COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNİVERSITÉ D'ANKARA

Série A: Mathématique, Physique et Astronomie

TOME 22 A — ANNÉE 1973

Eine Untersuchung über die existenz gewisser metrisierbarer minimaler HAUSDORFF Topologien

von

ASUMAN ILGAZ

14

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté: Mathématiques pures et appliquées, Astronomie, Physique et Chimie théorique, expérimentale et technique, Géologie, Botanique et Zoologie.

La Revue, à l'exception des tomes I, II, III, comprend trois séries

Série A : Mathématiques, Physique et Astronomie.

Série B : Chimie.

Série C : Sciences naturelles.

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des auteurs étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adresse: Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi, Fen Fakültesi, Ankara, Turquie.

Eine Untersuchung über die existenz gewisser metrisierbarer minimaler HAUSDORFF Topologien

ASUMAN ILGAZ

Schwarzenmeer Technische Universitaet in Trabzon Abteilung für Mathematik

I. KURZFASSUNG

In einer Arbeit, die in [1] erschienen ist, hat DOMIATY gezeigt, daβ die Bergriffe "Topologie auf R" und "Metrik auf R" eigentlich voneinander unabhaengig sind.

Bisher beschraenkte man sich darauf, einem metrischen Raum (R,d) nur die, durch d in R induzierte Topologie T_d, *die natürliche Topologie in* (*R*,*d*), zuzuordnen. Nach Zugrundelegung einer geeigneten Definition (Vgl. Def. 1) kann man einem metrischem Raum weitere Topologien zuordnen und daher der Problemstellung besser angepasste Topologien auswaehlen. (Vgl. zB. [2]). In dieser Arbeit wird gezeigt, daβ man einer speziellen Klasse von metrischen Raeumen, die die üblichen euklidischen Raeumen $\mathcal{R}^n$ umfassen, eine minimale HAUSDORFF – Topologien zuordnen kann. (Vgl. Def. 2). Die Konstruktion wird explizit durchgeführt.

II. BEZEICHNUNGEN

$\varnothing$ ...... leere Menge.

R .... eine beliebige Menge.

P (R) .... Potenzmenge von R.

T (R)..... Familie aller Topologien auf R.

T_2 (R) ... Familie aller HAUSDORFF Topologien auf R.

D (R). . . . Familie aller Metriken auf R.

(R, T).... mit $T \in T$ (R) ein topologischer Raum.

A_T ...... $= [A \subseteq R \mid \complement A \in T]$ Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von R.

U_T (p) ... Menge aller Umgebungen von p $\in$ R.

(R,d) .... mit d $\in$ D (R) ein metrischer Raum.

B (p, r) .. = [q $\in$ R | d (p,q) $\leq$ r] abgeschlossene Kugel mit p $\in$ R und $0 \leq r < \infty$.

K (p,r).. = [q $\in$ R | d (p, q) < r] offene Kugel mit p $\in$ R und $0 < r < \infty$

b_d .... = [B (p, r) | p $\in$ R, $0 \leq r < \infty$]

k_d .... = [K (p, r) | p $\in$ R, $0 < r < \infty$]

V (R, d).. die Menge der mit d vertraeglichen Topologien aus T (R). (Vgl. Def. 1)

δ (M) .... Durchmesser von M $\subseteq$ R.

β .... Filterbasis aus offenen Mengen über R. (das heißt $\beta \neq \varnothing$, $\varnothing \notin \beta \subseteq T$ und zu B_1, $B_2 \subset \beta$ gilt es ein B $\subset \beta$ mit B $\subseteq B_1 \cap B_2$)

β^F .... von β über R erzeugte Filter.

LİM β.... Menge aller Limespunkten von β .

(p $\in$ LİM β genau dann, wenn $\beta F \supseteq U_T$ (p)).

LİM β.... = LİM β^F

ADH β^F.. Menge aller Adherenspunkten von β .

$$(\text{ADH } \beta = \bigcap_{B \in \beta} \overline{B} = \text{ADH } \beta^F).$$

Die Bezeichnungen "abgeschlossene" und "offene" Kugel sind hier nur im bezeichnungs technischen und nicht im topologischen Sinn zu verstehen.

III. MINIMALE HAUSDORFF TOPOLOGIEN

In [1] wurde dem metrischen Raum (R, d) eine Familie $V \subseteq T$ (R) zugeordnet. Dabei wurde verlangt, daß diese Familie mit d in einfacher Beziehung steht und neben der induzierten Topologie T_d noch möglichst viele weitere Topologien enthalten soll. Diese Forderungen führte in [1] zur folgenden Vereinbarung:

Definition I

Gegeben sei (R,d).

1. Genau dann soll ein $T \in T$ (R) *mit der* Metrik d vertraeglich heiβen, wenn

$b_d \subseteq A_T$

ist.

2. V (R,d) sei die Menge aller mit d vertraeglichen Topologien aus T (R).

Es zeigt sich, daβ in V (R,d) eine gröbste Topologie $T^*_d \in V$ (R,d) existiert. Diese Topologie wurde in [1] die* – *induzierte* oder die* – *natürliche Topologie* in (R,d) genannt. Jede Topologie T aus V (R,d) besitzt die T_1 – Eigenschaft, aber nicht jede Topologie aus V (R,d) muβ die T_2 – Eigenschaft besitzen. Zum Beispiel ist im fall δ (R) $= \infty$ der Raum (R, T^*_d) sicher kein T_2 – Raum. Leider verliert man dadurch eine, für den Aufbau einer inneren Geometrie wichtige Eigenschaft. Bei der Konstruktion der inneren Metrik in einem gewöhnlichen metrischen Raum (R,d) spielt der Begriff des Bogens eine fundamentale Rolle. Unter einem Bogen in einem topologischen Raum verstehen wir hier das ein-eindeutige und stetige Bild eines kompakten Intervalles der reellen Zahlengeraden in R.

