Caucasian Journal of Science
ISSN: 2148-6840
https://doi.org/10.48138/cjo.895375
Year: 2022
Volume: 9 Issue: 2

Çok Boyutlu Uzaylarda Çokgensel Sayı Dizisinin Genelleştirilmesi

Mehmet Akif ŞAHİN[1], Berkay SEMİZ[2], Esra İNAN[3]

Makalenin Alanı: Matematik

Makale Bilgileri

Geliş Tarihi
11.03.2021
Kabul Tarihi
29.06.2022
Anahtar Kelimeler
Çok boyutlu sayılar
Çokgensel sayılar
Pascal üçgeni
Algoritma.

Öz

Bu çalışmada, iki, üç ve dört boyutlu uzaylarda alanyazında yer alan üçgensel, karesel, beşgensel, altıgensel ve daha genel olarak çokgensel sayıların oluşturulmasından yola çıkılarak, daha yüksek boyutlu uzaylarda çokgensel sayıların inşası üzerine çalışılmıştır. Şekilsel olarak çok boyutlu uzayda çokgensel geometrik sayılar, üç boyutlu uzaya izdüşümleri alınarak ilişkilendirilmiştir. Ayrıca k bir doğal sayı olmak üzere k-boyutlu uzayda çokgensel geometrik sayılar inşa edilerek sayı dizisinin genel terimi hesaplanmıştır. Bu genelleştirme yöntemi teorem halinde ifade edilip tümevarım yöntemi kullanılarak ispatlanmıştır. Ayrıca her bir çokgensel sayının her terimini farklı boyutlarda çizmek için genelleştirme kuralından yararlanarak elde edilen yöntem JavaScript programlama dili yardımıyla bilgisayara anlatılıp 2., 3. boyuttaki çokgensel sayılar oluşturulmuş ve görselleri çizdirilmiştir. 4. boyut ve daha üst boyuttaki çokgensel sayıların ise 3. boyuta izdüşümleri, yazılan program ile gösterilmiştir. Sonuç olarak çok boyutlu çokgensel sayı dizisinin Pascal üçgeni kullanılarak özgün bir yöntemle genelleştirilmesi ve her boyuttaki her terimin algoritmanın sıralı adımları kullanılarak programlama diliyle ifade edilip terimlerinin şekilsel ve eklenen nokta sayısı bakımından incelenmesi sağlanmıştır. Bu yöntem ile şekillerde her boyutta farklı olan (eklenen) nokta sayısı tablo ile gösterilerek genelleştirme yöntemine uygun bir ilişki elde edilmiştir.

Article Info

Received
11.03.2021
Accepted
29.06.2022
Keywords
Multi-dimensional numbers
Polygonal numbers
Pascal's triangle
Algorithm

Abstract

In this study, the construction of polygonal numbers in higher dimensional spaces was studied, based on the creation of triangular, tetragonal, pentagonal, hexagonal and more generally polygonal numbers in two- three- and four dimensional spaces. Polygonal numbers in multidimensional space are geometrically associated by taking their projections into three-dimensional space. Furthermore, the general term of the number sequence was calculated by constructing polygonal geometric numbers in k-dimensional space, with k being a natural number. This generalization method was expressed in a theorem and proved by using the induction method. In addition, a program developed with JavaScript language was created using the method obtained by using the generalization rule to draw each term of each polygonal number in different dimensions. Projections of polygonal numbers in 4-dimensional and higher-dimensional spaces into 3-dimensional space were drawn through program. As a result, polygonal number sequences in multidimensional spaces were generalized by an original method using the Pascal triangle, and each term in each dimensional space was expressed algorithmically and examined in terms of the number of points added in dimension increase. Through this method, showing the number of points that are different (added) in each dimensional space in the figures with a table, an appropriate relationship with the generalization method was obtained.

[1] Atakum Bilim ve Sanat Merkezi-Samsun; e-mail: akfshn.2004@gmail.com; ORCID: 0000-0002-5876-7787
[2] R.K. Bilim ve Sanat Merkezi-Samsun; e-mail: berkaysemiz555@hotmail.com; ORCID: 0000-0001-9512-8602
[3] R.K. Bilim ve Sanat Merkezi-Samsun; e-mail: esra.unsal55@gmail.com; ORCID: 0000-0003-3058-0619 (Corresponding author)

1. GİRİŞ

Boyut kavramı üzerine varyasyonlar Euclid'in (M.Ö. 300) sınır notasyonu tanımlamasıyla başlar. Euclid geometrisinde bir nesne, uzunluk, genişlik veya yüksekliğe sahip olma bakımından bir özellik taşır ve nesnenin sadece uzunluğu varsa 1-boyutlu; uzunluğu ve derinliği varsa 2-boyutlu; uzunluğu, derinliği ve yüksekliği varsa 3-boyutludur. Poincare' in 1905' de topolojiyi tanıtmasıyla matematikçiler boyut kavramı hakkında daha derinlemesine düşünmeye başlamışlardır (Manin'den aktaran Ural, 2011).

O zamana kadar, boyut kavramı deneysel bir bakış açısıyla ele alınmakta ve bir nesnenin boyutunun çeşitli yönlere yayılımı ile ilgili olduğu düşünülmekteydi. Bu tanımlama ile Euclid' in tanımlaması paralellik göstermektedir.

Boyut kavramı düzlem geometri, analitik geometri-analiz ve topoloji perspektiflerinden ele alınabilir. Topolojide, uzayda bir N kümesinin her elemanı, tüm noktaları N' de olan bir kürenin merkezi ise bu N kümesine bir komşuluk denir. Örneğin bir kübün iç bölgesi komşuluktur. Bir N komşuluğunun sınırı N' ye ait olmayan tüm noktaların kümesidir fakat N'nin bazı noktalarını içeren keyfi küçük kürelerin merkezidir. Örneğin bir kübün içi için sınır altı tane yüzüdür. Bu kavramlara göre boyut tanımı şöyledir: Bir S kümesinin her noktası, S ile arakesitlerinin sınırları en fazla (n-1) boyutlu küçük komşuluklarda bulunuyorsa bu S kümesi en fazla n-boyutludur ve S kümesi en fazla n-boyutlu ise S kümesi n-boyutludur (Menger'den aktaran Ural, 2011).

