COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A_1: Mathématique

TOME 24 ANNÉE 1975

Quelques Proprietes De La Categorie De Baire

by

Ahmet ABDIK

7

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sciences
de l'Université d'Ankara

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté.

La Revue, Jusqu'a 1975 à l'exception des tomes I, II, III, était composée de trois séries:

Série A: Mathématique, Physique et Astronomie.

Série B: Chimie.

Série C: Sciences naturelles.

A partir de 1975 la Revue comprend sept séries:

Série A_1: Mathématique
Série A_2: Physique
Série A_3: Astronomie
Série B : Chimie
Série C_1: Géologie
Série C_2: Botanique
Série C_3: Zoologie

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des auteurs étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adres: Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi Fen Fakültesi, Ankara, Turquie.

Quelques Proprietes De La Categorie De Baire

par:

Ahmet ABDIK

PRELIMINAIRE

Dans ce travail, nous avons étudié les problèmes suivats: 1) Une caractérisation des espaces de Baire, 2) équicontinuité et espaces de Baire.

NATATIONS: Soient E un espace topologique et A un sous-espace de E. On dit que A est un $G\sigma$ s'il est une intersection dénombrable de parties ouvertes de E.L'ensemble A est dit un $F\sigma$ s'il est une réunion dénombrable de parties fermées de E. Enfin, $\bar{A}$ désignera la fermeture de A et $\mathring{A}$ son intérieur.

— I —

UNE CARACTERISATION DES ESPACES DE BAIRE

DEFINITION: Soient E un espace topologique, u: $E \to R$ une fonction semicontinue inférieurement et $\{A_i;\ 1\ i \in I\}$ la famille des ouverts de E telle que dans chaque A_i, u soit majorée. Nous désignerons par Z_u la réunion de la famille $\{A_i;\ 1\ i \in I\}$.

Remarque: Soient E un espace topologique et (K_n) une une suite de fermés recouvrant E. Alors ile existe une suite croissante de fermés (F_n) recouvrant E. En effet, il suffit de poser:

$F_n = K_1 \cup K_2 \cup \dots\dots \cup K_n$

PROPOSITION 1-1: Soit E un espace topologique.

1) A toute fonction u: $E \to R$ semi-continue inférieurement il correspond une suite de fermés (F_n) recouvrant E.

2) A toute suite de fermés (F_n) recouvrant E, il correspond une fonction u: $E \to R$ semi-continue inférieurement.

Dans les deux cas, on a $Zu = \bigcup\limits_n \mathring{F}_n$

Démonstration : Soit une fonction u: $E \to R$ semi-continue inférieurement. L'ensemble

$$F_n = \{ x : x \in E \; ; \; u(x) \leq n \}$$

est un ferme de E et la suite (F_n) répond bien à la question. Réciproquement soit (F_n) une suite de fermés recouvrant E.D'après la remarque précédente, on peut supposer la suite (F_n) croissante. La fonction

$$u(x) = \operatorname{Inf}(n) \; ; \; x \in F_n$$

est la fonction cherchée

Con idérons une fonction u: $E \to R$ semi-continue inférieurement et la suite de fermés (F_n) associée à u. Soit $Zu = \bigcup_{\iota} \{ A_\iota \; ; \; \iota \in I \}$ Comme dans chaque A_ι, u est majorée, il existe un F_n tel que $A_\iota \subset F_n$, ce qui implique $A_\iota \subset \mathring{F}_n$. Donc Zu est contenu dans la réunion des $\mathring{F}_n$. Soit une suite croissante de fermés (F_n). A la suite (F_n) il correspond la fonction u : $E \to R$ semi-continue inférieurement. Il est évident que dans chaque $\mathring{F}_n$ la fonstion u est majorée, donc tout $\mathring{F}_n \subset Z_u$; donc la réunion des $\mathring{F}_n$ est contenue dans Z_u.

THEOREME 1.1– Soit E un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) E est non maigre

(b) pour toute fonction u: $E \to R$ semi-continue inférieurement Z_u est non vide

(c) pour toute suite de fermés (F_n) recouvrant E, la réunion des $\mathring{F}_n$ est non vide.

Démonstration : l'équivalence des (b) et (c) est une conséquence de la proposition 1–1.Quant à l'équivalence de (a) et de (c) est évidente d'après la définition même d'un espace non maigre.

Remarque : Ce théorème est une amélioration de ([1], proposition 1).

THEOREME: 1.2– Soit E un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) E est un espace de Baire.

(b) pour toute fonction u: $E \to R$ semi-continue inférieurement, Z_u est partout dense dans E.

(c) pour toute suite de fermés (F_n) recouvrant E, la réunion des $\overset{\circ}{F}_n$ est partout dense dans E.

Démonstration : L'équivalence des (b) et (c) est évidente en vertu de la proposition 1.1.