Das ist eine etwas allgemeinere Formulierung des Bogenbegriffes; denn meiβt nennt man eine Punktmenge aus R erst dann einen Bogen, wenn sie einem kompakten Interval homöomorph ist. Dieser algemeinen Bogenbegriff faellt mit dem üblichen zusammen, wenn (R, T) ein HAUSDORFF – Raum ist. Das HAUSDORFF sche Trennungsaxiom spielt noch aus folgenden Grund eine groβe Rolle. Sei (R, T) ein fester topologischer Raum p, q und r drei Punkte aus R. Weiter sei A ein Bogen aus R, der p mit r und B ein Bogen, der r mit q verbindet.

Denkt man sich jetzt A und B in bekanter Weise aneinander gefügt, so wird A $\cup$ B i.a. kein Bogen sein, jedoch kann man, falls (R, T) ein HAUSDORFF – Raum ist, zeigen, daβ es einen Bogen C $\subseteq$ A $\cup$ B gibt, der p und q verbindet.

Denn $A \cup B$ ist das stetige Bild eines kompakten Intervalles der Zahlengeraden in einen HAUSDORFF - Raum und somit bogen - zusammenhaengend. Diese topologische Eigenschaft ist aber wesentlich zum Nachweis, daβ der innere Abstand die Dreieck Ungleichung erfüllt, dh. eine Metrik ist. Es ist daher naheliegend nach T_2 - Topolgien in V (R, d) zu fragen, vor allem nach solchen, die gröber sind als T_d.

Es sei $f : (R, T) \to (R', T')$ eine stetige Abbildung. Diese Abbildung bleibt stetig, wenn man T verfeinert und T′ vergröbert. Je gröber man daher die Topologie über der Menge R′ waehlt, desto mehr stetige Abbildungen gibt es. Insbesonders gibt es auch umso mehr Bogen in (R′, T′), je gröber die Topologie T′ ist. Zur Einführung einer inneren Metrik in (R, d) ist es aber auch wichtig, eine groβe Menge von Bogen vorraetig zu haben. Man ordne also einem metrischen Raum (R, d) eine HAUSDORFF - Topologie so zu, daβ der topologischer Raum (R, T) so viele Bogen wie möglich enthaelt. Diese Forderung ist gleichbedeutend damit, daβ T′ so grob als möglich gewaehlt wird. Somit kommt man in natürlicher Weise zur Frage nach der Existenz und Struktur von minimalen HAUSDORFF - Topologien die mit d vertraeglich sind.

In [1] wird daran anschlieβend das folgende Problem aufgeworfen.

T_2 – Problem: Man charakterisiere jene metrischen Raeume für die, eine minimale T_2 – Topologie $T^H \in V$ (R, d) existiert. Es gibt metrische Raeume, für die T^H existiert. Beispielsweise jene, in welchen $T_d = T^*_d$ oder T_d eine kompakte Topologie ist. In beiden Faellen ist $T^H = T_d$.

Nachzutragen ist nun

Definition 2.

Ein HAUSDORFF – Raum (R,T) heiβt minimal, kurz minimaler T_2 — Raum, wenn für jede Topologie $T^* \in T_2$ (R) mit $T^* \subseteq T$ die Beziehung $T^* = T$ folgt.

Ein minimaler T_2 – Raum (R,T) ist daher ein topologischer Raum, für die jede mit T vergleichbare Topologie aus T_2 (R) feiner als T ist.

SATZ I*

Ein T_2 – Raum (R, T) ist dann und nur dann ein minimaler T_2 – Raum, wenn jede Filterbasis über R, die aus offener Mengen besteht und genau einen Adherenzpunkt besitzt, konvergiert.

Beweis:

"$\rightarrow$" (indirekt): Wir machen die folgende Annahme:

Es gibt eine Topologie $T^* \in T_2$ (R), so daβ $T^* \subset T$ ist. Weil T echt feiner ist als T^*, gibt es wenigstens eine offene Menge G in T, die nicht in T^* liegt. Da $G \neq \varnothing$ sein muβ, gibt es wenigstens einen Punkt $p \in G$ mit

$$p \in G \cap \delta_{T^*} G \ .$$

(Mit δ_{T^*} G bezeichnen wir den Rand von G bezüglich der Topologie T^*.)

Weil G eine offene Umgebung von p bezüglich der Topologie T, aber nicht eine Umgebung von p bezüglich der Topologie T^* ist, ist die Menge der offenen Umgebungen von p bezüglich T eine echte Obermenge der Menge der offenen Umgebungen von p bezüglich T^*, kurz

$$U^0_T\ (p) \supset U^0_{T^*}\ (p) \ .$$

Nun sei $\beta := U^0_{T^*}\ (p)$. β ist eine Filterbasis von p in T^*, die aus offenen Mengen besteht. Nach Definition von β gilt

$$\beta \subset T \quad \text{und} \quad \beta^F \subset U_T\ (p) \ .$$

β^F ist also gröber als der Umgebungsfilter U_T (p) bezüglich T (weil $G \in U_T$ (p) mit $G \in \beta^F$), so daβ p nicht Limespunkt dieser Filterbasis sein kann. Das heiβt:

(1.1) $$p \notin \underset{T}{\mathrm{LIM}}\ \beta \ .$$

Bezüglich der T^* – Topologie ist

(1.2) $$p \in \underset{T^*}{\mathrm{LIM}}\ \beta$$

* Dieser Satz ist bekannt (Vgl. zB. [4], S. 146 Probl. 19) Da aber Beweise sehr schwer zugaenglich sind und meist sehr knapp gehalten sind (Vgl. [5]) führen wir hier eine neue Version explizit durch.

(wegen $\beta^F = U_{T^*}(p))$.

Aus (1.2) folgt, da (R, T^*) ein T_2 – Raum ist,

(1.3) $$\{p\} = \underset{T^*}{\mathrm{ADH}}\ \beta \ ;$$

wegen $T^* \subset T$ gilt weiter

(1.4) $$\underset{T^*}{\mathrm{ADH}}\ \beta \supseteq \underset{T}{\mathrm{ADH}}\ \beta .$$

Aus (1.3), (1.4) und der Tatsache, daß $p \in B$ für jedes $B \in \beta$, folgt schließlich

$$\{p\} = \underset{T}{\mathrm{ADH}}\ \beta \ .$$

Mit (1.1) haben wir daher einen Widerspruch abgeleitet.

