Ein Zusatz über ähnlich veränderliche ebene Systeme

von E. EGESOY

(Mathematisches Institut der Universität Ankara)

Özet: Bu araştırma, bir parametreli düzlem hareketlerin genelleştirilmesi sayılan ve H. R. Müller tarafından ortaya atılan düzlemde benzerlik hareketlerine ait özeliklerin genişletilmesi mahiyetindedir. Bu itibarla 1. de benzerlik hareketlerinin analitik ifadesi verilmiştir 2. de G. GRÜSS [1] tarafından tarif edilen yuvarlanma kayma hareketleri düzlemin benzerlik hareketlerine teşmil edilerek zarf eğrilerinin denklemleri hesaplanmıştır. 3. de yüksek basamaktan kutup yerleri yardımı ile pol zincirinin genelleştirilmesi yapılmıştır.

* * *

1. Die Eigenschaften ebener, ähnlich veränderlicher Systeme [2] hängen mit den höheren Polen zusammen. Es handelt sich hierbei um Eigenschaften, die als Verallgemeinerungen von Rollgleiten der Hüllbahnen und Polketten der ebenen Kinematik anzusehen sind.

Zuerst beschreiben wir die Darstellung ebener Bewegungsvorgänge mittels komplexer Zahlen : Wir denken uns zwei Ebenen E und E′ aufeinander gelegt und gegeneinander beweglich (Abb. 1).

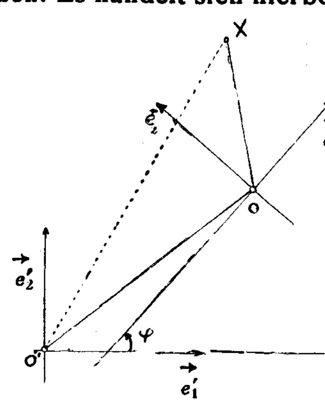

Abb. 1

Die Gangebene E trage das Gangkreuz $\{o; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ mit dem Ursprung o und den rechtwinkeligen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, wobei $\vec{e}_2$ links

[1] G. GRÜSS, Zur Kinematik des Rollgleitens. Z. angew. Math. Mech. **31**, (1951).

[2] Vgl. Doktor Arbeit von İ. Olcaylar.

von $\vec{e}_1$ liegen soll. Entsprechend sei in der Rastbebene E′ das Rastkreuz $\{o' ; \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ von der gleichen Art festgelegt.

Wir fassen nun die Koordinaten eines Punktes X zu komplexen Zahlen

$$x = x_1 + i\,x_2 \quad , \quad x' = x_1' + i\,x_2'$$

zusammen. Auch den Vektor $\overrightarrow{o'o}$ stellen wir im festen Achsenkreuz durch eine komplexe Zahl

$$u' = u_1' + i\,u_2'$$

dar. Um die Formeln symmetrisch zu gestalten, erscheint es zweckmässig, dem gleichen Vektor im beweglichen System die Grösse

$$u = u_1 + i\,u_2$$

zuzuordnen. u entspricht also dann dem Vektor $\overrightarrow{oo'}$. Der Drehwinkel, um den das bewegliche gegen das feste Achsenkreuz verdreht ist, sei mit φ bezeichnet. Aus der Figur erkennt man unmittelbar die Beziehung:

$$u' = -\,u\,e^{i\varphi}$$

Weiter gilt für einen beliebigen Punkt X:

$$x' = (-u + x)\,e^{i\varphi} = u' + x\,e^{i\varphi}$$

Ein einparametriger Bewegungsvorgang wird nun festgelegt, wenn φ und u damit auch u' von einem reellen Parameter t abhängen. Wir können nunmehr die Darstellung ähnlich veränderlicher ebener Systeme erklären: ρ sei eine reelle Fuktion von t, der Ahnlichkeitsfaktor und $\rho(t) \neq 0$. Dann gibt uns die Gleichung

$$x' = (-u + x)\,\rho\,e^{i\varphi}$$

oder

$$x' = u' + v\,x \tag{1}$$

mit $\quad v = \rho\,e^{i\varphi} \quad$ und $\quad u' = -\,u\,v$

die Darstellung eines ebenen Ähnlichkeitsvorgangs.

Ein Punkt X sei in der beweglichen Ebene E befestigt, x

also eine feste komplexe Zahl. Seine Geschwindigkeit gegenüber der festen Ebene E′, also die Absolutgeschwindigkeit, stimmt dann mit der Führungsgeschwindigkeit überein und ist durch

$$\dot{x}' = \dot{u}' + \dot{v}\, x$$

gegeben. Durch Bildung weiterer Ableitungen erhrlten wir "höhere Beschleunigungen„ der Ordnung $(n-1)$:

$$\overset{(n)}{x'} = \overset{(n)}{u'} + \overset{(n)}{v}\, x \tag{2}$$

$$\overset{(n)}{x'} = \overset{(n)}{u'} + \overset{(n)}{v}\, (x' - u') \,/\, v \tag{3}$$