Olcay (2010) çalışmalarında üçgensel sayılar ve Gauss ile ilgili şunları söylemiştir

"Üçgensel sayılar ile ardışık doğal sayılar arasında yakın bir ilişki vardır. Eğer n. üçgensel sayı T_n olarak gösterilirse, ardışık ilk n doğal sayının toplamı n. üçgensel sayıyı verir. Yani

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

'dir. Bu formül daha çok küçük bir çocukken ünlü matematikçi Carl F. Gauss tarafından bulunmuştur. Formülün ortaya çıkışı ile ilgili meşhur bir hikaye vardır." (s.2).

Geometrik sayılar ile ardışık tam sayıların kuvvetlerinin toplamı arasında da dikkat çekici bir ilişki vardır. Örneğin, n. kare piramitsel (üç boyutlu uzayda) ve n. küpsel (dört boyutlu uzayda) sayılar sırasıyla

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(2n+1)}{6}\right]^2$$

şeklinde ifade edilmektedir.

1.1. Alanyazında Yapılan Çalışmalar

Alanyazında yer alan ve çalışmada kullanılan tanımlar verilmiştir.

a) *k*_ Boyutlu Üçgensel Sayıların Önceki Boyut Kullanılarak Bulunması:

$k > 1$ olmak üzere k_boyutlu bir uzayda *n.* üçgensel sayı $\Delta_n^{(k)}$ ile gösterilir ve

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_1^{(k-1)} + \Delta_2^{(k-1)} + \Delta_3^{(k-1)} + \cdots + \Delta_n^{(k-1)}$$

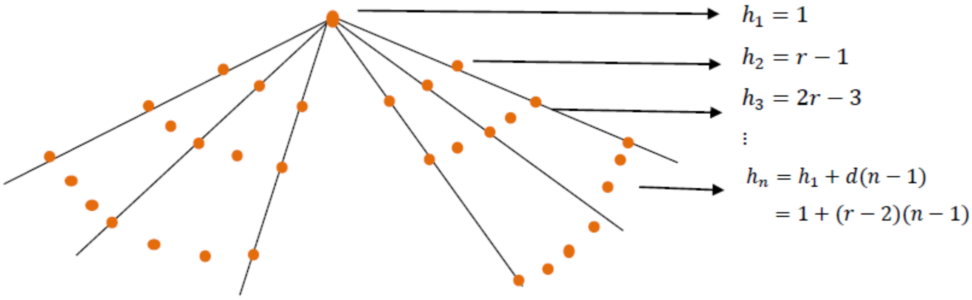
şeklinde tanımlıdır (Şahin, 2016).

b) Düzlemde (2 boyutlu uzayda) Çokgensel Sayılar:

Kenar sayısı r olan çokgenler için de geometrik sayılar daha önceki yaklaşımlara benzer şekilde belirlenmiştir. Bu durumda, $P_n^{(2)}$düzlemde $n.$ çokgensel sayı olmak üzere

$$P_n^{(2)} = n + (r-2)\binom{n-1}{2}$$

dir.



Şekil 1: Düzlemde Çokgensel Sayılar

$n.$ çokgensel sayıyı oluşturmak için $n.$ adımında eklenen nokta sayısı h_n ise

$$h_1 = 1$$
$$h_2 = r - 1$$
$$h_3 = r - 1 + r - 2 = 2r - 3$$
$$h_4 = 2r - 3 + r - 2 = 3r - 5$$
$$\vdots$$
$$h_n = 1 + (r-2)(n-1)$$

olarak bulunur. Buradan

$$P_1^{(2)} = h_1 = 1$$
$$P_2^{(2)} = h_1 + h_2 = 1 + r - 1 = r$$
$$P_3^{(2)} = h_1 + h_2 + h_3 = 1 + r - 1 + 2r - 3 = 3r - 3$$

$$P_4^{(2)} = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1 + r - 1 + 2r - 3 + 3r - 5 = 6r - 8$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(2)} = h_1 + h_2 + h_3 + \cdots + h_n$$

$$= \frac{h_1 + h_2}{2} n = \frac{1 + 1 + (r-2)(n-1)}{2} n$$

$$= \frac{2 + (r-2)(n-1)}{2} n$$

olduğu görülür (Convey ve Guy, 1996).

c) Üç Boyutlu Uzayda Çokgensel Sayılar

r kenarlı bir çokgen alınsın. Bu çokgen üzerine üç boyutlu uzayda kurulan n. çokgensel sayı $P_n^{(3)}$ile gösterilmek üzere

$$P_n^{(3)} = P_1^{(2)} + P_2^{(2)} + \cdots + P_n^{(2)}$$

şeklinde tanımlıdır. O halde,

$$P_n^{(2)} = \left(\frac{r-2}{2}\right) n^2 + \left(\frac{4-r}{2}\right) n$$

şeklinde olduğu kullanılırsa

$$P_n^{(3)} = P_1^{(2)} + P_2^{(2)} + \cdots + P_n^{(2)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \left[n(r-2) - (r-5)\right]$$

elde edilir (E. Deza ve M. M. Deza, 2012).

d) Dört Boyutlu Uzayda Çokgensel Sayılar

Dört boyutlu uzayda n. çokgensel sayı $P_n^{(4)}$ile gösterilsin. Bu durumda,

$$P_n^{(4)} = P_1^{(3)} + P_2^{(3)} + \cdots + P_n^{(3)}$$

şeklinde tanımlıdır. O halde $P_n^{(3)}$ kullanılırsa

$$P_n^{(4)} = P_1^{(3)} + P_2^{(3)} + \cdots + P_n^{(3)}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{4!} \left[(r-2)n - (r-6)\right]$$

olarak bulunur (Şahin, 2016).

e) *N*-Boyutlu Uzayda Üçgensel Sayılar

N. boyutta *n*. üçgensel sayı $\Delta_n^{(N)}$ ile gösterilmek üzere

$$\Delta_n^{(N)} = \frac{(N+n-1)!}{(n-1)!\,N!} = \binom{N+n-1}{N}$$

dir (Şahin, 2016).

f) Binom Katsayıları ve Pascal Üçgeni

Binom katsayısı $0 \le k \le n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$, *n* elemanlı bir kümenin *k* elemanlı alt kümelerinin sayısını veren ifadeye denir ve

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.\,k!} = \frac{n.\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k.\,(k-1)\ldots 1}$$

şeklinde gösterilir. Binom katsayılarının Pascal üçgenini üretmesi bilinen bir durumdur (Eren, 2015).

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Şekil 2. Pascal Üçgeni

g) Pascal Üçgeninde Üst Toplama Özelliği:

m, n doğal sayı olmak üzere

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$$

dir (Eren, 2015).

