COMMUNICATIONS

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ D'ANKARA

Série A_1: Mathématique

TOME 24 ANNÉE 1975

Über Qualitaetskontrolle

by

Maide ORUÇ

9

Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara
Ankara, Turquie

Communications de la Faculté des Sciences
de l'Université d'Ankara

La Revue "Communications de la Faculté des Sciences de l'Université d'Ankara" est un organe de publication englobant toutes les disciplines scientifiques représentées à la Faculté.

La Revue, Jusqu'a 1975 à l'exception des tomes I, II, III, était composée de trois séries:

Série A: Mathématique, Physique et Astronomie.

Série B: Chimie.

Série C: Sciences naturelles.

A partir de 1975 la Revue comprend sept séries:

Série A_1: Mathématique
Série A_2: Physique
Série A_3: Astronomie
Série B : Chimie
Série C_1: Géologie
Série C_2: Botanique
Série C_3: Zoologie

En principe, la Revue est réservée aux mémoires originaux des membres de la Faculté. Elle accepte cependant, dans la mesure de la place disponible, les communications des auteurs étrangers. Les langues allemande, anglaise et française sont admises indifféremment. Les articles devront être accompagnés d'un bref sommaire en langue turque.

Adres: Fen Fakültesi Tebliğler Dergisi Fen Fakültesi, Ankara, Turquie.

Über Qualitaetskontrolle

Maide ORUÇ

Zusammenfassung

Für das Minimum des Maximum von Regretfunktion bei der Normalverteilung sind die Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. und 2. Art beim Sequenztest als $\alpha = \beta = 0{,}2354$ bestimmt worden. In dieser Arbeit verwenden wir dieselbe Verteilung und wir bestimmen die Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. und 2.Art für eine vorherbestimmte Anzahl n_0 der Beobachtungen beim Abbrechen des Sequenztestes. Dann wollen wir die beste Wert von der Anzahl der Beobachtungen bestimmen.

§ 1. EINLEITUNG

Die Qualitaetskontrolle kann als ein Minimumproblem in der folgenden Art formuliert werden: In einer Partie eines Massenproduktes sei der Prozentsatz der schlechten Stücke gleich p. Wir möchten nun für ein bestimmtes p_o die Partie gerne verwerfen, wenn $p > p_o$ ist ,und annehmen, wenn $p \leqq p_o$ ist. Die Wahrscheinlichhkeit der Annahme auf Grund eines Testes sei L(p) und die *Regretfunktion*, d. h. der Erwartungswert des Verlustes durch eine falsche Enstscheidung, sei R(p). In einer Arbeit in der Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie hat B. L. van der Waerden die folgenden Form der Regretfunktion angenommen [1]:

$$(1) \qquad \begin{cases} R(p) = c(p_o-p)\ [1 - L(p)] + f\,E(p) & \text{für } p \leqq p_o\,, \\ R(p) = c(p - p_o)\,L(p) + f\ E(p) & \text{für } p > p_o\,. \end{cases}$$

Dabei ist E(p) Erwartungswert des Umfangs der Stichprobe. Das Minimumproblem besteht dann darin, einen Test zu finden, bei dem das Maximum der Funktion R(p) möglichst klein ausfaellt.

Der von A. Wald eingeführte Probability Ratio Test $T(p_1, p_2, A, B)$ ist durch vier reelle Zahlen p_1, p_2, A, B mit $0 < p_1 < p_o < p_2 < 1$ und $0 < B < A$ definiert. Bei diesem Test wird die Inspektion fortgesetzt, solange das Verhaeltnis

$$\frac{p_{2m}}{p_{1m}} = \frac{p_2^d\,(1-p_2)^{m-d}}{p_1^d\,(1-p_1)^{m-d}} \tag{2}$$

zwischen B und A liegt. Hier bedeutet m den Umfang der Stichprobe und d die Anzahl der schlechten Stücke. Wird das Verhaeltnis (2) $\geqq$ A, so wird die Partie verworfen, wird es $\leqq$ B, so wird sie angenommen. Für diesen Test hat A. Wald den folgenden Satz bewiesen: *Die wahrscheinlichkeit dafür, dass der Probability Ratio Test schliesslich beendet wird, ist Eins.* [2].

