırılmıştır.

Araştırmanın birinci bulgusu ele alındığında, öğretmen adaylarının bileşik kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerini gerçek yaşam durumları ile temsillerinde basit kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerine göre daha çok zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bu bulgular Işık'ın (2011) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerine yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizini yaptığı çalışmasındaki bulgularla paralellik göstermektedir. Literatürde kesirlerde bölme işlemine yönelik gerçekçi problem oluşturmak için ölçme anlamını, eşit paylaşım anlamına göre daha uygun olduğu (Ball, 1990) buna karşın öğretmen adaylarının iki kesrin birbirine bölünmesi ile ilgili modeli eşit paylaşım üzerinden anlamlandırmaya çalıştıkları (Ball, 1990; Işık 2011; Tirosh & Graeber, 1991) vurgulanmaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının iki kesrin birbirine bölümünü ifade ettikleri modeli literatüre benzer şekilde eşit paylaşım üzerinden yapmaya çalıştıkları gözlenmektedir. Ayrıca, tam sayılı iki kesrin bölümüyle ilgili hata kaynaklarının "bütünü çokluk olarak alma", "birim kargaşası", "parça-bütün ilişkisi kuramama" ve "bilinmeyenin olmaması" çarpma işlemi ile karıştırma, bütünden daha büyük olan bileşik kesre birim anlamı yükleme gibi literatür ile benzer alt temaların oluştuğu gözlenmektedir. (Armstrong ve Bezuk, 1995; Işık ve Kar, 2012; Seçir 2017). Lee ve arkadaşları (2011) belirttiği gibi referans alınan bütünün doğru bir şekilde ifade edilebilmesinin ve esnek bir şekilde kullanılabilmesi kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerinin temsil edilmesinde önemli bir etkendir. Bu çalışmada da litaratüre paralel olarak öğretmen adayları bütünü gerçekçi bir durumla uyumlu bir şekilde temsil etmekte zorluk çekmişlerdir (Armstrong ve Bezuk, 1995; Azim, 1995; Lee ve arkadaşları, 2011).

İlköğretim matematik öğretmen adaylarının oluşturdukları ders planları değerlendirildiğinde; öğretmen adaylarının kesirlerde çarpma şeffaf kesir kartlarını, kesirlerde bölme işleminin öğretimi için Geogebra gibi teknoloji kullanımını kullanmayı planlamışlardır. Öğretmen adayların ders planlarında kesirlerde çarpma ve bölme işlemini gerçek yaşam durumları ile temsili için basit kesirlerden örnekler vermişlerdir. Hazırladıkları gerçek yaşam durumlarını alan modelleri ile temsil etmişlerdir. Bu bulgu Seçir (2017) ve Toluk Uçar (2009) tarafından yapılan çalışmada belirtilen öğretmen adaylarının kesirlerde işlem konusunu alan modelini temsil etmeyi tercih ettikleri ile paralellik göstermektedir.

Literatürde öğretmen adaylarından kesirlerle çarpma ve bölmeye ilişkin problem veya işlem verip model çizmeleri ve model verip problem kurmaları veya işlemi matematiksel olarak yazmaları istenen birçok araştırmaya rastlanmaktadır (Li, & Kulm, 2008; Işık 2011; Seçir 2017). Bu çalışmada, öğretmen adaylarına mikro öğretim etkinlikleri için somut materyaller de sağlanmış ve bu işlemler için bu materyalleri kullanmaları istenmiştir. Bazı öğretmen adayları mikro öğretimde ders planında bulunan etkinlikleri gerçekleştirmelerine rağmen, bazılarının ise mikro öğretim etkinliği esnasında materyal hazır verildiği halde öğretim esnasında verilen ve kullanmayı planladıkları malzemeleri kullanmakta çekindikleri gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının ders planlarından yola çıkılarak materyal kullanımına önem verdikleri fakat bunu mikro öğretim etkinliklerinde yansıtamadıkları gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının temsil türleri arasında geçiş yapmakta zorluk çektikleri söylenebilir. Yani verilen işlem için problem kurmakta, benzer şekilde model ve problemi materyal ile açıklamakta yetersiz kalabilmektedirler. Matematik öğretiminde somut materyal kullanımının gerekli olduğuna inanan yedi öğretmen adayının sadece birkaçının mikro öğretim esnasında somut materyal kullanmaları dikkat çekicidir. Bu bulgu öğretmen adaylarının materyal kullanma düzeyleri ile yeterlik inançları arasında anlamlı bir ilişki bulunmadığı bulgusuyla paralellik göstermektedir (Gökmen, Budak, & Ertekin, 2015; Yetkin Özdemir, 2008; Aydoğdu İskenderoğlu, Türk, İskenderoğlu, 2016). Ayrıca bu çalışmada Yetkin Özdemir'in (2008) çalışmasında vurguladığı gibi öğretmen adaylarının materyal ile kavram arasındaki ilişkiyi kurmalarına yardımcı olabilecek yönlendirmeleri yapılandırma konusunda eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adayları ders planlarında materyal kullanımını destekleseler de mikro öğretim etkinliklerinde kaçınmalarının nedenleri, alan bilgisi eksikliğinden veya daha önce materyal kullanımına ilişkin deneyim sahibi olmadıklarından kaynaklanabilir. Buna ilişkin diğer bir bulgu gerçek yaşam durumları temsillerinde sorun yaşamayan öğretmen adaylarının (Burcu, Şeyda, Necla) ders planlarındaki açıklamaları ve mikro öğretim etkinliği ile örtüşmesidir. Şeyda ders planında aynı bağlam üzerinde temsiller arası geçişleri planlaması diğer bir deyişle bu konuda öğretime hazırlık yapması onun öğretimde de farklı temsilleri bir arada kullanabilmesi sürecini kolaylaştırmıştır. Burcu ise her ne kadar planlamada gerçekçi bağlamları ders planına yansıtmasa da, kesirlerde çarpma ve bölme konusunda gerçekçi problem yazma konusunda yeterliliğe sahip olması onun öğretim etkinliklerini başarılı bir şekilde uygulamasını kolaylaştırmıştır.

Araştırmanın üçüncü başlıktaki bulguları dikkate alındığında, öğretmen adaylarının bir modelin veya bir işlemin sonucunun neden doğru veya yanlış olduğuna ilişkin gerekçelendirme bilgilerinin çok zayıf olmadığı ancak işlemsel düzeyde olduğu tespit edilmiştir. Bu bulgu Seçir'in (2017) bulgusu ile paralellik göstermektedir. Öğretmen adayları gerektiği yerde açıklama türleri arasında geçiş yapma konusunda zorluk çektikleri görülmektedir. Bu sonuç diğer çalışmaları desteklemektedir (Alenazi, 2016; Borko, Eisenhart, Brown, Underhill, Jones, ve Agard, 1992; Chen, 2010; Gregg ve Gregg, 2007; Li ve Smith, 2007). Öğretmen adayları model çizerek, problem kurarak, verilen işlemleri sözel olarak açıklayarak veya gerçek yaşamdan örnekler vererek bu iki işlemin sonuçlarının aynı olduğunu göstermeye çalışmış fakat başarılı olamamışlar, gerektiği zamanlarda matematik temelli açıklama yapamamışlardır. Örneğin öğretmen adaylarından Saadet'in kesirlerde bölme işleminde ters çevir çarp algoritmayı açıklamaktansa işlemi gerçek hayat durumları ile ya da model çizerek açıklamaya çalışması, ancak başarılı olamaması buna örnek olabilir. Bu sonuç Ho ve Lai'nin (2012) çalışmasından elde edilen sonuç ile benzerlik göstermektedir.

Literatürde öğretmenlerin kullandığı açıklama türlerinin alan bilgilerine göre değiştiğini gösteren birçok çalışma bulunmaktadır (Ball, 1990b; Ma, 1999). Ma'nın (1999) çalışmasında işlemsel bilgiye sahip Amerikalı öğretmenler sadece işlemi somutlaştırmak için manipülatifler kullanırken, kavramsal bilgiye sahip Çinli öğretmenler sınıf içi diyalogları desteklemek için manipülatifleri kullanmışlardır. Bu çalışmada da öğretmen adayların çoğu gerek ders planlarında gerek mikro öğretim etkinliklerinde Amerikalı öğretmenler gibi işlemleri somutlaştırmak amacıyla somut materyalleri tercih etmişlerdir. Oysa çalışmanın katılımcıların tanıtıldığı bölümde de ifade edildiği üzere araştırmanın katılımcıları matematik öğretimi ve öğrenimine ilişkin inanışlar ölçeğine göre ikinci aşamada bulunan öğrencilerden seçilmiştir. Bu ölçeğe göre, matematiği dinamik bir disiplin olarak düşünen, matematik öğrenme ortamlarını öğrencilerin fikirlerini geliştirecek şekilde tasarlanmasına ve matematiksel fikirlerin anlamak için öğrencilerin oluşturma sürecinde yer almaları gerektiğine inanan öğrencilerin inançlarını uygulamaya geçirememeleri dikkat çekicidir. Bu çalışma ile öğretmen adaylarının öğretim ortamlarının tasarımı ve özel öğretim yöntemlerinin uygulanması konusunda daha donanımlı yetiştirmenin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Eğer öğretmen adaylarımız öğretmenin rolünün öğrencileri hayata hazırlamak inancı ile yetiştirmek isteniyorsa Putnam (1992) araştırmasının bulgularına paralel olarak öğretmen adaylarının birçok açıklama türünü bir arada kullanabilecek yeterlilikte yetiştirilmesi gerekmektedir. Öğretmen adaylarının gerçekçi durumları ele alan problem temelli açıklamalarla başlayan, yarı yapılandırılmış manipülatiflerle, modellerle ve görsel argümanlar ile ilerleyen ve ardından matematiksel temelli açıklamalarla ve formal açıklamalarla dersi toparlayabilecek yeterlilikte olması son derece önemlidir. Bu çalışma Tirosh ve arkadaşları (1998) yaptığı deneyimli olmayan öğretmenlerin öğrencilerin hatalarında kuralı hatırlatmayı tercih ettikleri bulgusunu da desteklemektedir. Öğretmen adayları konuya ilişkin temsiller arasında geçiş yapma konusunda kendilerini yeterli hissetmedikleri için farklı açıklama türlerinden faydalanamamış olabilir.