Die Annahme $T^* \subset T$ ist daher falsch.

"$\leftarrow$" (indirekt). Es sei $\beta_0 \subseteq T$ ein Filterbasis aus offenen Mengen mit

(1.5) $$\mathrm{ADH}\ \beta_0 = \{p_0\} \text{ und } \mathrm{LIM}\ \beta_0 = \varnothing$$

Wir zeigen, daß man dann auf der Menge R eine Topologie T^* konstruieren kann, die echt gröber ist als T und das T_2 – Axiom erfüllt. Jedem Punkt $q \in R$ ordnen wir das Mengensystem

(1.6) $$W_q := \begin{cases} U_T(q) & \text{für } q \neq p_0 \\ \{U \cup B\}_{\substack{U \in U_T(p_0) \\ B \in \beta_0}} & \text{für } q = p_0 \end{cases}$$

zu.

Die Mengen W_q sind Umgebungsbasen für die Punkte q aus R bezüglich einer Topologie T^* . Denn es gilt :

a) $\forall\ q \in R, \quad V \in W_q : \quad q \in V$.

b) $\forall\ q \in R \quad \forall\ V_1, V_2 \in w_q \quad \exists\ V_3 \in W_q : \quad V_3 \subseteq V_1 \subset V_2$

Diese Aussage ist trivial für Punkte $q \neq p_0$. Für den Punkt p_0 ergibt sich die Behauptung durch direkte Berechnung.

Sei $V_1 = U_1 \cup B_1$, $V_2 = U_2 \cup B_2$ dann ist

$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cup B_1) \cap (U_2 \cup B_2) \supseteq (U_1 \cap U_2) \cup (B_1 \cap B_2)$.

Da es zu U_1 und U_2 aus $U_T(p_0)$ ein $U_3 \in U_T(p_0)$

mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ und zu B_1 und B_2 aus β_0
ein $B_3 \in \beta_0$ mit $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ gibt, erhaelt man,
wenn man $V_3 := U_3 \cup B_3 \in W_p$ setzt,

$$V_3 \subseteq (U_1 \cap U_2) \cup (B_1 \cap B_2) \subseteq V_1 \cap V_2$$

c) $\forall\, q \in R \quad V \in W_q \quad \exists\, Q \in W_q : Q \subseteq V$

$\forall\, x \in Q \quad \exists\, W \in W_x : W \subseteq Q$.

Für einen Punkt $q \neq p_0$, ergibt sich die Behauptung unmittelbar. Weil (R, T) ein T_2 – Raum ist, gibt es zu jedem $V \in W_q$ eine offene Menge Q mit

$$Q \in w_q \cap T, \qquad q \in Q \subseteq V, \qquad p_0 \notin Q \, .$$

Da $Q \in T$ ist, gilt für jeden Punkt $x \in Q$

$$\exists\, W \in W_x \cap T : W \subseteq Q \, .$$

Für den Punkt p_0 ergibt sich die Behauptung durch direkte Berechnung. Es sei $U \cup B \in W_{p_0}$, wobei nach Definition

$U \in U_T(p_0)$ und $B \in \beta_0$ ist. Es gibt eine Menge Q mit

$$p_0 \in Q \subseteq V \qquad Q \in W_{p_0} \cap T \, .$$

Da $Q \in T$ ist, gilt für jeden Punkt $x \in Q$

$$\exists\, W \in W_x \cap T : W \subseteq Q \, .$$

d) Wegen a), b), c) stellt W_q aus (1.6) für jeden Punkt $q \in R$ ein Umgebungsbasis für eine neue Topologie T^* dar. Sei $G \subseteq R$. G ist genau dann offen bezüglich T^*, kurz $G \in T^*$, wenn entweder $G = \varnothing$ oder für jeden Punkt $g \in G$, eine Menge $V \in W_g$ mit

$$V \subseteq G$$

existiert.

e) Nun zeigen wir $T^* \subseteq T$. Dazu betrachten wir das System der Umgebungen eines Punktes $q \in R$ in beiden Topologien: Ist $q \neq p_0$, so folgt nach Definition (1.6)

$$U_T(q) = U_{T^*}(q) \, .$$

Nun sei $q = p_0$. Für jede Umgebung $V \in W_q$ gibt es nach (1.6) eine Umgebung $U \in U_T(p_0)$ mit $U \subset V$.

Daraus folgt, da W_{p_0} ein Umgebungsbasis für $U_T^*(p_0)$ darstellt,

$$U_T(p_0) \supseteq U_T^*(p_0) ,$$

das heiβt e) ist richtig.

f) Jetzt zeigen wir, daβ $T^* \neq T$ ist. Aus (1.6) folgt einerseits $\beta_0^F \supseteq W_{p_0}$, und daher auch $\beta_0^F \supseteq U_T^*(p_0)$, das heiβt :

$$p_0 \in \underset{T^*}{\mathrm{LIM}} \; \beta_0 .$$

Andererseits ist nach Voraussetzung

$$\beta_0^F \not\supseteq U_T(p_0) ;$$

das heiβt, es gibt eine Umgebung. $U \in U_T(p_0)$ mit $U \notin \beta_0^F$ Für dieses U gilt $U \notin U_T^*(p_0)$. Es ergibt sich somit eine offene Menge $G \in U^0_T(p_0)$ mit $G \notin U_T^*(p_0)$, das haiβt :

$$T^* \neq T .$$

g) T^* – Topologie ist eine T_2 –Topologie: Für zwei verschiedene Punkte aus $(R - \{p_0\})$ gibt es trivialerweise punktefremde Umgebungen. Für ein Punktepaar (p_0, q) mit $p_0 \neq q$ aus R ergibt sich die Behauptung durch direkte Berechnung. Es seien

$$U_0 \in U_T(p_0) \qquad V_0 \in W_q = U_T(q)$$

zwei Umgebungen mit der Eigenschaft

$$U_0 \cap V_0 = \varnothing$$

Dann gibt es wenigstens eine Basiselement $\beta_0 \in \beta$, so daβ $q \notin \beta_0$ ist. (sonst waere $q \in \underset{T}{\mathrm{ADH}} \; \beta^F$, was wegen (1.5) $q = p_0$ zur Folge haette.)