Temelini iki, üç ve dört boyutta çokgensel sayılar için ortaya konulan formüllerden alan çalışmada, her boyutta, bir önceki boyut sayısını mertebe kabul edip ilerlenmiş; çok boyutlu uzayda çokgensel sayı dizisinin genel teriminin, Pascal üçgeni ve kenar sayısı ilişkilendirilerek özgün bir yöntem ile bulunması ve bu yöntem ile algoritmanın sıralı adımları kullanılarak çok boyutlu çokgensel sayıları çizen bir program yazılması amaçlanmıştır. Çok boyutlu çokgensel sayılar ile ilgili kaynak taraması yapıldığında üçgensel sayıların k. boyutta ve çokgensel sayıların da 4. boyutta genelleştirildiği bilgilerine ulaşılmıştır. Çok boyutlu çokgensel sayı dizisinin genel terimi alan yazında bulunmamaktadır. Bu sebeple, alan yazına katkı sağlamak adına çok boyutlu çokgensel sayı dizisinin genelleştirilmesinin Pascal üçgeni kullanılarak özgün bir yöntem ile bulunması ve bu genelleştirme yönteminin uygulaması olarak algoritmanın sıralı adımları ile bir programlama dili (JavaScript) kullanılıp bilgisayara anlatılması, üst boyutların algılanmasına katkı sağlamıştır.

2. MATERYAL VE METOT

Şahin'in (2016) yaptığı çalışmada: *"Dört Boyutlu Uzayda Çokgensel Sayılar, k-Boyutlu Uzayda Üçgensel Sayılar"* başlıkları için genelleştirmeler yapılmıştır.

Alan yazındaki bu çalışmalar kullanılarak üçgensel, dörtgensel, beşgensel sayıların 4. boyutlarına kadar terimler hesaplanıp her biri için tablolar oluşturuldu. Tablolar incelendiğinde tabloların temelini üçgensel sayıların oluşturduğunun ve Pascal üçgeni ile arasında bir ilişki olduğunun farkına varıldı. Belirtilen ilişki bu çalışmanın özgün yönteminin temelini oluşturur.

2.1. Çokgensel Sayı Dizilerinin Farklı Boyutlarda Tablolar ile Gösterilmesi

Üçgensel sayılar için belirtilen tablo yapıldığında pascal üçgenindeki artış düzeniyle aynı olduğu görüldü. Dolayısıyla üçgensel sayıların tablosu pascal üçgeninin kendisini oluşturur.

Üçgensel sayılarda *k*. boyutun *(n+1)*. terimi ile *(k+1).* boyutun *n*. teriminin toplamının *(k+1).* boyuttaki *(n+1).* terime eşit ve 0. boyutun ilk terimi 1 olduğuna göre üçgensel sayıların pascal üçgeniyle aynı düzene sahip olduğu görülür. Örnek için seçilen 3.boyutun ikinci terimi ile 4. Boyuttaki ilk terimin toplamının 4. boyuttaki 2. terimi verdiği görülür ve ifadeyi sağlar.

Tablo 1. Üçgensel Sayıların 0. Boyuttan 4.Boyuta Kadar Olan Gösterimi

					α_0 bölgesi	
0.boyut	1	1	1	1	1	1
1.boyut	1	2	3	4	5	6
2.boyut	1	3	6	10	15	21
3.boyut	1	4	10	20	35	56
4.boyut	1	5	15	35	70	126

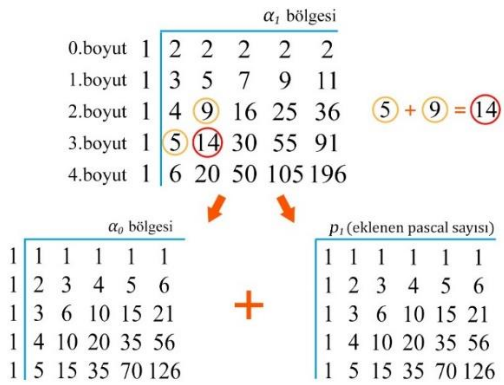
$$1 + 4 = 5$$

Sembolik Gösterim: "a_0 *bölgesi*" diğer çokgensel sayılarla ilişkiyi incelemek adına tanımlanmıştır.

Dörtgensel sayılarda da üçgensel sayılardaki gibi *k.* boyutun *(n+1)*. terimi ile *(k+1).* boyutun n'ıncı teriminin toplamının *(k+1)*. boyuttaki *(n+1).* terime eşit olduğu görülür. Örnek için seçilen 2. boyutun 3. terimi ile 3. boyutun 2.teriminin toplamının 3.boyuttaki 3. terime eşittir. Ancak üçgensel sayılardan farklı olarak 0. boyutun ikinci terimi üçgensel sayılara göre 1 fazla olduğundan dolayı sağında veya altında kalan sayıların oluşturduğu "a_0" bölgesine başlangıca göre 1 pascal üçgeni eklenmiş olur. Dolayısıyla dörtgensel sayıların oluşturduğu tablo, üçgensel sayıların oluşturduğu tablo ve "a_0" bölgesinin üzerine 1 tane pascal üçgenin eklenmesiyle oluşur. Oluşan bölge "a_1" bölgesi olarak tanımlanmıştır. Eklenen pascal üçgeni sayısı "*p*"nin alt indisinde verilmek üzere tanımlanmıştır.

Sembolik Gösterim: "p_x " , a_0 bölgesine eklenen Pascal üçgeni sayısı "*p*"nin alt indisinde *x* olarak tanımlanmıştır.

Tablo 2. Dörtgensel Sayıların 0. Boyuttan 4. Boyuta Kadar Olan Gösterimi ve Parçalanış Yöntemi



$$a_0 + p_1 = a_1$$

Beşgensel sayılarda *k* boyutun *(n+1).* terimi ile *(k+1).* boyutun *n.* teriminin toplamının *(k+1).* boyuttaki *(n+1).* terime eşit olduğu görülür. Örnek için seçilen 1. boyutun 4. terimi ile 2. boyuttaki 3. terimin toplamı 2. boyuttaki 4. terimi verdiği ve ifadeyi sağladığı görülür. Aynı zamanda 0. boyutun 2. terimi 3 olduğuna göre "a_0" bölgesine başlangıca göre 2 tane pascal üçgeni eklenir.