In der vorliegenden Arbeit wollen wir für die Anzahl der Beobachtungen eine Schranke annehmen. A. Wald die folgende Regel für das Abrechen des Testes angegeben: *Wenn der Probability Ratio Test für $n = n_0$ nicht abgeschlossen werden kann, wird die Partie angenommen, wenn*

$$\ln \frac{p_{2n}}{p_{1n}} \leqq 0 \tag{3}$$

ist; Sie wird aber verworfen, wenn

$$0 < \ln \frac{p_{2n}}{p_{1n}} \tag{4}$$

ist. [4].

§. 2. DIE BESTIMMUNG DER WARSCHEINLICHKEITEN DER FEHLER 1. UND 2. ART FÜR EINE VORHERBESTIMMTE ANZAHL n_0 DER BEOBACHTUNGEN

Durch das Abbrechen des Sequenztestes werden die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler der 1. und 2. Art sich aendern. Die Wirkung des Abbrechens auf α und β haengt von n_0 ab. Je grösser man n_0 nimmt, desto kleiner wird die Wirkung des Abbrechens auf α und β. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. und 2. Art bei dem Abbrechen mit $\alpha(n_0)$ und $\beta(n_0)$. Nach A. Wald gilt

$$\alpha\,(n_0) \leqq \alpha + G\,(\nu_2) - G\,(\nu_1) \tag{5}$$

$$\beta\,(n_0) \leqq \beta + G\,(\nu_4) - G\,(\nu_3) \tag{6}$$

wobei die Werte ν_1 bis ν_4 durch

$$(7)\qquad \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{-\,n_o\,E_1\,(z)}{\sqrt{n_o}\cdot\sigma_1\,(z)}\,, \\[2ex] \nu_2 = \dfrac{\ln A - n_o\,E_1\,(z)}{\sqrt{n_o}\,\sigma_1\,(z)}\,, \\[2ex] \nu_3 = \dfrac{\ln B - n_o\,E_2\,(z)}{\sqrt{n_o}\,\sigma_2\,(z)}\,, \\[2ex] \nu_4 = \dfrac{-\,n_o\,E_2\,(z)}{\sqrt{n_o}\,\sigma_2\,(z)} \end{cases}$$

und die Funktion G durch

$$(8)\qquad G\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\,t^2}\,dt$$

gegeben sind [4]. Wenn die Verteilung unter der Hypothese H_1 den Erwartungswert p_1 und unter H_2 den Erwartungswert p_2 hat, so wird (2) wie folgt geschrieben:

$$(9)\qquad \frac{p_{2n_o}}{p_{1n_o}} = \frac{f(x_1\,,p_2)\,f(x_2\,,p_2)\,\ldots\,f(xn_o\,,p_2)}{f(x_1\,,p_1)\,f(x_2\,,p_1)\,\ldots\,f(xn_o\,,p_1)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n_o} \frac{f(x_i\,,p_2)}{f(x_i\,,p_1)}\,.$$

Das in (7) benutzte z ist dann

$$(10)\qquad z = \sum_{i=1}^{n_o} \ln \frac{f(x_i\,,p_2)}{f(x_1\,,p_1)}\,.$$

waehrend $n_o\,E_i\,(z)$ und $\sigma_i(z)$ der Erwartungswert und die Varianz von z sind, wenn die Hypothese H_i richtig ist $(i = 1{,}2)$.

Im Fall von Normalverteilungen mit den Erwartungswerten $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ und mit den beiden Varianzen gleich 1 wird nach A. Wald

$$(11)\qquad z = \tfrac{1}{2}\,[2px - p^2] = px - \tfrac{1}{2}\,p^2$$

$$(12)\qquad E_1\,(z) = -\,\tfrac{1}{2}\,p^2$$

(13) $$E_2(z) = \frac{1}{2} p^2$$

(14) $$\sigma_1(z) = \sigma_2(z) = p$$

[5].

Für R_{max}, d. h. das Minumum des Maximums von der Regretfunktion $R(p)$ sind bei der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeiten der Fehler 1. und 2. Art nach B. L. van der Waerden [6]

$$\alpha = \beta = 0.2354$$

Wir bestimmen p so, dass die Anzahl der Beobachtungen nach dem maechtigsten nicht-sequenztiellen Test mit Irrtumwahrscheinlichkeiten α und β gleich 1000 ist. Nach A. Wald ist

(15) $$p^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)^2}{1000} .$$

wobei

(16) $$\begin{cases} G(\lambda_1) = \beta \\ G(\lambda_0) = 1 - \alpha \end{cases}$$

ist [7].