Nun nehmen wir $\tilde{V} = V^0 \cap \complement \overline{B}_0 \in W_q$ als eine Umgebung von q und $U_0 \cup B_0 \in W_q$ als eine Umgebung von p_0 bzlg. T^* . Für den Durchschnitt dieser Umgebungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}&(U_0 \cup B_0) \cap (V_0 \cap \complement \overline{B}_0)\\ &= (U_0 \cap V_0 \cap \complement \overline{B}_0) \cup (B_0 \cap \complement \overline{B}_0 \cap V_0) = \varnothing\end{aligned}$$

Damit ist $T^* \in T_2(R)$ gezeigt.

SATZ 2

Jedem lokal - kompakten T_2 – Raum (R, T) kann man eine gröbere Topologie T_0 zuordnen, so daβ (R, T_0) ein kompakter T_2– Raum wird

Beweis :

Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

Erster Schritt :

Zuerst kompaktifizieren wir (R, T) durch die Hinzunahme eines Punktes ∞ , der nicht in R liegt und zeigen folgenden Satz: (Vgl. [6], II. Seite 43, Satz 5). Ist (R, T) ein lokal-kompakter T_2– Raum, und setzt man $R^* := R \cup \{\infty\}$, so ist die Ein - Punkt-Kompaktifizierung (R^*, T^*) von (R, T) ein kompakter T_2 – Raum. Insbesonders ist die Abbildung

$$i : R \rightarrow R^* \; ; \; i(p) = p$$

ein Homöomorphismus von (R, T) in (R^*, T^*). Wir führen den Beweis dieses Satzes deswegen durch, weil wir die Topologie T^* in expliziter Form benötigen. Wir definieren die Topologie T^* durch die Basis β :

$$B = T \cup \left\{ (R - C) \cup \{\infty\} \mid C \subseteq R, \quad C \text{ ist kompakt in } (R, T) \right\}.$$

Wir zeigen, daβ B ein Basis ist, das heiβt, daβ aus

$$B_1 \, , \, B_2 \in B \qquad\qquad B_1 \cap B_2 \in B$$

folgt.

a) Wenn B_1, $B_2 \in T$ ist, so ist die Behauptung trivial.

b) Wenn $B_1 \in T$ und $B_2 \notin T$ ist, gilt :

$$B_1 \cap [\{\infty\} \cup (R - C)] = B_1 \cap (R - C) \in T \rightarrow$$
$$B_1 \cap B_2 \in T \subseteq B .$$

c) Wenn $B_1, B_2 \notin T \rightarrow \left\{ \{\infty\} \cup (R - C_1) \right\} \cap \left\{ \{\infty\} \cup (R - C_2) \right\} \rightarrow$

$$\{\infty\} \cup \left\{ R - (C_1 \cup C_2) \right\} \in B .$$

Somit ist B ein Basis.

(A) (R^*, T^*) ist ein T_2 – Raum.

Beweis :

Es seien x und y zwei verschiedene Punkte von (R^*, T^*). Wenn sowohl x als auch y vom Punkt ∞ verschieden sind, dann gehören beide zum Raum (R, T), und es muβ zwei disjunkte offene Mengen $G, H \in T$ geben, so daβ $x \in G$ und $y \subset H$ ist. Wegen $T \subseteq T^*$ ist $G, H \in T^*$. Jetzt betrachten wir den Fall, daβ einer dieser Punkten, zB. $y = \infty$ ist. Wegen der lokal-Kompaktheit und der T_2 – Eigenschaft von (R, T), gibt es eine offene Menge $G \in T$ mit der Eigenschaft, daβ $x \in G$ und $\overline{G}$ kompakt und somit auch abgeschlossen bezüglich T ist. Daher ist $R - \overline{G}$ eine offene Menge in (R, T) und seine Komplement ist abgeschlossen und kompakt in (R, T). Nach Definition der Ein-Punkt-Kompaktifizierung ist $H := \{\infty\} \cup (R - \overline{G})$ ein offene Menge in (R^*, T^*), die den Punkt ∞ enthaelt. Wegen $x \in G \in T^*$ und $\infty \in H \in T^*$ und $G \cap H = \varnothing$ ist (A) auch in diesem Falle gezeigt.

(B) (R^*, T^*) ist ein kompakter Raum.

Beweis :

Es sei $\{G_\lambda\}_{\lambda \varepsilon \Lambda} \subseteq T^*$ eine offene Ueberdeckung von R^*. Es gibt dann ein $\lambda_0 \in \Lambda$, mit $\infty \in G_{\lambda 0}$. Weiter gibt es ein Basiselement $B \in \beta$ in der Topologie T^*, so daβ

$$\infty \in B = \{\infty\} \cup (R - C) \subseteq G_{\lambda_0}$$

Da C eine kompakte Menge in (R,T) ist, folgt :

$\mathfrak{C}\, B = \mathfrak{C}\, \{\infty\} \cap \mathfrak{C}\, (R-C) = R \cap [R^* - (R-C)] = C$
das heiβt $\mathfrak{C}\, B$ ist kompakt in (R, T).
Nun es gibt in Λ eine endliche Anzahl $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ von Indizes mit der Eigenschaft $\bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \supseteq C$. Daher ist

$$G_{\lambda_0} \cup \bigcup_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} = R^*$$

eine endliche Teilüberdeckung von $[G_\lambda]$. Damit ist (B) gezeigt.

(C) (R^*, T^*) ist ein normaler Raum.