Tablo 3. Beşgensel Sayıların 0.Boyuttan 4. Boyuta Kadar Olan Gösterimi ve Parçalanış Yöntemi

		α_2 bölgesi				
0.boyut	1	3	3	3	3	3
1.boyut	1	4	7	10	13	16
2.boyut	1	5	12	22	35	51
3.boyut	1	6	18	40	75	126
4.boyut	1	7	25	65	140	266

10 + 12 = 22

α_0 bölgesi

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

+

p_2 (eklenen pascal sayısı)

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

$$a_0 + p_2 = a_2$$

Tablo 1-2-3. parçalanışları arasındaki ilişki incelendiğinde *y* kenarlı çokgensel sayılarda 0. boyutun 2. teriminin sezgisel olarak *(y-2)* olduğu görülür. Dolayısıyla “a_0” bölgesine başlangıca göre *(y-3)* tane pascal üçgeni eklenmiş olur. Bu parçalama yöntemi genelleştirme için de Tablo 4. de görüldüğü gibi uygulanır.

Tablo 4. *y* Kenarlı Çokgensel Sayıların 0.Boyuttan 4. Boyuta Kadar Olan Gösterimi ve Parçalanış Yöntemi

		$\alpha_{(y-3)}$ bölgesi				
0.boyut	1	y-2	y-2	y-2	y-2	y-2
1.boyut	1	y-1	2y-3	3y-5	4y-7	5y-9
2.boyut	1	y	3y-3	6y-8	10y-15	15y-24
3.boyut	1	y+1	4y-2	10y-10	20y-25	35y-49
4.boyut	1	y+2	5y	15y-10	35y-35	70y-84

α_0 bölgesi

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

+

$p_{(y-3)}$ (eklenen pascal sayısı)

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126

$$a_0 + p_{y-3} = a_{y-3}$$

2.2. Çokgensel Sayı Dizilerinin Farklı Boyutlardaki Tablolarının Kombinasyon ile İfade Edilmesi

Adım 1:

Tablo 5. Pascal Üçgeninin Yan Yatırılması ve Boyutlar Üzerinden Gösterilmesi

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{lcccccc} \mathit{0.boyut} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathit{1.boyut} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \mathit{2.boyut} & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ \mathit{3.boyut} & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ \mathit{4.boyut} & 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \end{array}$$

Adım 2:

Tablo 6. Pascal Üçgeninin Kombinasyonlu Gösterimi ve Kombinasyonlu Gösteriminin Yan Yatırılıp Boyutlar Üzerinden Gösterilmesi

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{lccccc} 0.\,boyut & \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{3} & \binom{4}{4} \\ 1.\,boyut & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} \\ 2.\,boyut & \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} \\ 3.\,boyut & \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} \\ 4.\,boyut & \binom{4}{0} & \binom{5}{1} & \binom{6}{2} & \binom{7}{3} & \binom{8}{4} \end{array}$$

Adım 3:

Tablo 5. de olduğu gibi yan yatırılan pascal üçgeninin kombinasyon değerlerini oluşturduğumuz özgün gösterim üzerinden ifade etmek için *k* boyutu *n* dizinin *n*. terimini ifade etmek üzere herhangi bir değerde kombinasyonun üst kısmındaki ifadenin terimin solundaki (*n*-1) ve üstündeki terim sayısının (*k*) toplamına, altındaki ifadenin ise terimin üstündeki (*k*) ya da solundaki (*n*-1) terim sayısına eşitliği Şekil 3. de olduğu gibi gösterilebilir.

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}$$

$n-1 \longrightarrow$ Solundaki terim sayısı

$k \longrightarrow$ Üstündeki terim sayısı

Şekil 3. Yan Yatırılan Pascal Üçgeninin Terimlerinin *n* ve *k* Cinsinden Gösterilmesi

Örneğin 3. boyutun 3. terimi kombinasyon ile yazılmak istenirse bu terimin üstündeki (*k*) ve solundaki (*n*-1) terim sayısı toplamı 5'i verir. Bu toplam değeri kombinasyonlu gösterimin üst kısmına yazılır. Aynı terim için üstündeki (*k*) ya da solundaki (*n*-1) terim sayısı ise 3 ya da 2 'yi verir. Bu değer ise kombinasyonlu gösterimin alt kısmına yazılır.

Tablo 7. Farklı Boyutlarda Üçgensel Sayı Dizisi Terimlerinin Kombinasyon İle Gösterimi

$0. boyut$	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{4}{4}$	
$1. boyut$	$\binom{1}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{5}{4}$	
$2. boyut$	$\binom{2}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{6}{4}$	
$3. boyut$	$\binom{3}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{3+2}{3} = \binom{3+2}{2} = \binom{5}{2}$
$4. boyut$	$\binom{4}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{8}{4}$	

Adım 4:

a_0 bölgesi üzerine eklenen pascal üçgenlerinin tepe noktası 0. Boyutun 2. Terimi olduğuna göre aslında 1 birim sağa kaymış oluruz. Yan yatırılan Pascal üçgeninde 1 birimlik sağa kayma normal Pascal üçgeninde bir alt basamağa inmeye denktir. Bundan dolayı önceki adımlarda gösterilen kombinasyonlu gösterimin üstündeki ifadenin 1 eksiği alınarak aynı yorumlar eklenen Pascal üçgenleri için de yapılabilir.

$$\binom{k+(n-1)-1}{n-1} = \binom{k+n-2}{n-1} = \binom{k+n-2}{k}$$

Tepe noktasının 1 birim kaydırılması
sonucu oluşan azalma

Şekil 4. Eklenen Pascal Üçgenlerinin Tepe Noktasının 1 Birim Sağda Olması Sebebiyle Oluşan Azalma

Adım 5:

Adım1-2-3-4'te yapılan incelemeler göz önüne alındığında boyutu *k* olan dizininin *n.* terimini *y* çokgensel sayıyı göstermek üzere, k boyutlu çokgensel sayının genel teriminin

$$y_n^k = \binom{k+n-1}{k} + (y-3)x\binom{k+n-2}{k}$$

olduğu sezgisel olarak görülür.

3. BULGULAR

3.1. Çok Boyutlu Uzaylarda Çokgensel Sayı Dizisinin Genel Teriminin Bulunması

Yöntem bölümü Adım-5'te sezgisel olarak ifade edilen genelleştirme teorem şeklinde ifade edilmiştir. Teoremin ispatı için gerekli bilgiler ispat öncesinde verilmiştir.

İki, üç ve dört boyutlu çokgen sayıların oluşumuna benzer şekilde "m_ Boyutlu Çokgensel Sayıların Tanımı" araştırmacılar tarafından verilmiştir.

m_ Boyutlu Çokgensel Sayıların Önceki Boyut Kullanılarak Bulunması:

m bir doğal sayı olmak üzere m_boyutlu bir uzayda *y* kenarlı *n.* çokgensel sayı $y_n^{(m)}$ ile gösterilir ve

$$y_n^{(m+1)} = y_1^m + y_2^m + \cdots + y_n^m$$

şeklinde tanımlıdır.