Araştırmanın bulguları 2008 öğretmen yetiştirme programı uygulanan dördüncü sınıf yedi öğretmen adayı ile sınırlıdır. Bu yedi öğretmen adaylarının öğretim programı çerçevesinde ya da okul dışı öğretim deneyimleri kısıtlıdır. Aytekin ve Şahiner (2020) öğretmen adaylarının öğretim deneyimlerinin artmasıyla birlikte zamanla işleme dayalı öğretimlerinin azalacağını belirtmişledir. Üniversitede verilen eğitim; bilgi öğretiminin yanı sıra, deneyim ortamları oluşturacak şekilde tasarlanmalıdır. Diğer deyişle, öğretmen adaylarına konu öğretiminde konuya özgü temsil, açıklama ve gerekçelendirme yapmak için deneyimler yaşatmalı ve onlara fırsat verilmelidir. Bu çalışmanın yapıldığı örneklem grubu 2008 öğretmen yetiştirme programına tabi olarak öğrenim görmüşlerdi. Bu programda öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgisine yönelik alabilecekleri ders Özel Öğretim Yöntemleri 1 ve 2 dersleriydi. Fakat 2018 öğretmen yetiştirme programında pedagojik alan bilgisine yönelik sayı öğretimi, cebir öğretimi, istatistik olasılık öğretimi geometri öğretimi gibi dersler eklenmiştir. Yeni programda yetişen öğretmen adaylarının bu çalışmada kullanılan metod ile mevcut durumu araştırılarak öğretim programlarının etkinlikleri üzerine karşılaştırmalar yapılabilir.

KEFAD
http://kefad.ahievran.edu.tr
ISSN: 2147 - 1037

ENGLISH VERSION

1.Introduction

Mathematics is one of the most important tools that improve the thinking structures of people. Hence, mathematics education is perhaps among the most important components of education (Umay, 2003). Students find mathematics complex because of the abstract concepts involved and they experience difficulties in understanding mathematical concepts. During this process, the teaching activities of teachers are of critical importance. The mistakes of teachers may result in a misconception dating back all the way from primary school to high school levels. For this reason, it is important that teachers have a strong field and pedagogy knowledge. The competence of teachers has been the subject of many studies in recent years. Pedagogical content knowledge was first examined by Shulman (1987) in two dimensions as 'student knowledge' and knowledge of 'teaching strategies'. Student knowledge is the knowledge of method that enables the understanding of which concepts the students will understand more easilty or identify their misconceptions and understand their learning characteristics. Whereas knowledge of teaching strategies is the knowledge of method that is related with the teacher's ability to transfer his/her knowledge to the students and to design a teaching environment for eliminating the misconceptions of students. Shulman (1987) used two fundamental structures when explaining the content knowledge. One of these is the methods used for determining the validity and reliability of the concepts and phenomena used in the field, while the second includes methods used for producing field knowledge.

After Shulman (1987), many researchers categorized the competencies of teachers in different ways. One of these was the model presented by Ball, Thames and Phelps (2008). This model is the extended version of the pedagogical content knowledge model of Shulman (1987) within the context of mathematics teaching. Mathematics teaching knowledge model was classified into two sections as content knowledge and pedagogical content knowledge (Shulman, 1987). This model emphasizes the establishment of a correlation between the mathematical concept to be taught by the teachers and the advanced forms of this concept along with special content knowledge. Ball et al. (2008) categorized the knowledge required for mathematics teaching as subject matter knowledge and pedagogical content knowledge. Subject matter knowledge is the mathematics knowledge of the teacher excluded from the knowledge on student or teaching. Subject matter knowledge is made up of three components as common content knowledge, specialized content knowledge and horizontal content knowledge. Common content knowledge is related with the knowledge of the teacher related with the mathematical conceots to be taught as well as the ability to accurately utilize mathematical terminology and symbols. Therefore, an effective teacher should be aware of the wrong responses of the students and the misconceptions in the textbook. Whereas specialized content knowledge (SCK) includes mathematical knowledge and skills that the individuals will not require or need during daily life but which are related with teaching. The specialized content knowledge presented by Ball et al. (2008) is different from the pedagogical content knowledge of Shulman (1987) as such: The mathematical demands of teaching require specialized mathematical knowledge necessary for the teachers but which are not necessary for others. In specialized content knowledge, the teachers should have an understanding of the nonstandard methods, the different interpretations and meanings related with the operations that will be taught to the students. Because teachers have to render the elements of mathematics visible to the students in addition to making pure mathematics for helping the students. Mathematics teachers require extended expertise related with specific mathematical applications. Teachers should be conscious regarding the ways of using the language of mathematics. They should have a good knowledge of effectively choosing and explaining mathematical representations and of verifying their mathematical ideas. The knowledge of a mathematics teacher related with the different meanings of fractions (part-whole, division, ratio, measurement and operator) and knowledge of the differences between these can be presented as an example.

Ball et al. (2008) stated that SCK is comprised specifically of these three mathematical tasks. One of these is known as *representations* which includes displaying the numbers and operations in a meaningful manner using pictures or manipulatives. Real life situations, manipulatives (fraction bar etc.), pictures or diagrams (numerical axis, section, abstract models etc.), verbal symbols, written symbols (Lesh, Post and Behr, 1987) can be presented as examples. The second mathematical task is explaining the underlying meaning of the algorithms or general rules that is indicated as *explanation*. Back, Manilla, and Wallin (2009) diversified the types of justification as *self-explanation, based on assumption, based on rule, unspecific/general expression* and *operational definition*. Whereas the third mathematical task is the rapid analysis and assessment by teachers coded as *justification* whether the alternative strategy and solutions of the students are mathematically suitable or not and the justification of why these are right or wrong. The classification related with justification was made by Koren (2004) as mathematics based explanation, application based explanation and rule based explanation. Whereas Levenson, Tsamir and Tirosh (2010) took into consideration the explanation and justification tasks of the teachers together and categorized them as *mathematics based explanation* and *application based explanation*. Whereas application based explanation includes realistic conditions and the use of tangible material for mathematical expressions; mathematical based explanations are based on previously learned mathematical properties and mathematical reasoning. Students expect explanations for their comments especially in classrooms where inquiry based mathematics teaching is applied. These explanations may be on how and why something is done (Perry, 2000). Raman (2002) stated that mathematics based and application based explanations are not superior to one another, that they are both beneficial and that using only on emay lead to difficulties. Similar to Raman (2002), Wu (1999) also indicated that teachers should have knowledge on the limitations of tangible material use and that coordination should be established between formal and informal explanations. Tirosh, Even and Robinson (1998) stated that experienced teachers who are aware of the misconceptons of students use different types of explanations together, whereas inexperienced teachers prefer to remind the students about the rule when the students make an error. While Putnam (1992) set forth that teachers who are of the opinion that the role of the teacher is to prepare the students for life give examples from their past experiences during the classes and that they use many different forms of explanations together.

Studies on pedagogical content knowledge illustrate that the majority of the teachers and teacher candidates have insufficient knowledge of many mathematical concepts (Aksu and Konyalıoğlu, 2015; Hacıömeroğlu, 2005; Kutluk, 2011; Işıksal and Çakıroğlu, 2006). However, the content knowledge of the teachers should be sufficient in order to be able to teach a topic in depth. It is expected that someone who understands a concept in a comprehensive anner will be able to comfortably perform all operations related with that concept. Byrnes and Wasik (1991) indicated that students who have more in-depth conceptual knowledge on a subject realize their mistakes more easily. The learning of the operations and concepts in mathematics teaching depends on associating the operations and rules with the underlying concepts (Schoenfeld, 2014). It is important during the learning process to structure and implement activities that will transform tangible experiences into abstract learning. For this purpose, Stein and Bovalino (2001) indicated that during the material planning stage successful teachers take into consideration how the materials may make an impact on the forms of mathematical thinking of students. Kılıç, Pekkan, and Karatoprak (2013) conducted a study on sixth grade students as a result of which it was reported that material use made a positive impact on the understanding of mathematical concepts by the students. Individiauls develop their association and reasoning skills through the use of materials (Yavuz, 2013). Gainsburg (2008) carried out a study in which it was illustrated that teachers experience difficulties in establishing a connection between the real life situations and the concepts they teach.

Çiftçi, Yıldız, and Bozkurt (2015) stated that the beliefs of secondary school mathematics teachers on materials and material use affect the way they use materials. Beliefs of teacher candidates on the nature, teaching and learning of mathematics are affected from their experiences during their education as well as during the period encompassing their preschool to university educations. Raymond (1997) conducted a study in which it was reported that the mathematics teaching of teachers is affected from their past school experiences, their beliefs on the nature of mathematics and the circumstances in the classroom (such as the learning motivations of the students) as well as their personal characteristics during the first years of their professional lives. Whereas Ma (1999) stated that beliefs in an innate mathematical ability affect the types of explanations as well as materials used while teaching. As an example, Ma (1999) reported in a study that teachers who think that his/her students do not have the capacity to understand the mathematical subjects taught tend to use rule based explanations. Gökmen, Budak, and Ertekin (2015) and İskenderoğlu, Türk, and İskenderoğlu (2016) put forth in their studies that teachers have high self-belief in their competency regarding the use of materials and that there is no statistically significant correlation between the level of using materials in the classroom and their competence beliefs. Even though it has been reported in a study by Yetkin Özdemir (2008) that teacher candidates have a positive attitude towards using materials during the lessons, they experience difficulties in effectively using the materials in the classroom. Yetkin Özdemir (2008) also identified that teacher candidates are insufficient in providing the necessary guidance to the students for establishing the relationship between the material and the concept.