Beweis: *

Es seien $F, F^* \in A_T{}^*$ und $F \cap F^* = \varnothing$; F und F^* sind daher kompakte Mengen in (R^*, T^*). Wegen der T_2 – Eigenschaft gibt es für jedes Punktepaar (x, x^*), $x \in F$ und $x^* \in F^*$, zwei offene Mengen $G(x, x^*)$, $G^*(x, x^*) \in T^*$ mit der Eigenschaft $x \in G(x, x^*)$, $x^* \in G^*(x, x^*)$ und

$$G(x, x^*) \cap G^*(x, x^*) = \varnothing \,.$$

Für jeden bestimmten Punkt $x \in F$, stellt die Familie $\{G^*(x, x^*) \mid x^* \in F^*\}$ eine offene Ueberdeckung von F^* dar. Wegen der kompaktheit enthaelt diese Ueberdeckung eine endliche Teilüberdeckung :

$$\{G^*(x, x^*_i) \mid i = 1,2,..,n\}$$

Wenn wir als $G^*_x = \bigcup_{i=1}^{n} G^*(x, x^*_i)$ und $\bigcap_{i=1}^{n} G(x, x^*_i) = G(x)$ nehmen, dann gilt :

$$x \in G(x),\quad F^* \subset G^*_x(x) \text{ und } G(x) \cap G^*_x(x) = \varnothing$$

Die Familie $\{ G(x) \mid x \in F \}$ stellt eine offene Ueberdeckung der kompakten Menge F dar. Wieder muß es eine endliche Teilüberdeckung geben

$$\{ G(x_i) \mid i = 1,2,3 \ldots, m \}$$

Wenn wir als $G = \bigcup_{i=1}^{m} G(x_i)$ und $G^* = \bigcap_{i=1}^{m} G^*_{x_i}(x_i)$ nehmen, dann folgt :

$$F \subset G, \qquad F^* \subset G^*, \qquad G \cap G^* = \varnothing$$

Zweiter Schritt.

Es sei (R^*, T^*) ein kompakter T_2 – Raum, und es sei $F \in A_{T^*} - \{\varnothing\}$. Dann gibt es einen kompkaten T_2 – Raum (Q, T_0), einen Punkt $q_0 \in Q$ und eine stetige Abbildung $f: R^* \to Q$ mit der Eigenschaft :

* Ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daβ jeder kompakte T_2 – Raum normal ist. Der Vollstaendigkeithalber geben wir auch dazu einen Beweis,

$$f(F) = \{q_0\} \text{ und } f : (R^* - F) \to (Q - \{q_0\})$$

ist ein Homöomorphismus.

Beweis :

Wir konstruieren diesen Raum (Q, T_0) explizit. (Vgl. auch [6] II, Seite 12, Satz 4). ρ sei folgende Aquivalenzrelation auf R^*: Für $x, y \in R^*$ gelte

$$x \, \rho \, y : \leftrightarrow \{x, y\} \subseteq F$$

Der Raum $Q: = R^* / \rho$ besteht dann aus den Aquivalenzklassen:

$$Q = \{ [q]_\rho \mid q \in R^* \} = \{ [x] \mid x \notin F\} \cup \{ [F] \mid z_0 \in F\}$$

Daraus folgt, daβ $Q : = R^* / \rho$ eine a-Zerlegung ist, das heiβt, $Q \subseteq P(R^*)$ mit

$$Q: = \{D_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq A_T - \{\varnothing\}: \begin{cases} \forall \alpha_1, \alpha_2 \in A, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 : D_{\alpha_1} \cap D_{\alpha_2} = \varnothing \\ \cup \, Q \equiv \bigcup\limits_{\alpha} D_\alpha = R^* \end{cases}$$

Die Projektion P

$$p : R^* \to Q ; \quad p(q) = [q] \quad q \in R^* .$$

ist eine surjektive Abbildung.

Bezüglich dieser Abbildung lautet die Quotienten – Topologie:

$$T_0 : = T^* / \rho : = \{G \subset Q \mid p^{-1}(G) \in T^* \} .$$

a) Die Projektion p ist s t e t i g .

Beweis :

$$\forall \; G \in T^* / \rho \; ; \; p^{-1}(G) \in T^*$$

b) Die Projektion p ist a b g e s c h l o s s e n .

Beweis :

Für jede abgeschlossene Menge $A \in A_{T^*}$ ist $p(A) = \bigcup\limits_{s \in A} [s]$,

und für jedes Element der abgeschlossenen Menge A gilt :

$$[s] = \begin{cases} \{s\} & s \notin F \\ F & s \in F \end{cases}$$

ist $A \cap F = \varnothing$, dann folgt :

$$p(A) = \bigcup_{s \in A} [s] = A \in A_{T^*} \leftrightarrow p(A) \in A_{T^* / \rho} .$$

ist hingegen $A \cap F \neq \varnothing$, so ist

$$p(A) = \bigcap_{s \in A} [s] = A \cup F \in A_{T^*} \leftrightarrow p(A) \in A_{T^*}/\rho .$$

c) Der Raum (Q, T_0) ist ein kompakter Raum.

Beweis :

(R^*, T^*) ist ein kompakter Raum und $p: R^* \to Q$ ist

nach (a) eine stetige und surjektive Abbildung.

Es sei $\{G_t\}$ eine offene Ueberdeckung von $(Q, T_0.)$.

Dann ist $\{ p^{-1} (G_t)\}$ eine offene Ueberdeckung von (R^*, T^*). Weil (R^*, T^*) kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung:

$$\{p^{-1} (G_{t_i}) \} \qquad (i = 1, 2 \ldots\ldots, n)$$

das heiβt : $Q = G_{t_1} \cup G_{t_2} \cup \ldots\ldots\ldots \cup G_{t_n}$

d) Die Abbildung $p \mid R^* - F : (R^* - F) \to Q - \{ [z_0] \}$, $z_0 \in F$, ist eine Homöomorphismus.