Für $\alpha = \beta = 0.2354$ ergibt sich

(17) $$\begin{cases} \lambda_0 = 0.721 \\ \lambda_1 = -0.721 \end{cases}$$

und

(18) $$p^2 = \frac{(1.442)^2}{1000} .$$

Daher erhalten wir

(19) $$\sigma_1(z) = \sigma_2(z) = p = \frac{1.442}{\sqrt{1000}}$$

und

(20) $$\begin{cases} E_1(z) = -\dfrac{p^2}{2} = -0.00104 \\ E_2(z) = \dfrac{p^2}{2} = 0.00104 . \end{cases}$$

Nimmt man $\alpha = \beta = 0.2354$ an, so ergibt sich

(21) $$\ln A = - \ln B = 1{,}178 \; .$$

Damit berechnen wir nach Formel (7) die Werte ν_1 bis ν_4

(22) $$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{0.00104\, n_0}{1.442\, \sqrt{n_0}} \cdot \sqrt{1000} \; . \\[2ex] \nu_2 = \dfrac{1.78 + 0.00104\, n_0}{1.442\, \sqrt{n_0}} \sqrt{1000} \; . \\[2ex] \nu_3 = \dfrac{-\,1.178 - 0.00104\, n_0}{1.442\, \sqrt{n_0}} \sqrt{1000}, \\[2ex] \nu_4 = \dfrac{-\,0.00104\, n_0}{1.442\, \sqrt{n_0}} \sqrt{1000} \; . \end{cases}$$

Aus den Formeln (22), (5), (6) erhalten wir für verschiedene n_0 die oberen Grenzen von $\alpha\,(n_0)$ und $\beta(n_0)$. Diese sind in der Tafel 1 angegeben.

TAFEL 1

Anzahl n_0 der Beobachtungen	$\alpha = 0.2354$ und	$\beta = 0.2354$
	Obere Grenze des effektiven α	Obere Grenze des effektiven β
1 000	0.4094	0.4094
1 200	0.3884	0.3884
1 400	0.3713	0.3713
1 600	0.3562	0.3562
1 800	0.3443	0.3443
2 000	0.3345	0.3345
2 200	0.3251	0.3251
2 300	0.3217	0.3217
2 350	0.3184	0.3184
2 400	0.3163	0.3163
3 000	0.2983	0.2983
4 000	0.2781	0.2781
5 000	0.2652	0.2652
10 000	0.2412	0.2412
20 000	0.2358	0.2358
30 000	0.2354	0.2354
40 000	0.2354	0.2354

§ 3. REGRETWERTE BEİM ABBRECHEN DES SEQUENZTESTES IN DER NORMALEN NAEHERUNG

Die in der Regretfunktion (1) vorkommenden Funktionen L(p) und E(p) können nach A. Wald für den nicht-abgebrochenen Sequenztest so angesetzt werden [8]:

$$(23) \qquad L(p) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} .$$

Hier ist $A = \frac{1 - \beta}{\alpha}$, $B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ und h wird als Funktion von p implizit durch die Gleicung

$$p\ e^{z'h} + (1 - p)\ e^{z''h} = 1$$

gegeben. Dabei sind z' und z'' durch

$$z' = \ln p_2 - \ln p_1 \quad ,$$

$$z'' = \ln (1 - p_2) - \ln (1 - p_1)$$

definiert. Ferner ist

$$(24) \qquad E(p) = \frac{L(p) \ln B + [1 - L(p)] \ln A}{F(p)} ,$$

wobei F(p) durch

$$F(p) = p\ z' + (1 - p)\ z''$$

definiert.

Bei der Normalverteilung ist $\alpha = \beta$ und infolgedessen $\ln A = - \ln B$. So ergibt sich

$$(25) \qquad L(p) = \frac{A^h}{A^h + 1} ,$$

$$(26) \qquad E(p) = \frac{1 - 2\ L(p)}{F(p)} \ln A .$$

Nach B. L. van der Waerden nimmt die Regretfunktion bei Normalverteilung ihre Minimaxwerte gerade bei $p = p_1 = p_0 - \varepsilon$ und $p = p_2 = p_0 + \varepsilon$ an und es ist