Fractions and Fraction teaching

Fractions is a topic with important conceptual richness not only in the subject of numbers but also among many different subjects in various class levels. That is why, it is of significant importance to learn this subject (Seçir, 2017). Many studies have been conducted in the relevant literature on the learning and teaching of fractions and mathematical operations with fractions (Armstrong and Bezuk, 1995; Behr, Lesh, Post and Silver, 1983; Mack, 1990). It has been observed that majority of the previous studies generally focus on the learning of fractions and the identification of misconceptions (Birgin and Gürbüz, 2009; Mulligan and Mitchelmore, 1997). Previous studies have illustrated that the misconceptions and errors identified in students related with fractions are also observed in tacher candidates and teachers (Behr, Harel, Post and Lesh, 1994; Graeber, Tirosh and Glover, 1989; Işık, 2011).

The subject that is taught at the primary school as fractions reemerge in secondary and high school as rational numbers. The difference between rational numbers and fractions is an ongoing debate between mathematicians. For example, Lamon (2007) stated that each fraction is a rational number but that every rational number may not be a fraction. The reason for this was indicated as the fact that rational numbers may appear in decimal and percentile format different from the a/b structure appointed to fractions. Lamon (2007) also stated that while rational numbers can take on negative values, fractions cannot. Kieren (1993) indicated that rational numbers are equivalance class of fractions and that is why fractions are also rational numbers.

It has been observed that different meanings emerge as a result of the analysis of rational numbers and the problem state of a rational number indicated in the form of a/b (Behr, Wachsmuth, Post and Lesh, 1984; Ohlsson, 1988; Toluk, 2002). The five different meanings of rational numbers obtained as a result of these analyses were as follows:

part-whole meaning where the $\frac{a}{b}$ fraction determines a part-whole relation

division meaning where the $\frac{a}{b}$ fraction identifies the result of a division operation *ratio meaning* where the $\frac{a}{b}$ fraction shows the comparison of a quantity 'a' with a quantity 'b'

measurement meaning where rational numbers show the result of a measurement process

operator meaning which determines the rule for multiplication with rational numbers.

Having the knowledge of these meanings is of significant importance for interpreting fractions and the operations with fractions. It can be seen when studies related with division in fractions are examined that division in fractions is one of the operations that teacher candidates are able to make sense of the least (Aytekin and Şahiner, 2020; Li, 2008; Li & Kulm, 2008; Yeşildere, 2008). In order to learn division of fractions, it is necessary to have a sufficient knowledge of division with natural numbers as well as all fraction related concepts (Ma 1999; Armstrong and Bezuk, 1995). Similarly, Lo and Luo (2012) indicated that teacher candidates should have learned division of whole numbers well in order to learn division of fractions. Işık (2011) observed in a study conducted for examining the problems set up for teaching division of fractions to teacher candidates that the teacher candidates find it difficult to make sense of operations and numbers; that they can set up problems representing the 'measurement' meaning especially for cases when the dividend is a natural number but that they experience difficulties when the dividend is a fraction; that they only focus on the operation during the problem preparation process fort he multiplication of a natural number and a fraction regardless of the result of the operation, hence failing to grasp the part-whole relation in the problems. Işık and Kar (2012) carried out studies involving error analysis for the problems set up by the teacher candidates regarding division of fractions in which they identified the error types as,

> confusion of units, assign natural number meanings to fractional numbers, posing problem using ratio-proportion, not being able to establish part-whole relationships, dividing to the denominator of the divisor, using multiplication operation instead of division operation and posing problem through inverting and multiplying the divisor fraction.

Similarly, it has been expressed in literatüre that teacher candidates compare the context of division operation with fractions with the multiplication operation, that they resort to setting up problems by proportioning and that they experience difficulties in expressing unit within the context of the problem (Işık, 2011; Seçir, 2017). Işık (2011) observed that the teacher candidates cannot grasp the fact that the result of the multiplication operation for simple fractions will be smaller. Işık (2011) considered that the reson fort his result is the fact that the candidates act mostly based on the logic that the result of a multiplication operation is greater than the multipliers. Whereas Gökkurt, Şahin, Soylu, and Soylu (2013) indicated that the teacher candidataes cannot display a proper pedagogical approach even if they identify the misconceptions of the students. Seçir (2017) put forth that the specialized content knowledge of teacher candidates regarding multiplication and division operations with fractions is developed through experiences related to model drawing, setting up of problems, writing down mathematical expressions, justifications and explanations.

It is important for a permanent and effective teaching of fractions to use materials taking into consideration the principle of abstraction and associations with actual contexts. On the other hand, Wu (1999) defended that the use of tangible materials for teaching division with fractions may have positive and negative outcomes. Accordingly, the use of visual aids for the operation of division with fractions is convenient only for the division of simple fractions and students should also understand problems that cannot be visualized. Similarly, Hiebert and Carpenter (1992) indicated that because the mathematical concepts we are trying to associate with tangible materials are quite distant, this may lead to misinterpretations of the material used. Whereas Streefland (1991) and Van den Heuvel-Panhuizen (2003) emphasized that actual contexts provide an effective method for concept generation.

In the present study, specialized content knowledge of teacher candidates regarding multiplication and division operations with fractions was examined with regard to the theoretical framework put forth by Ball et al. (2008). The aim of the present study was to reveal how the specialized content knowledge of the primary school mathematics teacher candidates regarding the multiplication and division operations with fractions is reflected on teaching activities. For this purpose, answers were sought to the following questions:

- How do primary school mathematics teacher candidates represent multiplication and division with fractions by way of realistic problems?
- How do primary school mathematics teacher candidates represent multiplication and division with fractions in their teaching plans?
- How do primary school mathematics teacher candidates represent, explain and justify operations involving multiplication and division with fractions in their micro teaching activities?

The present study will contribute to the literature by providing suggestions through a comparative analysis of how the specialized content knowledge on the multiplication and division with fractions of teacher candidates who think that the use of material is important is reflected on the prepared lesson plans and the representation, explanation and justification skills while teaching.

2.Method

2.1. Study Model

The study model is case study from among qualitative research methods. Case study survey models are survey arrangements that aim to reach a judgment on a certain unit (individual, family, school, hospital, association etc.) by identifying its depth, width and relation with its environment (Karasar, 2005: 86). The case examined in the present study is the association by primary school mathematics teacher candidates of multiplication and division with fractions with actual problems and tangible materials during the lesson plan preparation and teaching processes.

2.2. Study Group

The study participants were comprised of primary school mathematics teaching 4th year students at a state university in Central Anatolia. The study was conducted during the teaching application course in the second semester of the 2019-2020 academic year. Of the 35 primary school mathematics teacher candidates, 7 students were selected via purposeful sampling method. The names of the teacher candidates were coded as "Hale, Saadet, Züleyha, Seda, Burcu, Şeyda, Necla". The selection was made from the students in the second stage based on the three beliefs model to be subject to the preservice mathematics teachers' beliefs about the nature of, teaching, and learning scale adapted by Haser, Kayan and Bostan (2013). The reason for selecting the participants from among students in the second stage based on the belief model was to eliminate the impact of the belief dimension in the study. Students in the second stage based on the preservice mathematics teachers' beliefs about the nature of, teaching, and learning scale consider mathematics as a dynamic discipline, while believing that mathematics learning environments should be designed so as to improve the ideas of students and that students should be a part of the formation process in order to understand mathematical ideas.

2.3. Data Collection Tools

The data collection tools used in the study were comprised of realist problems set forth by teacher candidates, course plans, voice and video recordings of teacher candidates during micro teaching sessions and the transcripts of the sound recordings taken during the interviews with teacher candidates.

2.4. Data Collection Process

The study lasted for eight weeks during the second semester of the 2019- 2020 academic year. Data collection process was conducted in four stages after selecting the students with beliefs regarding the nature of mathematics, mathematics teaching and mathematics learning in the second stage based on the preservice mathematics teachers' beliefs about the nature of, teaching, and learning scale adapted by Kayan, Haser, Işıksal and Boston (2013).

Realistic Mathematics Education approach was explained to the teacher candidates during the first stage of data collection. Attributes that mathematics problems should have regarding language, expression, scientific and technical perspectives were shared with the students. The teacher candidataes were then subject to the "problem set up test" consisting of eight items including four multiplication and four division operations used by Işık (2011) during the study in which a conceptual analysis was conducted for the problems set up by mathematics teacher candidates regarding multiplication and division with fractions. The teacher candidates were asked to set up realistic problems related with the operations provided in the problem set up test. A time limit was not imposed on the teacher candidates for setting up the eight problems. The average time period was 90 minutes. The problems set up by the teacher candidates were examined, erroneous problems were identified together with the reasons for these errors.

The lesson plans prepared by the teacher candidates were examined during the second stage of the data collection process. The teacher candidates were asked to prepare a lesson plan for the 'Divides a natural number into a fraction and a fraction into a natural number, makes sense of the operation' and 'Performs the multiplication of two fractions and makes sense of the operation" acquisitions under the guidance of the primary school mathematics teaching program. The teacher candidates were given a period of one week for preparing the lesson plan for these two acquisitions. The prepared lesson plans were collected. The materials and realistic contexts planned to be used by the teacher candidates were examined in the lesson plans.

During the third stage of data collection, the teacher candidates applied some of the activities they prepared in the light of the lesson plans in the classroom by way of micro teaching activity. Micro teaching activity was conducted in a classroom with a smart board, a black board and a cabinet with mathematics teaching materials. Six teacher candidates and two researchers observed the micro teaching activity. The researchers were also present as observers during this process. Video recording was made throughout the process. The representations used by the teacher candidates were examined; it was examined how they establish a relationship between the mathematical concept, problem and material while their abilities to give the directions that can reveal the correlations within a specific context along with their abilities to explain and justify a topic were also examined. During this stage, the differences between the lesson plan prepared by the teacher candidate and the applications used during the micro teaching stage were also revealed.