Beweis ;

Im Definitionsbereich $R^* - F$ ist die Abbildung p bijektiv. Wegen (a) ist sie stetig, wegen (b) ist sie abgeschlossen; daher ist $(p \mid R^* - F)^{-1}$ eine stetige Funktion. ([9], S. 54 Def. 85)

e) Aus (d) folgt, daβ der Raum (Q, T_0) ein T_2 – Raum ist.

f) Da (Q, T_0) ein kompakter T_2 – Raum ist, ist (Q, T_0) ein minimaler T_2 – Raum.

g) Die Topologie T_0 ist gröber als die Topologie T über R.

Beweis :

$$\begin{array}{lll} p : & R & \to R \\ & \downarrow T & \downarrow T_0 \end{array}$$

p ist eine stetige Abbildung $\to T \supseteq T_0$

h) Der Quotientenraum (Q, T_0) ist normal.

Beweis :

Ist der Raum (R^*, T^*) normal und ist die Projektion $p: R^* \to Q$ stetig und abgeschlossen, dann ist der Raum $(R^*/\rho, \ T^*/\rho)$ normal:

(R^*, T^*) normal $\leftrightarrow \forall\ F_0, F_1 \in A_T{}^*: \quad F_0 \cap F_1 = \varnothing$,

$\exists\ G_0, G_1 \in T^* : F_0 \subseteq G_0\ , F_1 \subseteq G_1\ , \quad G_0 \cap G_1 = \varnothing$

$\leftrightarrow \forall\ H_0, H_1 \in T^*, \quad H_0 \cup H_1 = R^*, \quad \exists\ A_0, \quad A_1 \in A_T{}^* :$

$A_0 \subseteq H_0\ , \qquad A_1 \subseteq H_1 \qquad A_0 \cup A_1 = R^*.$

Da wir wissen, daβ p eine abgeschlossene, surjektive und stetige Abbildung von R^* in R^* / ρ ist, gilt für je zwei offene Mengen $H_0, H_1 \in T^* / \rho$ mit $H_0 \cup H_1 = R^* / \rho$:

p stetig surjektif $\rightarrow$

$p^{-1} (H_0), p^{-1} (H_1) \in T^*\ , R^* = p^{-1} (H_0) \cup p^{-1} (H_1)$

(R^*, T^*) normal $\rightarrow \exists\ A_0\ , A_1 \in A_{T^*}\ : A_0 \subseteq p^{-1} (H_0)$

$A_1 \subseteq p^{-1} (H_1)$ und $A_0 \cup A_1 = R^*.$

p abgeschlossen $\rightarrow p\ (A_0) \subseteq H_0\ , p\ (A_1) \subseteq H_1$

$p\ (A_0) \cup p\ (A_1) = R^* /\rho$ und $p\ (A_0), \quad p(A_1) \in A_{T^*/\rho}$

H I L F S S A T Z

Voraussaetzungen:

1. (R, d) sei ein lokal-kompakter metrischer Raum.
2. Es gibt ein $q_0 \in R$ so daβ für alle $r \geq 0$ $B\ (q_0,r)$ kompakt ist.
3. Es sei (R^*, T^*), $R^* = R \cup [\infty]$, die 1– Punkt-Kompaktifizierung von (R, T_d).
4. ρ sei folgende Aequivalenzrelation auf R^* :

   $x\ \rho\ y : \leftrightarrow \{x,y\} \subseteq \{q_0, \infty\}$,

   $\tilde{R}: = R^* /\rho$ sei die Menge der Aequivalenzklassen und

   $\tilde{d}: \tilde{R} \times \tilde{R} \rightarrow R\ ; \quad \tilde{d}\ (\ [x]\ , [y]\ ) = d(x,y)$

   wobei $x \neq \infty$ und $y \neq \infty$ zu waehlen ist.

5. Jedem $[p] \in \tilde{R}$ wird das folgende System von Mengen zugeordnet:

$$U\ [p]:= \begin{cases} \tilde{K}([p],\ \varepsilon) \text{ wenn } [p] \neq [q_0];\ \varepsilon < 0 \text{ mit } [q_0] \notin \tilde{K}([p],\varepsilon) \\ \tilde{K}([p],\ \varepsilon)\ \cup\ \complement_{\tilde{R}}\ \tilde{B}\ ([p],\ 1/\varepsilon) \text{ wenn } [p] = [q_0]; \\ \varepsilon < 0 \text{ beliebig.} \end{cases}$$

$$U\ ([p]):=\{U([p])\}$$

Behauptungen:

1. Das System aller Mengen $\bigcup_{[p] \in \tilde{R}} U\ (\ [p]\ )$ bildet eine Basis für eine Topologie T_u .

2. $T_u = T^*/\rho$

Anmerkungen :

a) Die Topologie T^* besitz folgende Darstellung

$T^* = T_d \cup \{(R-C) \cup \{\infty\} \mid C \text{ kompakt in } (R, T_d)\}$

daraus erhaelt man sofort

$A_{T^*} = \{\ A \cup \{\infty\} \mid A \in A_{T_d}\ \{\ \cup\ \}\ C \mid C \text{ kompakt in } (R, T_d)\ \}.$

b) $\tilde{d}$ ist eine Metrik auf $\tilde{R}$; denn $\tilde{d}$ ist auf $\tilde{R}$ wohldefiniert, weil jede Aequivalenzklasse genau einen von ∞ verschiedenen Punkt R^* enthaelt.

Beweis zu 1):

Wir führen den Nachweis, daβ jedes $U\ ([p])$ eine Umgebungsbasis für eine Topologie T_u ist.

a_1) $\forall\ [p] \in \tilde{R}, \quad \forall\ V \in U([p]): \quad [p] \in V$ trivial.

a_2) $\forall\ [p] \in \tilde{R}, \quad \forall\ V_1, V_2 \in U([p]) \quad \exists\ V_3 \in U([p]):$
$V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$

Die Aussage ist trivial für Punkte $[p] \neq [q_0]$. Für den Punkt $[p] = [q_0]$ ergibt sich die Behauptung durch direkte Berechnung.

Zur Abkürzung setzen wir $\tilde{K}_i = \tilde{K}([q_0], \varepsilon_i) \quad \tilde{B}_i := \tilde{B}([q_0], 1/\varepsilon_i)$.