Varsayım: m herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$\binom{m-1}{m} = 0$$

dir. Yani m nin değerleri için çalışma boyunca

$$\binom{-1}{0} = \binom{0}{1} = \binom{1}{2} = \binom{2}{3} = \cdots \ldots \ldots .. = 0$$

yazılabilir.

Teorem (*k*_ Boyutlu Çokgensel Sayı): *k* boyutu, *y* kenar sayısını, göstermek üzere *k*_ boyutlu çokgensel sayı dizisinin genel terimi; *k* ve *y*: *y*≥3 için herhangi birer doğal sayı olmak üzere,

$$y_n^{(k)} = \binom{k+n-1}{k} + (y-3)\binom{k+n-2}{k}$$

şeklindedir.

İspat: İspat için tümevarım yöntemi kullanılsın.

- $k = 2$ için teorem doğru olduğu gösterilsin.

2 boyutlu çokgensel sayıların n. terimi teorem ifadesinde yerine yazılıp kombinasyon hesapları yapıldığında

$$y_n^2 = \binom{n+1}{2} + (y-3)\binom{n}{2}$$

$$= \frac{(n+1).n}{2} + (y-3)\frac{n.(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}[n+1+(y-3)(n+1)]$$

$$= \frac{n}{2}(n+1+yn-3n-y+3) \quad ......Ⓐ......$$

olarak bulunur.

Öte yandan "Düzlemde Çokgensel Sayılar" bölümünde $r = y$ için hesaplama yapıldığında

$$y_n^2 = \frac{2+(y-2)(n-1)}{2}.n = \frac{n}{2}(2+yn-y-2n+2)$$

$$= \frac{n}{2}(yn-2n-y+4) \quad ......Ⓑ......$$

bulunur.

Ⓐ ve Ⓑ ifadeleri eşit olduğundan teorem $k = 2$ için doğrudur.

- Teorem $k = m$ için doğru olsun. Bu takdirde teorem ifadesi

$$y_n^{(m)} = \binom{m+n-1}{m} + (y-3)\binom{m+n-1}{m}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte *m* boyutu gösterdiğinden *m*, herhangi bir doğal sayıdır.

- Son olarak $k = m+1$ için teoremin geçerli olduğu gösterilsin. Gösterilmesi gereken ifade

$$y_n^{(m+1)} = \binom{m+n}{m+1} + (y-3)\binom{m+n-1}{m+1}$$

dir.

"m_ Boyutlu Çokgensel Sayıların Önceki Boyut Kullanılarak Bulunması" tanımı gereği

$$y_n^{(m+1)} = y_1^m + y_2^m + \cdots + y_n^m$$

olduğundan yapılan kabul her bir terim için kullanılırsa

$$y_n^{(m+1)} = \binom{m}{m} + (y-3)\binom{m-1}{m} + \binom{m+1}{m} + (y-3)\binom{m}{m} + \binom{m+2}{m}$$
$$+(y-3)\binom{m+1}{m} + \cdots\cdots + \binom{m+n-1}{m} + (y-3)\binom{m+n-2}{m}$$

elde edilir. “Varsayım” gereği $\binom{m-1}{m} = 0$ olduğundan bu ifadede yerine yazılıp gruplanırsa

$$= \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots\cdots + \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-1}{m} +$$
$$(y-3)\left[\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots\cdots + \binom{m+n-2}{m}\right]$$

şeklinde yazılır. Burada “Pascal Üçgeninde Üst Toplama Özelliği” kullanılırsa

$$= \binom{m+n}{m+1} + (y-3)\binom{m+n-1}{m+1}$$

bulunur ve ispat biter.

Örnek 1. 6. boyutta beşgensel sayı dizisinin 4. terimini bulunuz. ($5_4^{(6)} = ?$)

Çözüm: ‘k_ Boyutlu Çokgensel Sayı’ teoreminde $y = 5, k = 6, n = 4$ yazılırsa

$$5_4^{(6)} = \binom{6+4-1}{6} + (5-3)\binom{6+4-2}{6} = 140$$

bulunur.

Örnek 2. 3. boyutta üçgensel sayı dizisinin 2. terimini bulunuz. ($3_2^{(3)} = ?$)

Çözüm: ‘k_ Boyutlu Çokgensel Sayı’ teoreminde $y = 3, k = 3, n = 2$ yazılırsa

$$3_2^{(3)} = \binom{3+2-1}{3} + (3-3)\binom{3+2-2}{3} = 4$$

bulunur. Öte yandan “Üç Boyutlu Uzayda Çokgensel Sayılar” bölümünde $r = 3, n = 2$ değerleri yerine yazılırsa,

$$P_2^3 = \frac{2(2+1)}{6}\,[2(3-2) - (3-5)] = 4$$

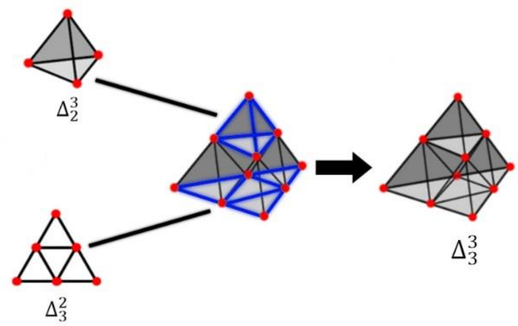
elde edilir.

$$3_2^{(3)} = P_2^3$$

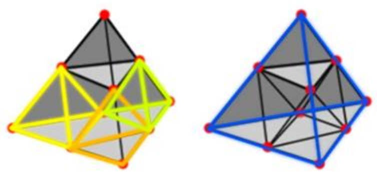
olduğu görülür.

3.2. Çok Boyutlu Çokgensel Sayıların Çizim Yöntemi

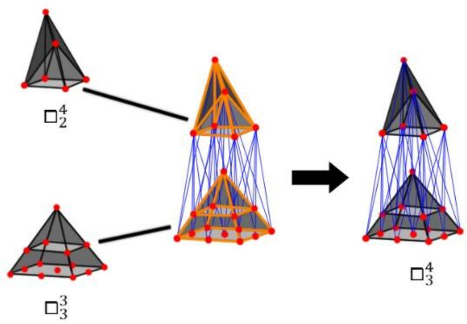
Çokgensel sayıların n. terimleri bir önceki boyuttaki aynı çokgensel sayı dizisinin ilk n tane terimi toplanarak elde edilir. Bu sebeple çokgensel sayıların şekilleri çizilirken bir sonraki terime geçişte oluşan şekil, çokgensel sayının bir önceki terimdeki şekliyle, bir önceki boyuttaki aynı terimin şeklinin birleşmesiyle oluşur. Önceki terimdeki her noktadan birer tane o boyutun 2. terimindeki şeklin oluşması koşuluyla 2 şekil birleştirilir.