Semi-structured interviews were conducted with the teacher candidates during the final stage of data collection in order to clarify their skills in using materials and supporting these materials with realistic problems. During the first stage of data collection, questions were directed on erroneous problem set ups regarding fraction operations after which they were asked to model and explain these operations. The researchers and the teacher candidate interacted during this process. The interviews lasted about 20 minutes. It was ensured through dialogues between the teacher candidate and the researcher that the study data will be much clearer and more understandable.

2.5. Data Analysis

During the first stage of the data collection process, the problems set up by the teacher candidates were examined and error codes were generated for setting up realistic problems related with the provided operations. The teacher candidates were indicated by "+" if they were able to setup a valid context for each operation and "-" if not, each operation was classified under a separate table for multiplication and division operations. Examples were presented for the problems set up by the teacher candidates and explanations were provided regarding the error reasons.

The lesson plans prepared by the teacher candidates were analyzed via document analysis method during the second stage od the data collection process. The representations in the lesson plans prepared by the teacher candidates were classified into categories. The categories were evaluated under the daily life events, models and manipulatives (fraction line etc.), drawings or diagrams (numerical line, region, abstract models etc.), spoken symbols, written symbols. The findings were presented in a table. In addition, it was examined from which of the model types of length, space, set, actual object were selected regarding the multiplication and division in fractions.

During the third stage of data collection, a video recording was made during the micro teaching activity prepared by the teacher candidates in the light of the lesson plans which was then transcribed. Conceptual coding and classification was mad efor the collected data. The codes were generated within the conceptual framework of the three mathematical tasks of "representation, explanation and justification" of SCK by Ball et al. (2008). The sub-codes put forth by Koren (2004) as *mathematics based explanation, application based explanation and rule based explanation* were used determining how the teacher candidates explain the meaning underlying the general rules or algorithms for the selected representations. Mathematics based explanation contains only mathematical concepts, whereas application based explanations are those that are based on real life context that will provide meaning to mathematical expressions and/or that utilize manipulatives while rule based explanations include those that are not based on mathematical ideas. *Justification* code was used to determine how teacher candidates evaluate and justify whether the alternative strategy and solutions are mathematically suitable or not. Hunter (2008) made an assessment based on the subcodes identified as *visual*, *verbal* and *numerical*. In addition, the material choices of the teacher candidates were examined; content analysis was used for analysing how teacher candidates establish the relationship between mathematical concept, problem and material. Direct quotations and the presentations of the teacher candidates were included in order to reflect the opinions of individuals. At this stage, the differences between the lesson plan prepared by the teacher candidate and the applications during the micro teaching were also indicated.

2.6. Validity and Reliability of the Data

The documents prepared by the teacher candidates were analyzed right after the application. The data obtained from all data collection tools were taken into consideration to reach the findings when conducting a detailed analysis. Moreover, assessment was made by two researchers in a single session following the transcription of the documents, video and sound recordings and this process continued until a full consensus was reached between the researchers.

Ethical Permits of the Study

All rules as indicated within the scope of the "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" were met in the present study. None of the actions indicated under the second section of the directive entitled "Actions Contradicting with Scientific Research and Publication Ethics" were carried out.

Ethical council permit information: Name of the council conducting the ethical assessment =Kırıkkale University Social Sciences and Humanities Researches Ethics Council

Date of the ethical assessment decision =18.03.2021

Number of the ethical assessment document=03

3.Results

The sub-problems of the study were taken into consideration as the sub-titles of the results.

3.1. How Do Primary School Mathematics Teacher Candidates Represent Multiplication and Division in Fractions With Realistic Problems?

The analysis of the realistic problem writing of seven primary school mathematics teacher candidates indicated in the first line for the multiplication in fractions was categorized in Table 1 as right or wrong. The teacher candidate indicated in Table 1 was displayed with a "+" sign if he/she was able to establish a valid context related with the multiplication operation and with "-" if not.

Table 1. *Analysis of the problems written down by teacher candidates for multiplication in fractions*

	$\frac{2}{5}\times\frac{6}{1}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$
Hale	-	+	+	-
Saadet	+	-	+	-
Züleyha	-	+	+	+
Seda	-	+	+	-
Burcu	+	+	+	-
Şeyda	+	-	+	-
Necla	+	-	-	+

It was observed when Table 1 was examined that the teacher candidates were generally able to establish the problem contexts regarding multiplication in fractions but that they set up improper realistic problems for improper fractions (confusing with division, wrong operation, wrong expression categories) (Table 3). It was observed that two teacher candidates who made a mistake in writing down a problem related with the multiplication of two simple fractions were not able to express the quantity defined at the beginning for both fractions.

Table 2. *Examples of problems set up by teacher candidates related with multiplication in fractions*

No	Student	Operation	Problem
1	Şeyda	$\frac{2}{3}\text{x}\frac{4}{5}$	Two walls of a house are shown in the figure. 2/3 of a wall is painted. Afterwards, 4/5 of the remainder is also painted. What fraction of this wall has been painted?
2	Şeyda	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	What is 1/6th of half a cake?

3	Hale	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$	How much has Ayşe drank if she drinks 1/6 of a water bottle that is half full?
4	Saadet	$1\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$	There is a full chocolate and a quarter of the same chocolate. He distributes it to 4 friends including himself. How much chocolate does each one get?
5	Züleyha	$\frac{2}{5} \times 6$	Ayşe's mother asked her to bring 6 boxes of eggs with 5 eggs in each. Ayşe broke 3 eggs in each box while carrying them over. Indicate the undamaged number of eggs in fractions.
6	Seda	$\frac{2}{5} \times 6$	Ali cut 5 breads first into 2 pieces and then when he realized that it will not be enough for those at the table he divided those parts into 6 and distributed them to those around the table. What fraction of the whole breads does everyone at the table receive?

It was observed when the first representation from among the realistic problem representations related with multiplication in fractions was examined that the problem is set up by Şeyda through calculating *4/5th of the 2/3rds of a whole*. It can be seen when the second and third representations indicated above are examined that the teacher candidates set up a realistic problem by *taking half of a whole*. It is observed that the 4th representation of Saadet interprets the multiplication operation through division. It can be observed when the 5th representation is examined that the operation could not be represented by the problem since the *unit was expressed erroneously* by asking the number of unbroken eggs in the problem set up by Züleyha for multiplication in the realistic problem related with multipliying a simple fraction with a whole number. It can be seen when the 6th representation is examined that Seda failed to set up the realistic problem because of many mistakes including the inabilility to represent the *part whole relationship* and *using division instead of multiplication.*

Table 2 presents the classification of the realistic problem representations set up by seven primary school mathematics teacher candidates with division in fractions. The teacher candidate indicated in the table was displayed with a "+" sign if he/she was able to establish a valid context related with the division operation in fractions and with "-" if not. Students who could not set up any problem were categorized as "null".

Table 3. *Analysis of the problems set up by teacher candidates for division in fractions*

	$3 \div \frac{3}{5}$	$\frac{7}{8} \div \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$	$4\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{6}$
Saadet	-	Null	-	Null
Hale	-	-	+	-
Züleyha	-	-	-	-
Seda	-	-	-	Null
Burcu	+	+	-	+
Şeyda	-	+	-	-

Necla	+	+	+	-

It can be seen when Table 3 is examined that the teacher candidates generally experience difficulties in setting up realistic problems related to division in fractions. Züleyha and Seda from among the teacher candidates were not able to setup any problem for the provided operations. Burcu and Necla were able to setup a problem for 3 out of the 4 operations. The problem type for which Necla could not set up a problem was the case of dividing a mixed fraction by another mixed fraction. It was observed when the transformations of the provided operations into problems are taken into consideration one by one that only one out of the seven teacher candidates was able to properly setup a realistic problem related with the division of a mixed fraction with another mixed fraction (14 %), that the calculation of $^7/_8 : {}^1/_4$ could be transformed into a realistic problem by two out of the seven students (42 %) and that the other operations were setup properly by two out of the seven teacher candidates (28 %). Table 3 presents examples for the problems set up by the teacher candidates related with division in fractions.

Table 4. *Examples for the problems set up by the teacher candidates related with division in fractions*

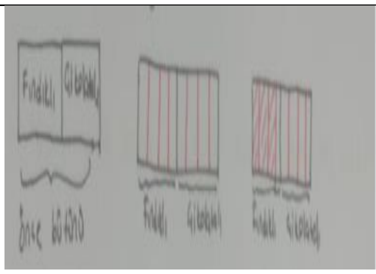
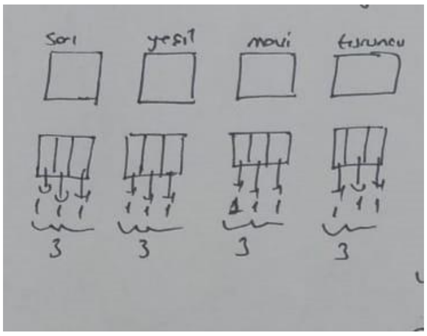
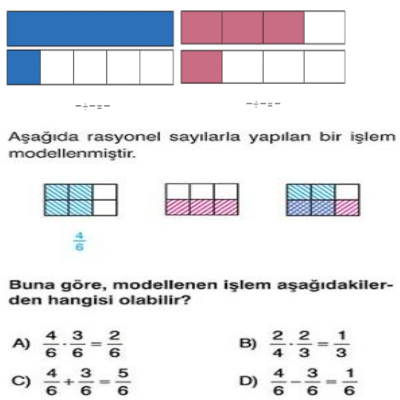
Representation Nr.	Student	Operation	Problem
1	Hale	$3 \div \frac{3}{5}$	What will be the filling ratio if we distribute 3 buckets of water to 5 bottles with only 3/5 of each bottle filled up?
2	Saadet	$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$	2 friends buy a book. Both share the pages to be read equally. One of the friends reads his share of pages in 5 days with the same number of pages read each day. How many pages does he read in 1 day?
3	Necla	$4\frac{2}{3} \div \frac{11}{6}$	Ayşe has 4 full water bottles and 1 that is filled up to 2/3. She distributes these full bottles to 1 1/6 glasses. What is the amount of water in each glass?
4	Burcu	$1\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}$	If a person walks 1 1/4th of a road and then walks an additional 1/5th of the road that he walked, how far has he walked in total?