Es sei $V_1 = \tilde{K}_1 \cup \complement_{\tilde{R}}\ \tilde{B}_1$ und $V_2 = \tilde{K}_2 \cup \complement_{\tilde{R}}\ \tilde{B}_2$ gegeben.

$\forall\ [y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} : \quad \exists\, \varepsilon = \varepsilon([y]) > 0 : \quad \tilde{K}([y], \varepsilon) \subseteq \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} \in T_u.$

Somit ist

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} = \bigcup_{[y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A}} \tilde{K}([y], \varepsilon) \in T_u$$

das heiβt $\tilde{A} \in A_{T_u}$. Nun betrachten wir den Fall

$A = B \cup \{\infty\}$ mit $B \in A_{T_d}$ und $q_0 \in B$. Dann gilt

$\pi(A) = \pi(B) = \{[x] \mid x \in B\} \cup \{[\infty]\} = \{[x] \mid x \in B\} := \tilde{A}$

$\forall\ [y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} \quad \exists\, \varepsilon = \varepsilon([y]) > 0 : \quad K([y], \varepsilon) \subseteq \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A}$

Somit ist

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} = \bigcup_{[y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A}} \tilde{K}([x], \varepsilon) \in T_u$$

das haiβt $A \in A_{T_u}$.

$b_2)$ Zuerst betrachten wir den Fall

$A = C$, $\quad$ C ist kompakt in (R, T_d) und $q_0 \in C$

$\pi(A) = \pi(C) = \{[x] \mid x \in C\} := \tilde{A}, \qquad [q_0] \in \tilde{A}$

$\forall\ [y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} \quad \exists\, \varepsilon = \varepsilon([y] < 0 : \quad K([y], \varepsilon) \subseteq \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A}$

Somit ist

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} = \bigcup_{[y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A}} \tilde{K}([y], \varepsilon_y) \in T_u$$

das heiβt $\tilde{A} \in A_{T_u}$.

Nun betrachten wir den Fall

$A = C$, $\quad$ C ist kompakt in (R, T_d) und $q_0 \notin C$.

$\pi(A) = \pi(C) = \{[x] \mid x \in C\} := \tilde{A}, \qquad [q_0] \notin \tilde{A}$.

Wir setzen $r := \sup\limits_{[y] \in \tilde{A}} \tilde{d}([y], [q_0])$.

Es ist $r < \infty$. Denn nach der Konstruktion von d und der Kompaktheit von C gilt

$$r = \sup_{[y]\in\tilde{A}} \tilde{d}([y],[q_0]) = \sup_{y\in C} d(y, q_0) < \infty .$$

$\forall\ [y] \in \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} - \{[q_0]\} \qquad \exists\ \varepsilon = \varepsilon([y]) > 0 :$

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} - \{[q_0]\} = \bigcup_{\substack{[y]\in\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} \\ [y]\neq[q_0]}} \tilde{K}([y], \varepsilon) .$$

Weiter setzen wir $\eta := \inf_{[y]\in\tilde{A}} \tilde{d}([y], [q_0])$.

Es ist $\eta > 0$, da einerseits $\tilde{d}([y])[q_0]) = d(y,q_0)$ ist und andererseewegen der Kompaktheit von C und $q_0 \notin C$,

$$\eta = \inf_{y\in C} d(y, q_0) > 0$$

Somit ist, wenn wir $\varepsilon := 1/\eta$ setzen,

$$\tilde{K}([q_0], \frac{1}{\varepsilon+1+r}) \cup \mathfrak{a}_{\tilde{R}} B([q_0], \varepsilon+1+r) \subseteq \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} .$$

Das erkennt man daraus, weil aus $\frac{1}{\varepsilon+1+r} < 1/\varepsilon = \eta$

$\tilde{K}([q_0], \frac{1}{\varepsilon+1+r}) \cap \tilde{A} = \varnothing$, und aus $\varepsilon+1+1 > r$

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{B}([q_0], \varepsilon+1+r) \subseteq \mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A}$$

folgt. Somit ist

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} = \Big(\bigcup_{\substack{[y]\in\mathfrak{a}_{\tilde{R}}\tilde{A} \\ [y]\neq[q_0]}} \tilde{K}([y],\varepsilon)\Big) \cup \Big(\tilde{K}[q_0], \frac{1}{\varepsilon+1+r}\Big) \cup \mathfrak{a}_{\tilde{R}} B([q_0], \varepsilon+1+r) \in T_u$$

das heißt $\tilde{A} \in A_{T_u}$

Da die Abbildung $\pi : \tilde{R}^* \to \tilde{R}$ surjektiv, stetig und abgeschlossen ist, muß $\tilde{R}$ die Quotienten Topologie T^*/ρ tragen. (Vgl. [y], Seite 60. Theo. 9.2.). Damit ist

$$T_u = T^*/\rho$$

gezeigt.

der die Voraussetzungen vom Satz 3 erfüllt, bezüglich der induzierten Topologie T_d separabel. Wegen $T_u \subseteq T_d$ ist natürlich auch T_u separabel. Da aber i.a.. (R, T_u) nicht metrisierbar sein muß, kann man noch nicht schliessen, daß (R, T_u) ein A_2 –Raum ist. Im Spezialfall des $(\mathcal{R}^n, e)$ kann man jedoch diese Eigenschaft nachweisen.

SATZ 5

Sei $(\mathcal{R}^n, e)$ der euklidische Raum versehen mit der Topologie T_u (gemaeß Satz 3), dann erfüllt das $(\mathcal{R}^n, T_u)$ A_2–Abzaehlbarkeitsaxiom.

Beweis :

Es genügt, diese Aussage für den Raum $(\mathcal{R}^1, T_u)$ zu beweisen, weil $\mathcal{R}^n = \prod_{i=1}^{n} x_i$ mit $x_i = \mathcal{R}^1$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, ist.