Der Pol P_1 ist durch das Verschwinden der Führungsgeschwindigkeit, der Beschleunigungspol P_2 durch das Verschwinden der Führungsbeschleunigung gekennzeichnet. Es liegt nun nahe, jenen Punkt P_n, den Geschwindigkeitspol n-ter Ordnung zu nennen, dessen Geschwindigkeit n-ter Ordnung Null ist. $\overset{(n)}{x'} = 0$ führt aber zu

$$x \equiv p_n = -\overset{(n)}{u'} : \overset{(n)}{v} \quad , \quad x' \equiv p_n' = u' - \overset{(n)}{v}\, \overset{(n)}{u'} : \overset{(n)}{v} \quad (v \neq 0)$$

Hiemit können wir statt (2) auch

$$\overset{(n)}{x'} = \overset{(n)}{v}\, (x - p_n) = \overset{(n)}{v}\, (x' - p_n') \,/\, v \tag{4}$$

schreiben.

Sehen wir bei einem Ähnlichkeitsvorgang vom Zeitgesetz ab, kommt es uns also nur auf die rein geometrischen Verhältnisse an, so erzielen wir durch die Wahl des Drehwinkels φ als parameter vielfache Vereinfachungen. Ein spezielles Beispiel ergibt sich durch besondere Wahl der Funktion ρ.

Für $\varphi = t$ und $\rho = a^{\varphi}$ finden wir aus

$$v = a^{\varphi}\, e^{i\varphi} \qquad (a \neq 1)$$

die Formel

$$\overset{(n)}{V} = (lga + i)^n\, a^{\varphi}\, e^{i\varphi}$$

Damit ergibt sich folgende Vereinfachung:

$$\overset{(n)}{x'} = (lga + i)^n\, (x' - p_n') \tag{5}$$

2. Wir vollen kurz vom Rollgleiten der Hüllbahnen[1] ähnlich veränderlicher Systeme erzählen. Hiezu betrachten wir eine in der beweglichen Ebene E befestigte Kurve K und deren Hüllbahn K′ in der festen Ebene E′. Der gemeinsame Berührungspunkt Y durchläuft nun die Kurve K mit der Relativgeschvindigkeit V_r, der die komplexe Zahl y_r entspricht. Ebenso beschreibt der Punkt Y die Kurve K′ mit der Absolutgeschwindigkeit $\vec{V}_a$, der die Zahl y_a zugeordnet werde. Da sich die beiden Kurven K, K′ in Y berühren, fallen $\vec{V}_r$ und $\vec{V}_a$ in die gemeinsame Tangente.

Solange Y von Momentanpol P_1 verschieden ist, wird auch $\vec{V}_a \neq \vec{V}_r$ sein. Der Punkt Y durchläuft daher die beiden Kurven K, K′ mit verschiedenen Geschwindigkeiten und legt in bestimmten Zeitpunkt auf ihnen verschiedene Bogenlängen zurück. Die gegenseitige Lageänderung von K und K′ ist somit aus Rollen und Gleiten zusammengesetzt. Dieser Vorgang kann durch die Gleichung

$$\vec{V}_r = \lambda \vec{V}_a$$

oder

$$y_r = \lambda\, y_a \qquad \text{bzw.} \qquad y_r' = \lambda\, y_a'$$

charakterisiert werden. Statt dieser Gleichungen können wir auch schreiben:

$$y_r = \lambda\,(y_r + y_f) \qquad \text{bzw.} \qquad y_a' - y_f' = \lambda\, y_a'$$

Hier entspricht y_f dem Führungsgeschwindigkeitsvektor. Wegen (4) finden wir schliesslich

$$\dot{y} = y_r = \lambda\,[\dot{y} + (y - p)\,\dot{v} : v]$$

bzw.

$$\lambda\,\dot{y}' = \dot{y}' - (y' - p')\,\dot{v} : v$$

Die Rollgleitzahl λ wird sich im allgemeinen mit der Zeit t ändern: $\lambda = \lambda\,(t)$.

Wir können nun nach allen Hüllkurvenpaaren K, K′ fragen, die bei unserem Ähnlichkeitsvorgang mit der vorgegebener Rollgleitzahl λ auf einander rollen und gleiten. Hiezu müssen wir obige komplexe Differentialgleichung integrieren. Nach einer Umformung finden wir

$$(6) \qquad \dot{y} = \dot{v}\, L\, (y - p) : v \qquad\qquad L = \lambda : (1 - \lambda)$$

$$(7) \qquad \dot{y}' = \dot{v}\, L'\, (y' - p') : v \qquad\qquad L' = 1 : (1 - \lambda) = 1 + L$$

Das homogene System von (6)

$$(8) \qquad \dot{y} = \dot{v}\, L\, y : v$$

kann durch den Ansatz

$$y = e^{i\,\Phi(t)}$$

gelöst werden. Für die reelle Funktion $\Phi(t)$ ergibt sich

$$\Phi(t) = -\, i \int L \frac{\dot{v}}{v}\, dt.$$

Unter Verwendung einer beliebigen komplexen Konstanten C ergibt sich somit das allgemeine Integral von (8) in der Gestalt

$$y = C\, e^{i\varphi} = C\, e^{\int L \frac{dv}{v}}$$

Das inhomogene System (6) kann nun durch Variation der Konstanten integriert werden. Wir erhalten

$$\dot{C} = -\frac{\dot{v}}{v}\, L\, p\, e^{-i\Phi}$$

und daraus

$$C = -\int \frac{\dot{v}}{v}\, L\, p\, e^{-i\Phi}\, dt + C_0 = -\int \frac{L}{v}\, p\, e^{-i\Phi}\, dv + C_0$$

mit einer Integrationskonstante C_0 .