$$\alpha = 0.2354$$

und

$$\varepsilon = 1.3885\ \sigma^{2/3}\ f^{1/3}\ c^{-1/3}$$

[4] . Wie ich in einer früheren Arbeit [9] gezeigt habe, ist

$$R_{max} = 0.4885\ \sigma^{2/3}\ f^{1/3}\ c^{2/3}\ .$$

Bei dem Abbrechen des Sequenztestes ist die Regretfunktion wieder in der Form (1) anzusetzen. Nur müssen wir bei der Berechnung von $L(p)$ und $E(p)$ ε als sehr klein betrachten und anstatt α und β durch $\alpha(n_o)$ und $\beta(n_o)$ ersetzen. So ergibt sich

$$L^*(p) = \frac{A^{*h}}{A^{*h} + 1} \tag{27}$$

und

$$E^*(p) = \frac{1 - 2L^*(p)}{F^*(p)} \quad \ln\ A^* \quad ,$$

wobei $$A^* = \frac{1 - \alpha\ (n_o)}{\alpha(n_o)}$$ ist.

Um R_{max} beim Abbrechen des Sequenztestes zu rechnen, können wir die Anzahl der Beobachtungen so bestimmen, dass der Regretwert $R^*(n_o)$

$$R^*(n_o) \leqq 1{,}05\ R_{max} \tag{28}$$

wird. Diesen Regretwert $R^*(n_o)$ können wir als Minimaxwert für $R^*(p)$ annehmen.

Für verschiedene n_o habe ich $R^*(p)$ gerechnet. Diese Werte stehen in der Tafel 2.

TAFEL 2

Die Anzahl der Beobachtungen	$\alpha = \beta = 0.2354$		
	obere Grenze von dem effektvollen α	obere Grenze von dem effektvollen β	$R^* / \sigma^{2/3}\ f^{1/3}\ c^{2/3}$
2 200	0.3251	0.3251	0.51653
2 300	0.3217	0.3217	0.51455
2 350	0.3184	0.3184	0.51271
2 400	0.3163	0.3163	0.51158
3 000	0.2983	0.2983	0.50284
5 000	0.2652	0.2652	0.49191
30 000	0.2354	0.2354	0.48853
40 000	0.2354	0.2354	0.48853

Wie man in der Tafel 2 sieht, ist der $R^*(p)$ für $n_o = 2\ 350$ gleich $0{,}51271\ \sigma^{2/3}\ f^{1/3}\ c^{2/3}$ und

(29) $$R^*(2350) \leqq 1{,}05\ R_{max}\ .$$

Also soll

$$n_o = 2\ 350$$

sein.

LİTERATÜR

[1] **Waerden, B. L. van der:** *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw.* Geb. Bd. 4 s. 187-202

[2] **Wald, A.:** *Sequential Analysis*, S. 157-158, 1948

[3] **Wald, A.:** *Sequential Analysis*, S. 61, 1948

[4] **Wld, A.:** *Sequential Analysis*, S. 63, 1948

[5] **Wald, A.:** *Sequential Analysis*, S. 54, 1948

[6] **Waerden, B. L. van der:** *Z. Wahrschenlichkeitstheorie und verw.* Geb. Bd. 4 S. 201, 1965

[7] **Wald, A.:** *Sequential Analysis*, S. 59-60, 1948

[8] **Wald, A.:** *Sequential Analysis*, S. 50-51, 1948

[9] **Oruç, Maide:** *Z. Wahrschenlichkeitstheorie und verw.* Geb. Bd. 4, S. 202-208, 1965.

ÖZET

Normal dağılım halinde pişmanlık fonksiyonunun maksimumunun minimumu için dizisel testde 1. ve 2. çeşit yanılma olasılıkları $\alpha = \beta = 0.2354$ olarak belirtildi. Bu çalışmada aynı dağılım fonksiyonunu kullanıyor ve dizisel testin kesilip atılmasında önceden verilmiş n_0 deney sayısı için 1. ve 2. çeşit yanılma olasılıklarını hesaplıyor ve deney sayısının en iyi değerini hesaplıyoruz.

Prix de l'abonnement annuel

Turquie: 15 TL; Étranger: 30 TL.
Prix de ce numéro: 5 TL (pour la vente en Turquie).
Prière de s'adresser pour l'abonnement á: Fen Fakültesi Dekanlığı Ankara, Turquie.

Ankara Üniversitesi Basımevi. Ankara–1976