Şekil 5. Her Terimin İki Terimle Birleşiminin Gösterilmesi ($\Delta_2^3 + \Delta_3^2 = \Delta_3^3$)

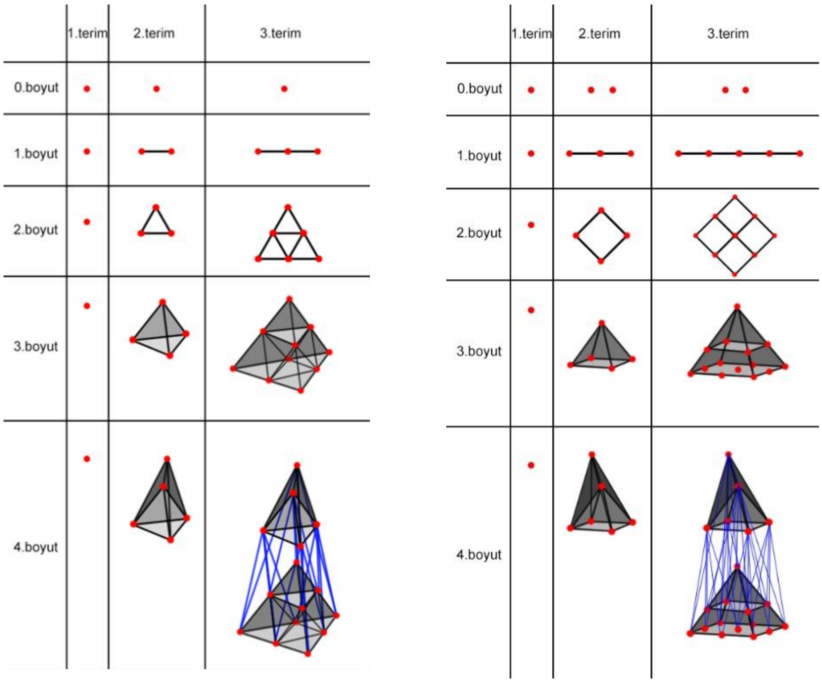


Şekil 6. 3 Boyutlu Üçgensel Sayılarda Önceki Terimin 4 Noktasından Birer Üçgen Piramit Oluşumu



Şekil 7. 4 Boyutlu Dörtgensel Sayılarda Terim Birleşimi ve "Tabanı Dörtgen Piramit" Olan Piramit Oluşumu

Şekil 7. deki çizim $\square_2^4 + \square_3^3 = \square_3^4$ ifadesiyle gösterilebilir. Ayrıca bu şekilde görüldüğü gibi 4. boyutta dörtgensel sayıların 2. teriminin önceki terimin 6 noktasından birer tane "tabanı dörtgen piramit" olan piramit oluşmuştur.

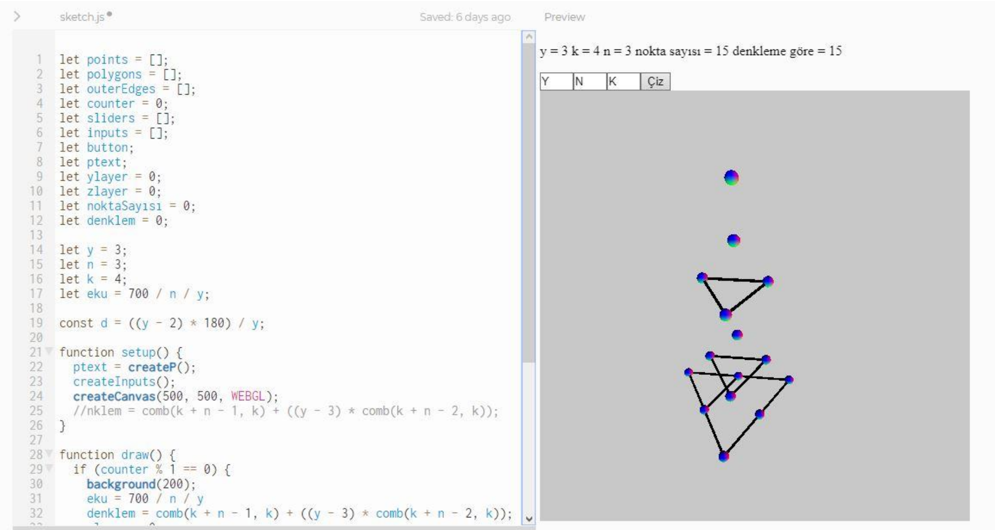


Şekil 8. Üçgensel ve Dörtgensel Sayıların Photoshop Programındaki Çizimlerinin Terim ve Boyut İlişkisi

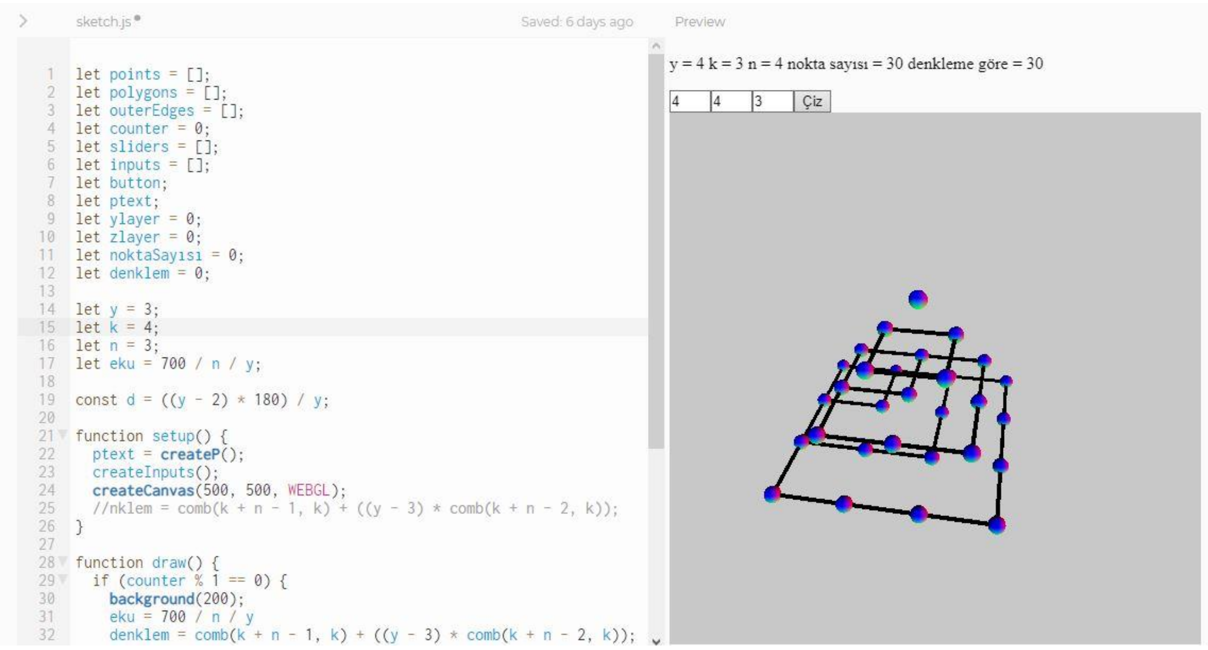
3.3. Çok Boyutlu Çokgensel Sayıları Çizen JavaScript Diliyle Yazılmış Bir Program Oluşturulması