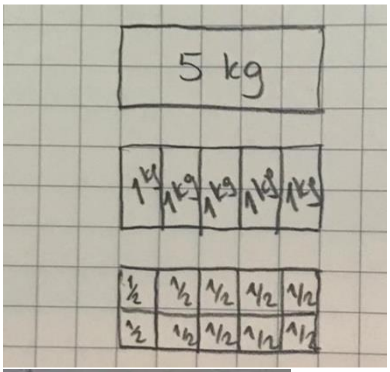
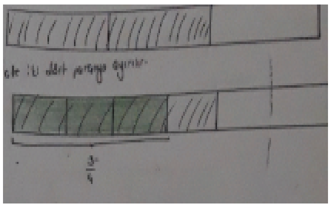
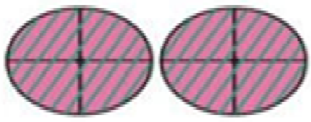
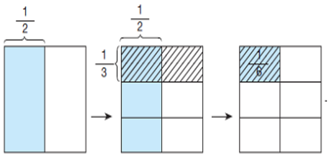
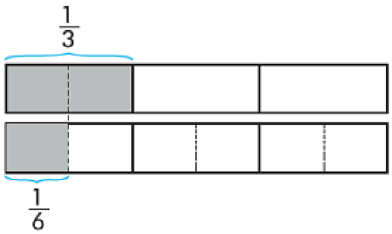
It can be seen when the realistic problem set up by Hale in the first representation in Table 4 is examined that the root of the question is wrong. While it is indicated in the question that the bottles will be formed with a filling ratio of 3/5, the question asks the filling ratio. It can be seen when the second representation is examined that the divisor is expressed erroneously in the problem by Saadet and that the question is not set up properly. The number of pages read in a day is read without indicating the total number of pages of the book. In the meantime, the sharing of the book pages with friends is also not meaningful. It can be seen when the third representation is examined that even though Necla has tried to set up a problem for division in mixed fractions, the concept of quantity has been used erroneously (*unit confusion*). It is also seen from the 4th representation given above that Burcu has reached a meaningless conclusion when setting up a problem due to *representing more than a whole*.

3.2. How Do Primary School Mathematics Teacher Candidates Represent Division and Multiplication in Fractions in Their Lesson Plans?

The lesson plans prepared by the teacher candidates were examined with regard to the criteria of including realistic problems, supporting the operation with a model and material use planning. Table 5 presents the representative examples from the lesson plans of the teacher candidates related with these criteria.

Table 5. *Representative examples from the lesson plans prepared by teacher candidates related to multiplication and division in fractions*

People	Reali life situation representation	Model Representation	Representation with material
Saadet	Ms. Fatma cooked a pan of cookies for her son and his friends with half of the pan containing chocolate chip and the other half hazelnut cookies. The children ate $\frac{3}{4}$ of the hazelnut cookies. Accordingly, what fracation of the whole cookies have the children eaten?		Does not include material use in the lesson plan.
Hale	Ms. Alev will serve chocolates to her guests who will visit her for a cup of coffee. She will serve $\frac{2}{24}$ of the chocolates in the box to each of the visitors. Since the chocolate box is $\frac{5}{6}$ full, how many guests have come to visit Ms. Alev?		4 different colored cardboards – scissors – pencil
Züleyha	Semra's mother orders 5 cakes of the same size for her daughter's birthday parth. She invites 16 of Semra's friends for the party thinking that each of them can eat a quarter of a cake. Do you think the cakes will be sufficient?		fractions set
Seda	Upon seeing that stray animals cannot find food in winter months, Ahmet buys a 5 kilogram package of dog food and gives 1/2 kg of food to each dog. Let us calculate the number of dogs Ahmet		transparent fraction cards

	can feed with this package of food.		
Burcu	There is no realistic problem in the lesson plan.	 	Computer aided dynamic geometry software (geogebra software)
Şeyda	Emine Hanım, bir sürahideki limonatanın $\frac{2}{3}$ litrelik kısmını, $\frac{1}{3}$ litre limonata alan bardaklara boşaltmıştır. Emine Hanım'ın bu iş için kaç tane bardak kullandığını nasıl bulabileceğinizi söyleyiniz.	 	visuals such as lemonade, glass
Necla	While walking to school from home, Esin walks 1/3km of the road in 2 minutes. Let us calculate the fraction of the total road that Esin walks in one minute.		transparent fraction cards

It is observed that following realistic problem set up, teacher candidates mostly include representation of the topic via realistic problems in the lesson plans prepared for multiplication and division in fractions. It was observed when the model (diagram) representation of the subject by the teacher candidates presented in Table 5 is examined that in general the model included in the lesson plan is used and that models such as the set model or the length model are not emphasized. It can be observed when the lesson plans of the teacher candidates are examined with regard to material use that transparent fraction cards, fraction sets, computer aided Geogebra software are used (see Table 5). It can be seen when the lesson plans are examined with regard to the teacher candidates making transitions between the representations that only Şeyda has simultaneously planned realistic problem, material use and model display and that the other students made plans for different representations for different contexts. While Saadet, Necla and Seda from among the students planned representation transitions between realistic problem and model drawing, Hale planned a transition between realistic problem and material representations. Necla planned material use in the lesson plan independent of the context and the model. Züleyha and Burcu did not plan the transitions between the representations from the same context. There was no realistic context in Burcu's lesson plan which represents the operation.

3.3. How Do Primary School Mathematics Teacher Candidates Represent, Explain and Justify Multiplication and Division in Fractions As Part of the Micro Teaching Activities?

Teacher candidates applied the lesson plans they prepared for division and multiplication in fractions. This section includes findings on the implementation of the activities by teacher candidates on multiplication and division in fractions. This section also includes various dialogues from the semi-structured interview between the teacher candidates and the researcher for revealing the explanations and jusitifications of the teacher candidates.

It was observed as a result of the analysis that students who were able to set up the realistic problems properly during the first stage of data collection and who planned the transitions between the explanations could explain and justify the subject better. Accordingly, Figures 1a and 1 b present examples of activities used by Necla during teaching.

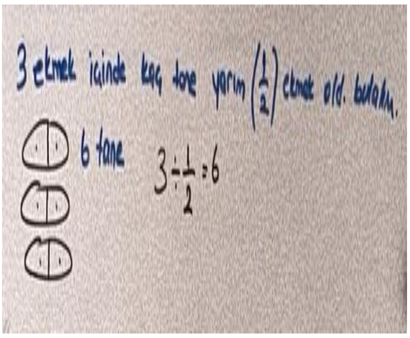
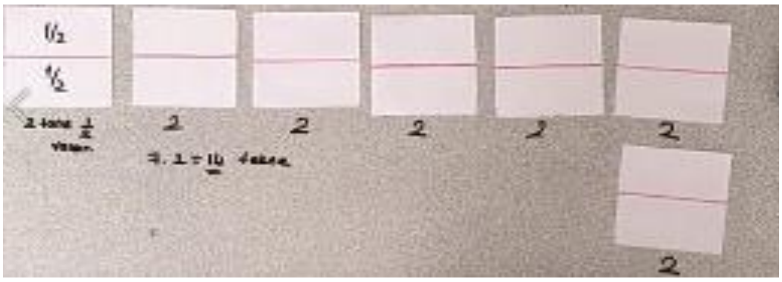


Figure 1a. **Model of Necla for division in fractions**



Ezgi and her friends shared 3 handcrafted papers to build a boat using origami technique. Since ½ of the paper is used for each boat, let us calculate how many boats Ezgi and her friends can build using the papers they have on hand.

Figure 1b. **Material and problem of Necla for division in fraction.**

As can be seen in Figure 1b, Necla explained the division in fractions by way of *real life events aand representation by drawings* and through *application based explanations* and *visual, verbal and numerical justifications* using half a loaf of bread and equal sized papers. Whereas Necla set up the multiplication in fractions operation using transparent fraction cards (*representation through drawing-diagram*) via *visual and numerical justification* as presented in Figure 2.

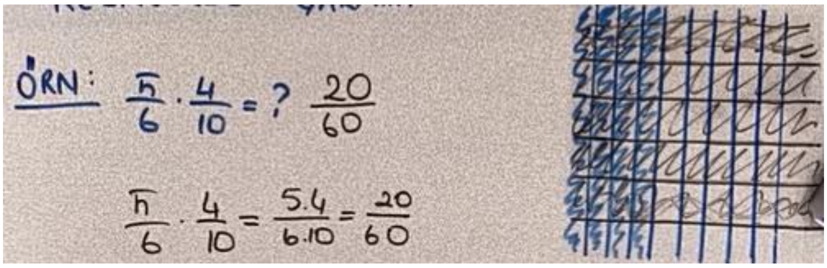


Figure 2. Necla's model for multiplication in fractions

Burcu who was more successful compared with other teacher candidates in writing down realistic problems related with multiplication and division in fractions used *real life events and representations through manipulatives* in addition to *visual numerical justifications* and *application based explanations*. Figure 3a presents examples from the teaching of Burcu supported dynamically via Geogebra software.