Supposons (a) réalisée. Soient une fonction u: $E \mapsto R$ semi-continue inférieurement et A un ouvert non vide de E. D'après ([2], ch: 9, § 5) A est non maigre. Il existe donc un ouvert V dans A sur lequel u est majorée: Théorème 1.1. Il en résulte que $V \subset Z_u$. Ce qui implique que Z_u est partout dense dans E. Si E n'est pas un espace de Baire, E possède un ouvert non vide A lequel est maigre en vertu de ([2], ch: 9, § : 5). A est donc contenu dans une réunion d'une suite de fermés (K_n) sans intérieur. Posons:

$$F = E \setminus A \ , \ F_n = F \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup K_n$$

(F_n) est une suite croissante de fermés recouvrant E. Comme E est non maigre le théorème 1.1 montre que la réunion des $\overset{\circ}{F}_n$ est non vide et chaque $\overset{\circ}{F}_n$ doit être contenu dans F. Ce qui prouve bien que la réunion des $\overset{\circ}{F}_n$ n'est pas dense partout dans E.

THEOREME 1.2– Soient E un espace topologique complètement régulier et d une distance sur E. Si pour tout point a de E la fonction

$x \to d\ (a, x)$

de E dans R est semi-continue supérieurement. On a:

1) la topologie définie par d est moins fine que la topologie de E.

2) Si Ê est le complété de E, d se prolonge en une semi-métrique sur Ê. Notons-la par $\overline{d}$, alors pour tout point x de E, il existe un point y de Ê tel que $\overline{d}\ (x,y) = 0$.

Démonstration : 1) soit $r > 0$ L'ensemble

$$\{ x : x \in E \ , \ d\ (a,x) < r \} = B$$

est un ouvert de E puisque la fonction $x \mapsto d\ (a,x)$ est semi-continue supérieurement. Désignons par T la topologie définie par d sur E. Donc, toute boule ouverte pour T est ouvert de E: T est donc moins fine que la topologie de E.

2) soit $\hat{E}$ le complété de E. Comme d est uniformément continue elle se prolonge d'une façon unique à $\hat{E}$. Désignons-la par $\bar{d}$. La fonction $\bar{d}$ est évidemment semi-métrique sur $\hat{E}$.Si $\bar{d}$ était une, métrique $(\hat{E}, \bar{d})$ serait un espace métrique complet. D'après ([3]; th: XVIII; 8, 1) tout filtre de Cauchy sur E serait convergente pour $(\hat{E}, \bar{d})$. Donc, la topologie de E et T coinncideraient.

— II —

EQUICONTINUITE ET ESPACES DE BAIRE

DEFINITION: Soient E un espace topologique (F,d) un espace métrique, (f_n) une suite d'applications de E dans F. Si tout point de E adment un voisinage V sur lequel la suite (f_n) converge uniformément vers f; on dira que la suite (f_n) converge vers f localement uniformément.

LEMME 2.1: Soient E un espace topologique, (F, d) un espace métrique, a un point de E, et (f_n) une suite d'applications continues de E dans F au point a. Si la suite (f_n) converge localement uniformément vers f, alors la suite (f_n) est équicontinue au point a.

Démonstration : Comme (f_n) converge vers f localement uniformément à tout $\varepsilon > 0$, il corespond un voisinage V de a et un entier $p > 0$ tels que pour tout $n \geq p$, et pour tout point x de V on a: $d(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon/3$ Cette limite f est évidemment continue. L'ensemble $\{f, f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_{p-1}\}$ est équicontinu. Il existe donc un voisinage U de a tel que:

$$d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon/3 \quad \text{et} \quad d(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon/3 \quad \text{pour } n < p.$$

Pour tout point x de $W = U \cap V$, on a :

$$d(f_n(a),f_n(x)) \leq d(f_n(a), f(a)) + d(f(a),f(x)) + d(f(x),f_n(x)) \leq \varepsilon, \forall_n$$

THEOREME 2.1: Soient E un espace topologique, (F,d) un espace métrique, a un point de F et (f_n) une suite d'applications continues de E dans F. Désignons par L l'ensemble des points de E où (f_n) converge ver a. Alors L est un $F\sigma\delta$

Démonstrarion : Soit

$$E_{n,p,q} = \{ x : x \in E;\ d\,(f_p(x), a) \leq 1/n \ ;\ p \geq q)\}$$

$E_{n,p,q}$ est évidemment fermé.

$$E_{n,q} = \bigcap_p E_{n,p,q}$$

$$L = \bigcap_n (\bigcup_q E_{n,q})$$

d'où le résultat.

Corollaire : Soient E un espace topologique (F,d) un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues de E dans F qui converge simple ment vers f. si $\sim$ est la relation d'équivalence défininie sur E par f

$(x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$) ,alors pour tout point x de E la classe d'équivalence C_x de x est un $F_{\sigma\delta}$.

Démonstration : En effet, soient x un point de E et C_x sa classe d'équivalence. Posons $a = f(x)$.