Çizim yöntemine göre bir çokgensel sayının şeklinin çizilmesi için önceki boyuttaki şekillere ihtiyaç vardır. Bu sebeple program **(**JavaScript), şekilleri çizerken 2. boyut üstündeki şekiller için alt boyutlardaki şekillere ihtiyaç duyar ve fonksiyonun çok kez çalışması gerekir. Bu yüzden programda sistem 2.boyut için çalıştırıldığında 2. boyuttaki şekilleri çizen ve 2.boyut üstü için çalıştırıldığında kendisini önceki boyuttaki tüm terimler için çalıştıran özyinelemeli bir fonksiyon kullanıldı. Oluşturulan JavaScript diliyle yazılmış çizim programına araştırmacılar tarafından veriler (k-boyut, y-kenar sayısı, n-terim) girilerek iki ve üçüncü boyuttaki şekillerinin görselleri ile dördüncü ve daha üst boyutlardaki çokgensel sayıların şekillerinin 3. boyuta dik izdüşüm görselleri çizdirilmiştir. Verilen erişim adresinden oluşturulan bu çizim programına ulaşılabilir.

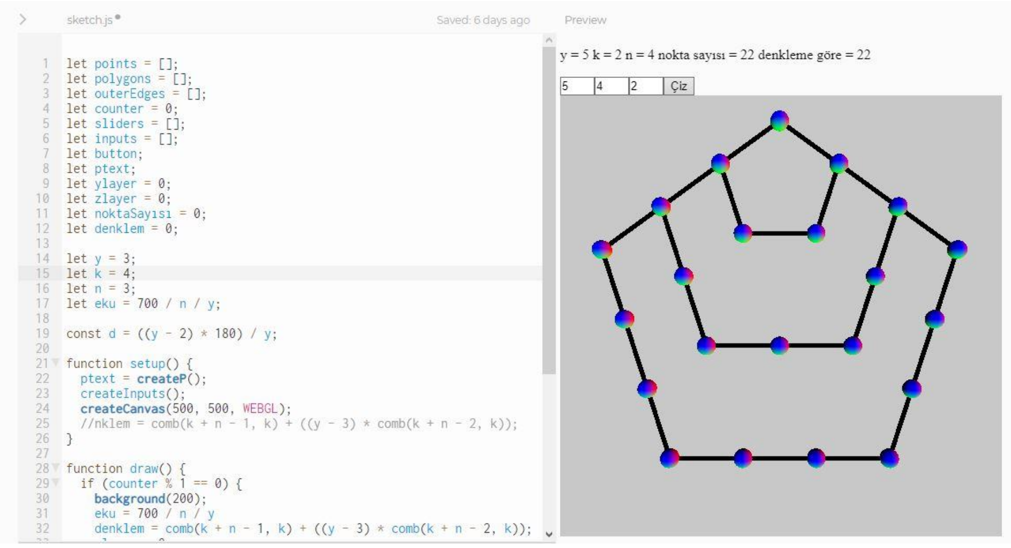
Erişim adresi: https://editor.p5js.org/polygon/full/gr15NcKSu



Şekil 10. JavaScript Programında 4. Boyuttaki Üçgensel Sayıların 3. Teriminin 3. Boyuta Dik İzdüşüm Görseli



Şekil 11. JavaScript Programında 3. Boyuttaki Dörtgensel Sayıların 4. Teriminin Görseli



Şekil 12. JavaScript Programında 2. Boyuttaki Beşgensel Sayıların 4. Teriminin Görseli

3.4. Çok Boyutlu Çokgensel Sayı Çiziminde Her Terimde Eklenen Nokta Sayısı

Çokgensel sayılarda bir sonraki terime geçişteki artan nokta sayıları için tablolar oluşturulmuştur. Tablolardaki değerler çizim programı ile hesaplanmıştır ve bu değerler arasında bir ilişki olduğu tespit edilmiştir. Genellemeye gidildiğinde eklenen nokta sayısının genel teriminin çokgensel sayıların genel teriminde (*k*_Boyutlu Çokgensel Sayı Teoremi) *k*(boyut) yerine (*k*-1) yazılmış hali olduğu görülmüştür.

Tablo 10. *k* boyutlu *y* kenarlı çokgensel sayıların 2. terimlerinde eklenen nokta sayısı

	üçgensel	**karesel**	**beşgensel**	**…**	***y* kenarlı çokgen**
1.boyut	1	2	3	**…**	$\binom{1}{1} + (y-3)$
2.boyut	2	3	4	**…**	$\binom{2}{1} + (y-3)$
3.boyut	3	4	5	**…**	$\binom{3}{1} + (y-3)$
4.boyut	4	5	6	**…**	$\binom{4}{1} + (y-3)$
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
***k*.boyut**	$\binom{k}{1}$	$\binom{k}{1} + 1$	$\binom{k}{1} + 2$	**…**	$\binom{k}{1} + (y-3)$

Tablo 11. *k* boyutlu *y* kenarlı çokgensel sayıların 3. terimlerinde eklenen nokta sayısı