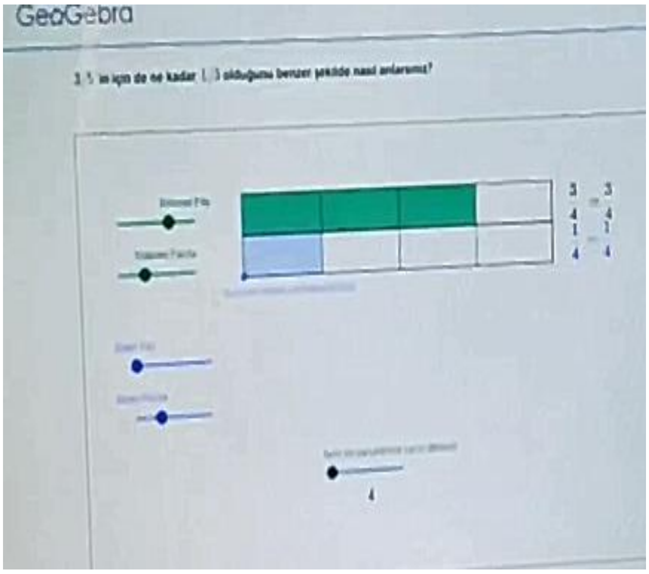


Figure 3a. Burcu's division in fractions model via GeoGebra

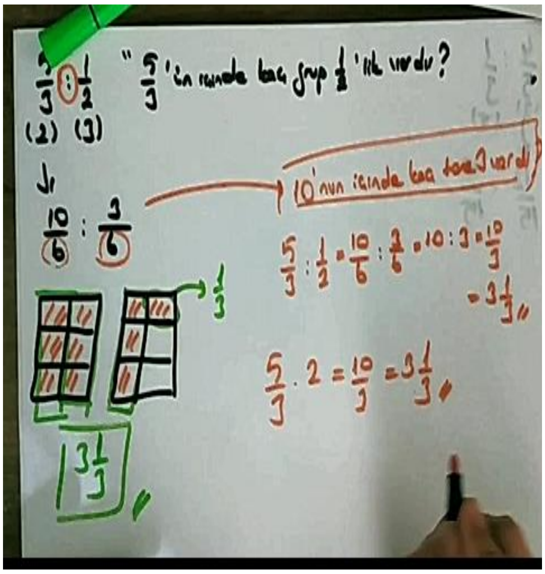
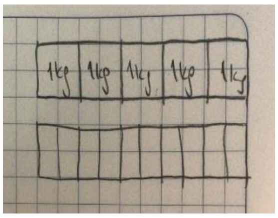


Figure 3b. Burcu's model for division in fractions

It can be seen when Figure 3a is examined that Burcu resorted to the GeoGebra application in addition to justifying the numerical result by setting up a model on an A4 in mikro teaching to reach the result for the $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4}$ fraction. In Figure 3b, while Burcu expresses the calculation of the $\frac{5}{3} \div \frac{1}{2}$ fraction during the micro teaching analysis for the division of a compound fraction with a simple fraction through a model, she also solved the problem verbally through questions of "How many groups of $\frac{3}{6}$ are there in the $\frac{10}{6}$ fraction? Or how many 3's are there in 10 since their denominators are the same?". The fact that Burcu made transitions between mathematical based and application based representations simplified the explanation and justification processes.

Even though teacher candidates include *real life situation representations* or *manipulatives* related with division in fractions in their lesson plans, it has been observed that some of the teacher candidates cannot effectively use these representations during the teaching stage or that they refrain from using them. Züleyha is one of the teacher candidates who posed such an example. Züleyha experienced difficulties in the problem set up related with division in fractions, gave an example in the lesson plan for the division of an integer with a greater integer and planned the use of fraction sets but refrained from representing (*representation through manipulatives*) the topic during teaching. This limited her *verbal justificiations* thus forcing her towards *rule based explanations*. Züleyha was asked during the interview after the micro teaching session to explain and justify the $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ calculation. The following dialogue ensued between the researcher and Züleyha:



Researcher: Can you explain the $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ *calculation to us using materials?*

Züleyha: (Takes 4 identical materials. Shows 2 of them as $\frac{1}{2}$*.) We will divide this into 8 equal parts.*

Researcher: So is the expression on the board $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ *?*

Züleyha: Actually 8 of $\frac{1}{2}$ *is more logical.*

Researcher: Isn't this $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$*? Does this mean division?*

Züleyha: It doesn't mean the same thing.

Researcher: So, can you express it with a problem?

Züleyha: 'I ate one eighth of half an apple, how much did I eat? (Afterwards, the teacher candidate cannot be sure of the problem she set up and gives up on it.)

Based on the aforementioned dialogue, it can be observed that Züleyha misrepresented the divisor for division in fractions and tried to structure division by way of multiplication and that she represented the topic *through real life situations* without making *application based explanations*.

Another teacher candidate who experienced difficulties in setting up a realistic problem related with division in fractions was Seda who set up a realistic problem as an example of the division of a whole number to a simple fraction and who tried to explain the solution through modelling. She is aiming to use transparent fraction cards in the lesson plan. Seda wanted to use the example in her lesson plan during the semi-structured interview and refrained from using a new real life situation and manipulatives. Seda stated the division of an integer to a simple fraction in a realistic problem included in her lesson plan as follows: 'Upon seeing that stray animals cannot find food in winter months, Ahmet buys a 5 kilogram package of dog food and gives 1/2 kg of food to each dog. Let us calculate the number of dogs Ahmet can feed with this package of food.'

Researcher: So, how can you represent this situation?

Seda: Like this (Figure 4)

Figure 4. Seda's model for division in fractions

As can be seen in Figure 4, Seda chose to use *drawing for representing* division operation. It can be seen that Seda made a drawing to model the $5 \div \frac{1}{2}$ operation from a whole. Seeing 5 wholes as one single whole, she first divided it into pieces of 1 kg after which each 1 kg was divided into $\frac{1}{2}$ parts. This drawing by Seda is an indication that she is resorting to *visual justification* from realistic problem representation.

Saadet was another student who could not display a successful performance in realistic problem set up but who included realistic problems and materials in the lesson plan. Even though Saadet planned the use of tangible materials in her micro teaching activities, she represented the subject only through diagrams on the board during the micro teaching activity and set up mathematics based explanations based on this drawing. Below is a sample dialogues between the researcher and the teacher candidate (Saadet) during the semi-structured interview following the micro teaching activity:

Researcher: How would you represent the $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} =$ *operation?*

Saadet: I divide a figure in 3 parts and then color up 2 parts. I thus find 2/3. Afterwards, it asks me 1/3 that is divide this figure in 3 equal parts. I divide it as such (vertically).

Saadet: The intersecting sections in the figure make up the result of the multiplication.

Researcher: So can you explain this to us using materials?

(The teacher candidate searches for fraction tiles and 1/3 parts. She decides to explain the operation $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} =$*)*

Saadet: I placed the 1/3 tiles horizontally as such. Afterwards, I placed the ¼ tiles vertically. I thus divide 1 whole into 4 equal parts hence it makes ¼.

Saadet: The answer is 1/12 when I divide up the ¼ part with 1/3.

Researcher: So what kind of a material did I need to show this clearly?

Saadet: It could be better if the tiles were a bit larger and somewhat transparent. Because we can stsick them onto the board then. It wouldn't be a problem for the students to see.

Saadet explained the subject through $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3} =$ operation using the drawing in Figure 5 during the micro teaching activity.

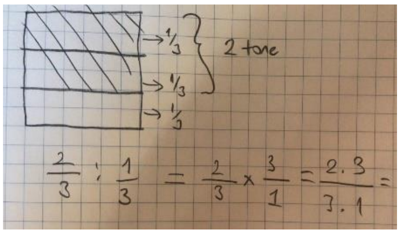


Figure 5. Saadet's model for division in fractions

Figure 5 summarizes that the teacher candidate first utilized *representation through diagram* followed by *rule based explanations*. The following dialogue ensued between the researcher and Saadet during the interview.

Saadet: We first divide a whole into 3 and then color up 2 of its pieces. Afterwards, we are asked 1/3 of this. That is when we look at the colored part we see that we already have two pieces of 1/3. Since the student sees 2 pieces of 1/3 we can say that the answer is 2.

Saadet: Afterwards we invert it and show the student multiplication. We write the first fraction as it is and we invert the second fraction and multiply them.

Researcher: So, does this drawing you made explain to us the logic behind the inversion and multiplication algorithm?

Saadet: Nothing is given on its logic.

Araştırma: What would you do if your student asked you to explain and justify the invert and multiply algorithm?

Saadet: I would provide figures. I would save the moment and then work on it further and explain to the student later.

It was observed when the dialogue between the researcher and the teacher candidate was examined that even though the teacher candidate is able to model the division of a simple fraction with another simple fraction, she does not have the conceptual knowledge underlying this operation, that she cannot make *mathematics based explanations* when necessary and that she brushes over the situation through *rule based explanations*.

Hale was another teacher candidate who experienced difficulties in setting up realistic problems related with multiplication and division in fractions. It can be observed when Hale's lesson plan is examined that even though she has planned to teach the subject through *real life situations* and *representations through diagrams* she has structure the lesson by way of *rule based explanations*. Hale was asked to represent the $3 \div \frac{3}{5} =$ operation during the interview conducted after the micro teaching activity. The following dialogue ensued between the researcher and the teacher candidate.

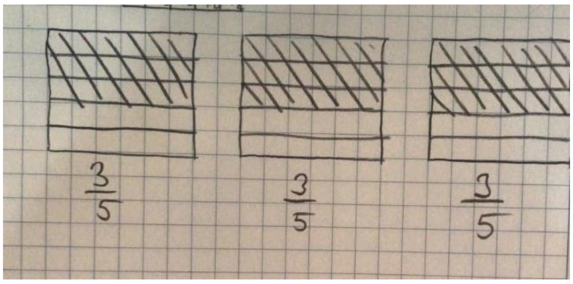


Figure 6. Hale's model for division in fractions

Hale: We have 3 wholes. We will take three fifths of each. With this expression we do not get the same result but I think the logic is correct.