Man waehlt für den Punkt q_0 (gemaeß dem Hilfssatz) den Punkt $0 \in \mathcal{R}^1$. Bezeichnet man mit $M := \{p_i\}$ $i \in \mathbb{N}$ die rationalen Zahlen, die wir uns in irgendeiner Weise angeordnet denken, so bleibt zu zeigen, daß das Mengensystem

$$w := \{V(p_i)\} := \begin{cases} \tilde{K}(p_i,r) & \text{wenn } 0 \neq p_i;\ r \in M \quad \text{mit } 0 \notin \tilde{K}(p,r) \\ \tilde{K}(0,r) \cup C_{\mathcal{R}^1} \tilde{B}(0, 1/r)\ r \in M & \text{beliebig,} \end{cases}$$

eine abzaehlbare Basis für die Topologie T_u ist. Das heißt es ist zu zeigen, daß für jedes

$U \in U(p)$ und $q \in U$ ein $V \in w$ existiert mit $q \in V \subseteq U$.

$U(p) := \tilde{K}(p, \varepsilon)$ mit $p \neq 0$, $\varepsilon > 0$ und $0 \notin \tilde{K}(p, \varepsilon)$

Sei $U = \tilde{K}(p, \varepsilon)$, $q \in U$ und $\tilde{d}(p,q) = \eta$.

Es gibt sicher eine offene Kugel

$\tilde{K}(q,\delta)$: $q \in \tilde{K}(q,\delta) \subset U$ wobei $\delta = \dfrac{\varepsilon - \eta}{2}$ sei .

Da M dicht in $\mathbb{R}^1$ liegt, gibt es ein Punkt $p_j \in M - \{0\}$

$\tilde{d}(q,p_j) < 1/3\ \delta$. Es sei r_j eine rationale Zahl mit der Eigenschaft $1/3\ \delta < r_j < 2/3\ \delta$. Dann ist

$$q \in \tilde{K}(p_j, r_j) \subset \tilde{K}(q, \delta) \subset U .$$

$\tilde{K}(p_j, r_j)$ ist eine Kugel, mit dem Mittelpunkt $p_j \in M$ und rationalen Radius r_j. Das heißt

$$V = \tilde{K}(p_j, r_j) \in w \quad \text{und} \quad q \in V \subset U .$$

Nun betrachten wir den Fall für die Umgebungen vom Typ $U(p) := \tilde{K}(p, \varepsilon) \cup \complement_{\tilde{\mathcal{R}}^1} \tilde{B}(p, {}^1/\varepsilon)$ mit $p = 0\ \varepsilon < 0$ (beliebig). Wenn $\tilde{d}(q,0) < \varepsilon$ ist, dann kann man, wie oben, eine Kugel mit dem Mittelpunkt $p_j \in M$ und rationalen Radius r_j $\tilde{K}(p_j, r_j)$ konstruieren, so daß

$$q \subset \tilde{K}(p_j, r_j) \subset U .$$

Wenn $\tilde{d}(q, 0) > 1/\varepsilon$ ist, dann waehlt man ein Punkt $q \in U$ mit $\tilde{d}(0,q) := \eta$. Es gibt sicher eine offene Kugel

$$\tilde{K}(q,\delta)\colon q \in \tilde{K}(q,\delta) \subset U, \quad \text{wobei} \quad \delta = \frac{\eta - 1/\varepsilon}{2} .$$

Da M dicht in $\mathcal{R}^1$ liegt, gibt es ein Punkt

$p_j \in M - \{0\}$: $\tilde{d}(q, p_j) < 1/3\ \delta$. Es sei r_j eine rationale Zahl mit der Eigenschaft $1/3\ \delta < r_j < 2/3\ \delta$. Es ist sicher, daß

$$q \in \tilde{K}(p_j, r_j) \subset \tilde{K}(q,\delta) \subset U .$$

Aber

$$V = \tilde{K}(p_j, r_j) \in w, \quad \text{also } q \in V \subset U$$

Somit ist $w := V(p_i)$ eine abzaehlbare Basis für die Topologie T_u über die Menge $\mathcal{R}^1$.

Weiter wurde nachgewiesen, daß mit e vertraeglichen metrisierbaren Topologien, die gröber sind als T_e, auf $\mathcal{R}^n$ existieren.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. Z. DOMIATY,. Zur Topologisierung metrischer Raeume. (Erscheint im CRELLE J.)

[2] R. Z. DOMIATY, Metrische Raeume mit einer Elementarlaenge. (Monatschriffte für Math. 76, 1972)

[3] M. P. BERRI, Minimal Topological Spaces. (Trans. Amer. Math. Soc. 108. 1963)

[4] N. BOURBAKI, General Topologie. 1, II,.Paris, 1966

[5] J. GIRHINY, Minimal and Maximal Topologies. (Mc. Master. Math. Report Nr. 32, 1970)

[6] K.KURATOWSKI, Topologie I, II. Warsaw 1952

[7] W. J. PERVİN, Foundation of General Topologie. (New York. 1964).

[8] N. SMYTHE and C. A. WILKINS, Minimal Hausdorff and Maximal compact Spaces.

[9] S. WILLARD, General Topology. (Reading Mass. 1970)

ÖZET

"Bir R cümlesi üzerindeki Metrik" ve "Bir R cümlesi üzerindeki Topoloji" kavramlarının aslında birbirinden tamamen bağımsız olduğunu [I] de Domiaty göstermiştir.

Şimdiye kadar bir (R, d) metrik uzayı üzerinde d metriği vasıtasıyle kurulan T_d topolojisi yani "(R, d) deki Tabiî Topoloji" ile çalışılıyordu. Uygun bir tarifle (Tarif. 1) bir metrik uzay üzerine çeşitli topolojiler kurulabilir ve sorunlarımıza en iyi cevap verebilecek bir Topoloji seçilebilir. (Tarif. 2)

Bu çalışmada metrik uzayların özel bir sınıfına, ki bu sınıf $\mathcal{R}^n$ öklid uzayımızı kapsar, bir minimal Hausdorff-Topoloji yerleştirilebileceği gösterilecektir. (Tarif. 2)