	üçgensel	**karesel**	**beşgensel**	**…**	***y* kenarlı çokgen**
1.boyut	1	2	3	**…**	$\binom{2}{2}+(y-3).\binom{1}{1}$
2.boyut	3	5	7	**…**	$\binom{3}{2}+(y-3).\binom{2}{1}$
3.boyut	6	9	12	**…**	$\binom{4}{2}+(y-3).\binom{3}{1}$
4.boyut	10	14	18	**…**	$\binom{5}{2}+(y-3).\binom{4}{1}$
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
***k*.boyut**	$\binom{k+1}{2}$	$\binom{k+1}{2}+k$	$\binom{k+1}{2}+2k$	**…**	$\binom{k+1}{2}+(y-3)k$

Tablo 12. *k* boyutlu *y* kenarlı çokgensel sayıların 4. terimlerinde eklenen nokta sayısı

	üçgensel	**karesel**	**beşgensel**	**…**	***y* kenarlı çokgen**
1.boyut	1	2	3	**…**	$\binom{3}{3}+(y-3).\binom{2}{2}$
2.boyut	4	7	10	**…**	$\binom{4}{3}+(y-3).\binom{3}{2}$
3.boyut	10	16	22	**…**	$\binom{5}{3}+(y-3).\binom{4}{2}$
4.boyut	20	30	40	**…**	$\binom{6}{3}+(y-3).\binom{5}{2}$
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
***k*.boyut**	$\binom{k+2}{3}$	$\binom{k+2}{3}+\binom{k+1}{2}$	$\binom{k+2}{3}+2\binom{k+1}{2}$	**…**	$\binom{k+2}{3}+(y-3)\binom{k+1}{2}$

Tablo 13. *k* boyutlu *y* kenarlı çokgensel sayıların *n.* terimlerinde eklenen nokta sayısı

	üçgensel	**karesel**	**beşgensel**	**…**	***y* kenarlı çokgen**
1.boyut	$\binom{n-1}{0}$	$\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{0}$	$\binom{n-1}{0}+2.\binom{n-2}{0}$	**…**	$\binom{n-1}{0}+(y-3)\binom{n-2}{0}$
2.boyut	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}$	$\binom{n}{1}+2.\binom{n-1}{1}$	**…**	$\binom{n}{1}+(y-3).\binom{n-1}{1}$
3.boyut	$\binom{n+1}{2}$	$\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}$	$\binom{n+1}{2}+2.\binom{n}{2}$	**…**	$\binom{n+1}{2}+(y-3)\binom{n}{2}$
4.boyut	$\binom{n+2}{3}$	$\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{3}$	$\binom{n+2}{3}+2.\binom{n+1}{3}$	**…**	$\binom{n+2}{3}+(y-3)\binom{n+1}{3}$
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
***k*.boyut**	$\binom{k+n-2}{k-1}$	$\binom{k+n-2}{k-1}+\binom{k+n-3}{k-1}$	$\binom{k+n-2}{k-1}+2.\binom{k+n-3}{k-1}$	**…**	$\binom{k+n-2}{k-1}+(y-3)\binom{k+n-3}{k-1}$

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Çokgensel sayıların 4. boyuta kadar olan terimleri tablo ile gösterilerek Pascal üçgeni ile ilişkili olduğu sonucuna varıldı.

Pascal üçgeni temel alınarak oluşturulan üçgensel sayı dizisi tablosunda a_0 bölgesine Pascal üçgeni eklenmediği, dörtgensel sayı dizisi tablosunda a_0 bölgesine 1 tane Pascal üçgeni eklendiği, beşgensel sayı dizisi tablosunda a_0 bölgesine 2 tane Pascal üçgeni eklendiği ve bu şekilde devam edilirse *y* kenarlı çokgensel sayı dizisi tablosunda a_0 bölgesine (*y-3*) tane Pascal üçgeni eklendiği sonucuna varıldı. Pascal üçgeninin a_0 bölgesine eklenen Pascal üçgeni sayısı,

$$a_0 + p_{y-3} = a_{y-3}$$

şeklinde genelleştirildi.

Tablodaki terimler, solundaki terim sayısı *(n-1)* ve üstündeki terim sayısı (*k* boyutlu) kullanılarak kombinasyon ile ifade edildi.

Sonuç olarak kullanılan bu özgün yöntem ile *k* – boyutu, *y* – kenar sayısını, göstermek üzere *k* – boyutlu çokgensel sayı dizisinin genel terimi; *k* ve *y*: *y≥3* için herhangi birer doğal sayı olmak üzere,

$$y_n^{(k)} = \binom{k+n-1}{k} + (y-3)\binom{k+n-2}{k}$$

şeklinde elde edildi (*k*_ Boyutlu Çokgensel Sayı Teoremi).

Çokgensel sayıların n. terimleri bir önceki boyuttaki aynı çokgensel sayı dizisinin ilk n tane terimi toplanarak elde edilir. Bu sebeple çokgensel sayıların şekilleri çizilirken bir sonraki terime geçişte oluşan şeklin çokgensel sayının bir önceki terimdeki şekliyle, bir önceki boyuttaki aynı terimin şeklinin birleşmesiyle oluştuğu sonucuna varıldı.

Bu çizim yönteminden yararlanarak çokgensel sayıları her boyutun her teriminde çizen JavaScript diliyle yazılmış bir program oluşturuldu.

Programdan elde edilen verilerle, çokgensel sayıların bir sonraki terime geçişte artan nokta sayıları için tablolar oluşturuldu. Tablolarda genellemeye gidildiğinde sonraki terime geçişte eklenen nokta sayısının çokgensel sayıların genel teriminde (*k*_ Boyutlu Çokgensel Sayı Teoremi) *k* yerine *(k-1)* yazılmış hali olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

Conway, J. H., Guy, R. K. (1996). *The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag.

Deza, E., Deza, M. M. (2012). *Figurate Numbers*. First Edition, World Scientific.

Eren, Y. (2015). Binom Katsayılarının Bazı Genelleştirmeleri. (Yayımlanmış yüksek lisans tezi). Kırıkkale Üniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.

Karaatlı, O. (2010). Üçgensel Sayılar. (Yayımlanmış yüksek lisans tezi). Sakarya Üniversitesi/ Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Şahin, M. (2016). Farklı Boyutlarda Geometrik Sayılar. Erişim adresi: https://www.academia.edu/37138626/Farkl%C4%B1_Boyutlarda_Geometrik_Say%C4%B1lar

Ural, A. (2011). Matematik öğretmen adaylarının boyut ölçütleri. Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30, 13-25. Erişim adresi: https://dergipark.org.tr/download/article-file/114574