It can be seen based on the expression of the teacher candidate that she is not able to make *application based explanations* and *verbal justifications* related with the provided operation. However, the teacher candidate had correctly modelled the operation in the lesson plan (Table 4). The dialogue between the teacher candidate and the researcher continued as follows during the interview after the teaching:

Researcher: Could you tell us what you tried to show in this drawing?

Hale: I tried to show 3/5ths in each of the wholes.

Researcher: Do you think you can find other 3/5ths pieces in the wholes?

Hale: Aaa, yes. There are 6 pieces I did not use, I can take from them as well.

It can be observed based on the above dialogue that Hale realized the remaining 6 pieces after the researcher's questions.

It can be observed that Züleyha who displayed a similar performance with Hale in realistic problem set up resorted to *representation through diagrams* when asked the $1\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$ operation during the interview. Züleyha evaluated the result based on 1 whole without taking into consideration the $\frac{1}{4}$ expression in the representative compound fraction.

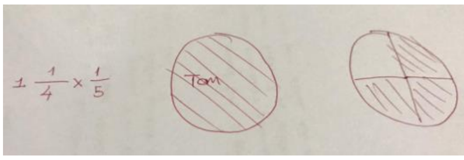


Figure 7. Züleyha's model for multiplication in fractions

Even though Züleyha refrained from rule based explanations, it is striking that she first wants to perform the operation and express the related model afterwards. It has thus been observed that teacher candidates experience difficulties in representing multiplication in compound fractions. The following dialogue ensued between the related teacher candidate and the researcher:

Researcher: How can you represent this operation with a realistic problem?

Züleyha: I had 1 $\frac{1}{4}$ *of an apple. I took* $\frac{1}{5}$*th of this apple. How much appled did I get?*

Researcher: Can you show this to us with an illustration?

Züleyha: Let us equalize at 20. No. Very silly.

It is observed that the teacher candidate first tries out the operation to reach the result in problems and then shifts towards the model via inference. In this regard, it was identified that the teacher candidate experiences problems in modelling in compound fractions.

It is striking that Şeyda who is not successful in setting up realistic problems for multiplication and division in mixed fractions and partially successful for simple fractions makes justifications over simple fractions while teaching. The examples selected by Şeyda for teaching are presented in Figures 8a, 8b and 8c.

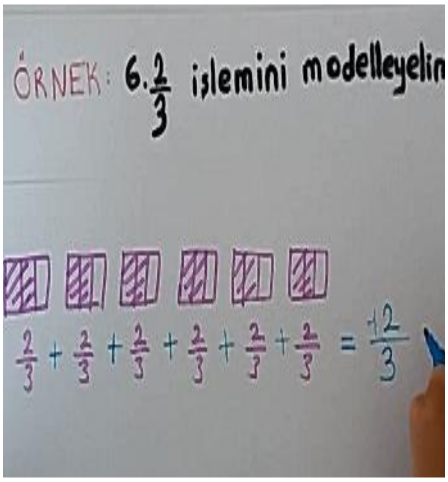


Figure 8a. Şeyda's model for multiplication in fractions

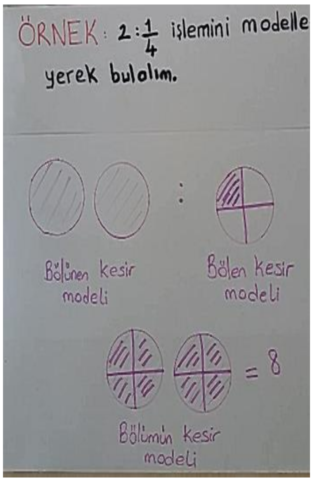


Figure 8b. Şeyda's model for division in fractions

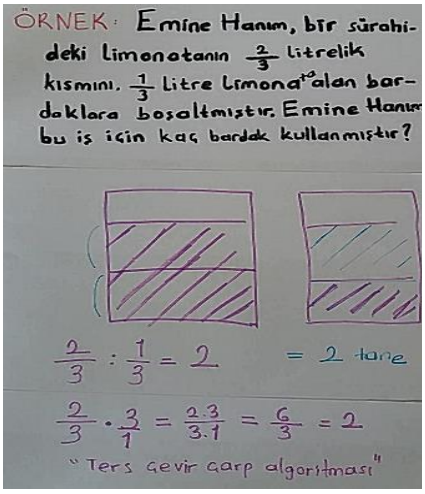


Figure 8c. Şeyda's realistic problem and model for division in fractions

In addition to the modelling, operations and *diagram representations* /in Figure 8c, Şeyma used *matmematical based* explanations to explain the multiplication operation as 'summing up 6 $\frac{2}{3}$ is the same as 6 times $\frac{2}{3}$' and the division operation as, 'how many $\frac{1}{4}$ is there in 2 wholes?'.

4. Conclusion, Discussion and Suggestions

The aim of the present study was to examine how primary school mathematics teacher candidates represent multiplication and division in fractions in their lesson plans and micro teaching activities in addition to presenting how they justify these operations and what kinds of contects they form.

It was observed when the first finding of the study was taken into consideration that teacher candidates experienced more difficulties in representing the multiplication and division operations in improper fractions via real life situations compared with the multiplication and division operations in simple fractions. These findings are in accordance with the findings of Işık (2011) in the study during which a conceptual analysis was conducted for the problems set up by primary school mathematics teacher candidates regarding multiplication and division operations in fractions. It is emphasized in literature that measurement is more suitable than equal sharing for setting up realistic problems related with division operation (Ball, 1990) but that teacher candidates try to make sense of the model for the division of two fractions through equal sharing model (Ball, 1990; Işık 2011; Tirosh & Graeber, 1991). It was observed in the present study that the teacher candidates tried to set up the model expressed for the division of two fractions by way of equal sharing which is similar to the model in literature. In addition, it is observed that the error sources for the division of two integer fractions are comprised of acquisition of the whole as a multiplicity, confusion of units, not being able to establish part-whole relationships and the non-existence of the unknown, confusion with multiplication, appointing a meaning of unit to a fraction greater than the whole which are similar to the sub-themes in the related literature (Armstrong ve Bezuk, 1995; Işık ve Kar, 2012; Seçir 2017). As indicated by Lee et al. (2011), it is important for the representation of multiplication and division in fractions to express the reference whole accurately and flexibly. In accordance with the related literature, the teacher candidates in the present study experienced difficulties in representing the whole in a compatible manner with a realistic situation (Armstrong and Bezuk, 1995; Azim, 1995; Lee et al., 2011).

It was observed when the lesson plans prepated by primary school mathematics teacher candidates were examined that; the teacher candidates planned on using transparent fraction cards for multiplication in fractions and technologies such as Geogebra for teaching division in fractions. The teacher candidates provided examples of simple fractions along with real life situations for the multiplication and division operations in their lesson plans. They represented the real life siutiatons through field models. This finding was in accordance with the preferences of teacher candidates regarding the field model for fractions as indicated in the study by Seçir (2017) and Toluk Uçar (2009).

There are many studies in literature in which teacher candidates are given a problem or operation related with multiplication and division in fractions and are asked to draw a model or they are given a model and asked to set up a problem or write down the operation mathematically (Li, & Kulm, 2008; Işık 2011; Seçir 2017). In the present study, teacher candidates were provided with tangible materials for micro teaching activities and they were asked to use these materials. Even though some teacher candidates completed the activities in their micro teaching plans, it was observed that some of the teacher candidates refrained from using the materials they were given which were included in their plans even though the materials were provided. Based on the lesson plans of the teacher candidates, it was observed that they give importance to using materials but failed to reflect this in their micro teaching activities. It can be indicated that the teacher candidates experienced difficulties in making transitions between types of representation. That is, they may be insufficient in setting up problems and similarly in explaining the model and problem using materials. It is striking that of the seven teacher candidates who believe the necessity of using tangible materials in mathematics teaching, only a few used materials during their micro teaching activities. This is in accordance with the finding that there is no statistically significant correlation between material use levels and competence beliefs (Gökmen, Budak, & Ertekin, 2015; Yetkin Özdemir, 2008; Aydoğdu İskenderoğlu, Türk, İskenderoğlu, 2016). Moreover, it was determined in the present study as emphasized by Yetkin Özdemir (2008) that the teacher candidates have shortcomings in structuring the directions that may help them in setting up a correlation between the material and the concept. Even though the teacher candidates support the use of materials in their lesson plans, the reasons why they refrain from using materials in their micro teaching activities may be due to lack of field knowledge or lack of previous experience on material use. Another related finding is that the explanations in the lesson plans of teacher candidates who do not experience real life situation representation problems (Burcu, Şeyda, Necla) overlap with the micro teaching activity. The fact that Şeyda planned transitions between representations along the same context or that in other words prepared for teaching this subject helped her in using different representations while teaching. Whereas even though Burcu did not reflect realistic contexts in her lesson plans, her competence in setting up realistic problems for multiplication and division in fractions enabled her to implement the teaching activities successfully.

It was observed when the findings of the study under the third heading are taken into consideration that the justifications of teacher candidates regarding why a model or the result of an operation is right or wrong are not weak but that they are at an operational level. This finding was in accordance with those of Seçir (2017). It is observed that the teacher candidates experience difficulties in making transitions between types of explanations where necessary. This finding supports the findings of other studies (Alenazi, 2016; Borko, Eisenhart, Brown, Underhill, Jones, and Agard, 1992; Chen, 2010; Gregg and Gregg, 2007; Li and Smith, 2007). The teacher candidates tried to illustrate that the results of these two operations are the same through drawing models, setting up problems, explaining the given operation verbally or by giving examples from real life but they failed and also could not provide mathematics based explanations when required. As an example, the fact that Saadet from among the teacher candidates tried to explain division in fractions through real life situations instead of explaining the invert and multiply algorithm or her attempts to draw a model but fail may be presented as examples of this situation. This finding is in accordance with those set forth by Ho and Lai (2012).