$C_x = \{x : x \in E \ ;\ f(x) = a\}$

est l'ensemble des points de E où (f_n) converge vers a. D'où le résultat en vertu du théotème 2.1

Remarquons que si f est continue pour tout point x de E, sa classe d'équivalence C_x est un fermé.

THEOREME 2.2: Soient E un espace de Baire, (F,d) un espace métrique, (f_n) une suite d'applications continues de E dans F, convergeant simplement vers une appilcation f. Alors,

1) f est continue sur un sous-espace E_0 de E qui est partout dense. De plus, E_0 est un G_δ .

2) la restriction de la suite (f_n) sur E_0 est équicontinue et la suite (f_n) converge vers f uniformemont sur tout compact de E_0

Démonstration: La première partie du théorème est un résultat classique dû à Kuratocwski ([4]). Quant à la deuxième partie, on la démontre en tenant compte de la proposition 1.1 et en appliquant le Lemme 2.1; cette partie est un résultat non classique.

Remarque: 1 On voit donc que l'ensemble des points de E où la suite (f_n) n'est pas équicontinue est un ensemble maigre.

Ramarque 2: Si x est point de E et C_x sa classe d'équivalence, l'intersection de C_x avec E_9 est fermée dans E_9 alors que C_x est un $F\sigma\delta$ dans E.

Remarque 3 La continuité de f implique l'équicontinuité de (f_n). Mais si E n'est pas un espace de Baire, cette proprieté n'est pas vraie.

THEOREME 2.3: Soient E un espace topologique connexe, (F,d) un espace métrique complet, (f_n) suite d'applications équicontinue de E dans F. Si en un point x_9 de E la suite $(f_n(x_9))$ est une suite de Cauchy dans F. Alosr, la suite (f_n) converge vers une application f continue. De plus, la suite (f_n) converge vers f sur tout compact.

Démonstration : Désignons par A l'ensembl des points x de E pour les quels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F. A n'est pas vide puisqu'il contient le point x_9. Soit a un point de A; d'après l'équicontinuité pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de a tel que pour tout point x de U et pour tout n on a:

$$d(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon/3$$

Il existe un entier $p > 0$ tel que pour tout $n \geq p$ et pour tout $m \geq p$, on a:

$$d(f_n(x),f_m(x)) \leq d(f_n(x),f_n(a)) + d(f_n(a),f_m(a)) + d(f_m(a),f_m(x)) \leq \varepsilon$$

Donc U est une partie de A, par conséquent, A est un ouvert de E. Soit a un point de $\bar{A}$. D'après l'èéquicontinuité pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de a tel que pour tout x de V et pour tout entier n, on a:

$$d(f_n(x), f_n(a)) \leq \varepsilon/3$$

Comme $V \cap A$ est non vide, nous pouvons supposer que x appartient à A. Or par hypothèse au point x la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy, Dnoc, il existe un entier $p > 0$ tel que pour tout $n \geq p$ et pour tout $m \geq p$ on a:

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon/3$$

d'où

$$d(f_n(a), f_m(a)) \leq d(f_n(a), f_n(x)) + d(f_n(x), f_m(x)) + d(f_m(x),f_m(a)) \leq \varepsilon$$

Par suite au point a, la suite (f_n (a)) est une suite de Cauchy. Donc le point a appartient à A. Par conséquent, A est aussi fermé. Comme E est connexe, E=A.

Pour tout point x de E, f_n (x) étant une suite de Cauchy, et (F,d) complet, la suite (f_n) converge simplement vers une application f. D'après le théorème, d'Ascoli f est continue et (f_n) converge vers f sur tout compact.

REFERENCE ET BIBLIOGRAPHIE

[1] **Brandao Lopes Pinto.** *Catêgorie et semi-continuitê infêrieure.* Instituto. matématico. "Ulisse Di ni". Universita degli Studi di Firenza, 1972/18.

[2] **N. Bourbaki.** *Topologie gênêrale,* Livre III, Ch. 9. Hermann Paris 1958.

[3] **L. Schwartz.** *Topologie et analyse fonctionnelle.* Hermann, Paris 1970.

[4] **Kuratowski.** *Topology,* Academic Press London 1966.

[5] **Gelfand.** *Sur un lemme de la thêorie des espaces linêaires.* /"Comm. Soc. Math." Karkow, 13, 1936.

[6] **Brandao Lopes Pinto.** *Functions with values in a ordered topological linear space.* Bull. Un. Mat. it (41.4) 1972.

ÖZET

Bu çalışmada, Baire uzaylarının bir karakterizasyonu ve eşsüreklilikle Baire uzaylarının ilişkileri incelenmeştir.

Prix de l'abonnement annuel

Turquie : 15 TL; Étranger: 30 TL.

Prix de ce numéro : 5 TL (pour la vente en Turquie).

Prière de s'adresser pour l'abonnement à : Fen Fakültesi Dekanlığı Ankara, Turquie.

Ankara Üniversitesi Basımevi. Ankara - 1976