Die Rollgleitkurven K der gangebene besitzen somit die Darstellung

$$(9) \qquad y = -\, e^{\int L \frac{dv}{v}} \left[\frac{L}{v}\, p\, e^{-\int L \frac{dv}{v}} dv - C_0 \right]$$

Für die Rollgleitkurven k' der Rastebene ergibt sich durch Integration von (7)

$$(10) \qquad y' = -\, e^{\int L' \frac{dv}{v}} \left[\frac{L'}{v}\, p'\, e^{-\int L' \frac{dv}{v}} dv - C_0' \right].$$

Bei fester λ erhalten wir die Darstellungen :

$$K \cdots \qquad y = -\, L \cdot v^{L} \cdot \int p\, v^{-(L+1)}\, d\, v + C_0\, v^{L}$$

$$K' \cdots \qquad y' = -\, L \cdot v^{L'} \cdot \int p'\, v^{-(L'+1)}\, d\, v + C_0'\, v^{L'}$$

Man kann von K mit der Formel (9) unter Verwendung von (1) auch direkt zu K′ (10) gelangen.

3. Bei einem analytischen Ähnlichkeitsvorgang

$$x' = u' + v\,\mathfrak{x}$$

sind die Grössen $u = u(t)$, $v = v(t)$ analytische Funktionen des reellen Parameters t. Sie besitzen daher diese Funktionen Ableitungen nach t von beliebig hoher Ordnung. Gleiches gilt dann auch für die Funktion $x' = x'(t)$ eines in der beweglichen Ebene E befestigten Punktes X. Diese Funktion ist dann durch (1) bei festem x bestimmt.

Die Folge der Pole P_n bricht bei einem analytischen Ähnlichkeitsvorgang nicht ab Man nennt diese Gesamtheit der Pole P_n eines analytischen Ähnlichkeitsvorgangs B zu einem bestimmten Zeitpunkt t die zugehörige Polkette[2] von B. Insbesondere verwenden wir diese Bezeichnung für die Folge der Pole P_n, wenn der Drehwinkel $\varphi = t$ als parameter und $\rho = a^{\varphi}$ gewählt wird.

Es gilt nun der

Satz : Ein analytischer Ähnlichkeitsvorgang ist abgesehen von seiner zeitlichen Durchlaufung (Zeitgesetz) durch Vorgabe der Polkette völlig bestimmt. Allgemeiner ist der Ähnlichkeitsvorgang samt seiner zeitlichen Durchlaufung bestimmt, wenn seine sämtlichen Beschleunigungspole höherer ordnung und das Zeitgesetz $\varphi = \varphi(t)$ vorgegeben werden.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt etwa aus der TAYLORschen Entwicklung der Bahnkurve Eines Punktes X der beweglichen Ebene :

$$x'(\varphi + \Delta\varphi) = x'(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta\varphi)^n}{n!} \cdot (\lg a + i)^n \cdot [x'(\varphi) - p_n'(\varphi)].$$

Man kann also tatsächlich für die Bahnkurve jedes beliebigen Punktes X von E eine Potenzreihenentwicklung angeben, die bei einem analytischen Ähnlichkeitsvorgang in der Umgebung der betrachteten Stelle φ konvergieren wird und in der nur die Koordinaten der Pole P_1, P_2, $\cdots$ P_n, $\cdots$ vorkommen.

Schreibt man im allgemeinen Fall die TAYLORsche Formel, so erhält man die Entwicklung :

$$x'(\varphi + \Delta\varphi) = x'(\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta\varphi)^n}{n!} \cdot (x' - p'_n) \overset{(n)}{v} : v .$$

Hierin entsprechen nun die p'_n den höheren Beschleunigungspolen. Bei Kenntnis von $\varphi = \varphi(t)$ und $\rho = \rho(t)$ ist dann auch $\overset{(n)}{v} : v$ und damit die zeitliche Durchlaufung der Bahnkurve jedes Punktes X bekannt.

Literaturverzeichnis

[1] H. R. Müller, Zur Kinematik des Rollgleitens. Arch. der Math. 4, 239-246 (1953).

[2] W. Blaschke — H. R. Müller, Ebene Kinematik (Math. Einzelschriften Bd. 5) München (1956), S. 76.

(Eingegangen : 20.IX.1960)