There are many studies in literature which illustrate that the types of explanations used by teachers vary subject to their field knowledge (Ball, 1990b; Ma, 1999). While in Ma's (1999) study, American teachers with operational knowledge use manipulatives to objectify the operation, Chinese teachers with conceptual knowledge used manipulatives to support in-class dialogues. In this study, majority of the teachers also preferred tangible materials in their micro teaching activities for objectifying the operations like the American teachers. However, as indicated in the section of the study where the participants are introduced, the participants were selected from among students in the second stage according to the mathematics related beliefs scale. According to this scale, it is striking to see that beliefs are not actualized by students who see mathematics as a dynamic discipline, who believe that mathematics learning environments should be designed so as to flourish the ideas of students and that students should take part in the development process in order to comprehend mathematical ideas. The present study illustrates the necessity to educate teacher candidates in a more competent manner with regard to the design of education environments and the implementation of special teaching methods. We need to raise the teacher candidates with a competence to utilize many different forms of explanations concurrently as indicated in the study by Putnam (1992) if we wish to raise our teacher candidates with the belief that their role is to prepare students for life. It is very important to ensure that the teacher candidates are competent in starting out with problem based explanations based on real life situations then continue with semi-structured manipulatives, models and visual arguments as well as mathematical based explanations and formal explanations. The findings of the present study also support the findings of the study by Tirosh et al. (1998) reporting that inexperienced teachers prefer to remind the students of the rules when students make an error. The teacher candidates may not have been able to make a transition among different forms of explanations since they do not feel competent enough to do so.

The findings of the study are limited with seven teacher candidates in the fourth year of their education as part of the 2008 teacher education program. These seven teacher candidates have limited experience both within the framework of the education program and outside of the school. Aytekin and Şahiner (2020) stated that teaching based on operations will decrease over time as the teacher candidates gain experience. University education should be designed so as to put forth experience environments in addition to teaching knowledge. In other words, teacher candidates should be allowed to have different experiences as well as opportunities for making representations, explanations and justifications related to the subject. The sample group included in the study was part of the 2008 teacher development program. In this program, Special Teaching Methods 1 and 2 courses were among the lessons during which the teacher candidates could acquire pedagogical field knowledge. However, lessons such as teaching numbers, teaching algebra, teaching statistical probabişlity and teaching geometry have also been included in the 2018 teacher education program. The method in the present study may be used to examine the current state of the teacher candidates in this new program and comparisons may be made based on the effectiveness of education programs.

References

Aksu, Z. & Konyalıoğlu, A. C. (2015). Sınıf öğretmen adaylarının kesirler konusundaki pedagojik alan bilgileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *23*(2), 723-738.

Alenazi, A. (2016). Examining middle school pre-service teachers' knowledge of fraction division interpretations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(5), 696-716.

Armstrong, B. E. & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. In J. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.). *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades*, 85–120. New York: SUNY.

Aytekin, C. & Şahiner, Y. (2020) "An investigation of preservice mathematics teachers' teaching processes about" procedural and conceptual knowledge" related to division with fractions." *Elementary Education Online, 19*(2), 958-981.

Azim, D. S. (1995). *Preservice elementary teachers' understanding of multiplication with fractions*. Unpublished doctoral dissertation, Washington State University. USA

Back, R. J., Manilla, L. & Wallin, S. (2009). *Student justifications in high school mathematics.* Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education, Lyon, France

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The elementary school journal*, *90*(4), 449-466.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 121-176.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Birgin, O., & Gürbüz, R. (2009). İlköğretim II. kademe öğrencilerinin rasyonel sayılar konusundaki işlemsel ve kavramsal bilgi düzeylerinin incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *22*(2), 529-550.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily?. *Journal for research in mathematics education*, *23*(3), 194-222.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23(3)*, 194–222.

Byrnes, J. P. & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental psychology*, *27*(5), 777.

Chen, R. J. (2010). Investigating models for preservice teachers' use of technology to support student-centered learning. *Computers & Education*, *55*(1), 32-42.

Çiftçi, K., Yildiz, P. & Bozkurt, E. (2015). Ortaokul matematik öğretmenlerinin materyal kullanımına ilişkin görüşleri. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitimde Politika Analizi Dergisi*, *4*, 79-89.

Gainsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(3), 199-219.

Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y. & Soylu, C. (2013). Examining pre-service teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' errors. *International Online Journal of Educational Sciences*, *5*(3), 719-735.

Gökmen, A., Budak, A. & Ertekin, E. (2016). İlköğretim öğretmenlerinin matematik öğretiminde somut materyal kullanmaya yönelik inançları ve sonuç beklentileri. *Kastamonu Education Journal*, *24*(3), 1213-1228.

Graeber, A. O., Tirosh, D. & Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 95-102.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Gudmundsdottir, S. & Shulman, L. (1987). Pedagogical content knowledge in social studies. *Scandinavian Journal of Educationl Research*, *31*(2), 59-70.

Haciomeroglu, G., & Erbilgin, E. (2005). Memorızatıon. *The Mathematics Teacher,* 99(4), 228-228.

Haser, Ç., Kayan, R. & Bostan, M. I. (2013). Matematik öğretmen adaylarının matematiğin doğası, öğretimi ve öğrenimi hakkındaki inanışları. *Eğitim ve Bilim*, *38*(167).

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York: Macmillan Publishing Company

Ho, S. Y., & Lai, M. Y. (2012, July). Pre-service teachers' specialized content knowledge on multiplication of fractions. *In Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 291-298).

Hunter, R. (2008). Facilitating communities of mathematical inquiry. *Navigating currents and charting directions*, *1*, 31-39.

Işık, C. & Kar, T. (2012). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde bölmeye yönelik kurdukları problemlerde hata analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *12*(3), 2289-2309.

Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 41*.

Işıksal, M. & Çakıroğlu, E. (2006). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiğe ve matematik öğretimine yönelik yeterlik algıları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *31*(31), 74-84.

İskenderoğlu, T. A., Türk, Y. & İskenderoğlu, M. (2016). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının somut materyalleri tanıma-kullanma durumları ve matematik öğretiminde kullanmalarına yönelik öz-yeterlikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *1*(39), 1-15.

Karasar, N. (2005). *Bilimsel araştırma yöntemi* (17. Baskı). Ankara: Nobel yayın dağıtım, 86.

Kılıç, H., Pekkan, Z. T. & Karatoprak, R. (2013). Materyal kullaniminin matematiksel düşünme becerisine etkisi/the effects of using materials on mathematical thinking skills. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, *9*(4), 544-556.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research* (p. 49–84). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Koren, M. (2004). Acquiring the concept of signed numbers: Incorporating practically-based and mathematically-based explanations. *Aleh*, *32*, 18-24.

Kurt, G. (2006). *Middle grade students' abilities in translating among representations of fractions*. Unpublished master's thesis, Middle East Technical University, Ankara.

Kutluk, B. (2011). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlükleri bilgilerinin incelenmesi.* Unpublished Doctoral dissertation, DEÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 170-193.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, N. J.: Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). *Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research*. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, *1*, 629-667.

Lee, S. J., Brown, R. E. & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(3), 198-220.

Lesh, R., Post, T. R. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Levenson, E., Tsamir, P. & Tirosh, D. (2010). Mathematically based and practically based explanations in the elementary school: teachers' preferences. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(4), 345-369.

Li, Y. & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of Preservice mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 40*, 833–843

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*, 546–552

Li, Y., & Smith, D. (2007). Prospective middle school teachers' knowledge in mathematics and pedagogy for teaching–the case of fraction division. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 185-192).

Lo, J.J. & Luo, F. (2012). Preservice elementary teachers' knowledge of fraction division. *J Math Teacher Educ, 15,* 481–500.

Ma, L. (1996). *Profound understanding of fundamental mathematics: What is it, why is it important, and how is it attained*. Unpublished doctoral dissertation, Stanford University, the USA.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16-32.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 309-330.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert, ve M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Özdemir, İ. E. Y. (2008). Sınıf öğretmeni adaylarının matematik öğretiminde materyal kullanımına ilişkin bilişsel becerileri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *35*(35), 362-373.

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory into Practice, 40*(2), 118-127.

Perry, M. (2000). Explanations of mathematical concepts in Japanese, Chinese, and U.S. first- and fifthgrade classrooms. *Cognition and Instruction, 18*(2), 181–207.

Putnam, R. (1992). Teaching the ''hows'' of mathematics for everyday life: A case of a fifth-grade teacher. *Elementary School Journal, 93*(2), 163–177.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: Student behavior and textbook messages. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 135–150

Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(6), 552-575.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Seçir, S. (2017). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Kesirlerle Çarpma ve Bölme İşlemlerine İlişkin Özelleştirilmiş Alan Bilgilerinin Gelişiminin İncelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics education*, 233-254.

Stein, M. K. & Bovalino, J. W. (2001). Manipulatives: One piece of the puzzle. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*(6), 356.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher

Tirosh, D. & Graeber, A. O. (1991). The effect of problem type and common misconceptions on preservice elementary teachers' thinking about division. *School Science and Mathematics*, *91*(4), 157-163.

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*, 51-64.

Toluk Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, *25*(1), 166-175.

Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *19*(2), 81-101.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(24), 234-243.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9–35.

Wu, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy. *American Educator, 23*(3), 14–19, 50–52.

Yavuz, O. C. (2013). Temel Eğitimde Kesirler Konusunda Materyalin Rolü. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research, 5,* 137-147.

Yeşildere, S. (2008). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sayı örüntüleri ile ilgili pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi.* VIII Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.