



ENÇOK OLABİLİRLİĞİN MONTE-CARLO SİMÜLASYONLARIYLA BİRLİKTE KULLANILMASIYLA GÜRÜLTÜLÜ VERİLERDEN SİNÜZOİTLERİN PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİ

DURSUN ÜSTÜNDAĞ* ve MEHMET CEVRİ

*Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
34722 Kadıköy, İstanbul, Türkiye.*

Alındığı Tarih: 1 Kasım 2007

Kabul Tarihi: 13 Ekim 2008

Özet. Bu makalede gürültülü verilerden sinyallerin parametrelerinin kestirimini düşünüyoruz. Bu amaç için, Monte-Carlo simülasyonları ile birlikte en çok olabirlik prensibinin kullanımına dayanan etkili bir yöntemin uygulandığı bir *Mathematica* programı yazıldı ve Gauss dağılımlı gürültülerle bozulmuş sinüzoidlerin parametrelerinin kestirimi için kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: En Çok Olabirlik, Monte-Carlo Simülasyonları, Parametre Kestirimleri, İstatiksel Çıkarım, Sahte sertleştirme.

* E-posta: dustundag@marmara.edu.tr ve Faks: +90 (216) 347 8783

ESTIMATING PARAMETERS OF SINUSOIDS FROM NOISY DATA USING MAXIMUM LIKELIHOOD TOGETHER WITH MONTE-CARLO SIMULATIONS

Summary. We consider here estimating parameters of signals from noisy data. For this purpose, a *Mathematica* program, in which an effective method based on the principle of maximum likelihood together with Monte-Carlo simulations is incorporated, was written and used for estimating the parameters of sinusoids corrupted by the Gaussian random noise.

Keywords: Maximum Likelihood, Monte-Carlo Simulations, Parameter Estimations, Statistical Inference, Simulated Annealing.

GİRİŞ

Veri biriktirmedeki esas gaye, fiziksel sistemle ilgili anlamlı bilgileri kazanmaktır. Ama birçok durumda istediğimiz nicelikler ölçtüklerimizden farklıdır. Eğer ölçtüğümüz veri, ölçmek istediğimiz niceliklere bağlıysa onlar hakkında az da olsa bilgi içerir. Bundan dolayı verilerden bu bilgiyi çıkarma bu makalede düşünülen problemdir.

\mathbf{p} vektörü, modellendirilen fiziksel sisteme ait parametreleri ve \mathbf{d} vektörü de bu fiziksel sistemin çıktılarından oluşan verileri temsil etsin. Genel olarak fiziksel sistem, \mathbf{p} parametre ve $d(t)$ sistem çıktıları arasında

$$d(t) = f(t, \mathbf{p}) \quad (1)$$

doğrusal olmayan bir f fonksiyonu ile tanımlanır. Burada t zamanı temsil eder. Birçok denemelerde d_i kesikli veri kümesi, $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ kesikli zamanlarda bir $f(t, \mathbf{p})$ model fonksiyonundan örneklenir ve aynı zamanda rastlantısal gürültü içerir. Böylece model denklemin temel formu, genel olarak

$$d_i = f(t_i, \mathbf{p}) + e(t_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (2)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $e(t_i)$ rastlantısal gürültüyü temsil eder. $f(t, \mathbf{p})$

model fonksiyonunun farklı seçimi, farklı modellere karşılık gelir. Bretthorst [1]' a göre en genel model,

$$f(t, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^M \mathbf{A}_j \mathbf{G}_j(t, \{\omega\}) \quad (3)$$

formundadır. Burada $\mathbf{G}_j(t, \{\omega\})$ model fonksiyonu, $\{\omega\}$ parametrelerin ve t 'nin bir fonksiyonudur. Bu parametreler, frekansları, faz değişimlerini, bozulma oranlarını, sönme oranlarını veya herhangi bir fiziksel niteliği temsil ederler. j . modele karşı gelen genlikler \mathbf{A}_j ile gösterilir. Böylece \mathbf{p} parametre vektörü, frekansların ve genliklerin bir $\{\omega_j, \mathbf{A}_j\}$ ($j = 1, 2, 3, \dots, M$) listesidir.

Bu makalede amaç, \mathbf{d} gözlemlerinden \mathbf{p} parametrelerinin bir kümesinin istatistiksel çıkarımını yapmaktır. Bu problem, bilimin birçok alanlarında yaygındır [2-4]. Bir çok sayısal yöntem bu probleme uygulanmıştır ve onların kapsamlı tarihi Bretthorst [1] ve diğer araştırmacılar [2,3,6,10] tarafında verilmiştir. Bu makalede, ilk defa R.A. Fisher [7] tarafından geliştirilen en çok olabilirlik prensibini kullanarak gürültülü verilerden sadece model parametrelerinin kestirimini düşünüyoruz. Parametre değerlerindeki belirsizliklerin bir gösterimini elde etmek için Monte- Carlo simülasyonları ile en çok olabilirlik prensibi birleştirildi. Böylece, her bir parametrenin kestiriminin doğruluğu elde edildi.

EN ÇOK OLABİLİRLİK YÖNTEMİ

Varsayalım her bir veri noktasının ölçülen hata değeri,

$$e_i = d_i - f(t_i, \mathbf{p}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (4)$$

olsun. Giriş verilerinin bileşik olasılığı,

$$P(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^N P(e_i) \quad (5)$$

her bir gürültünün ayrı ayrı olasılıklarının çarpımına eşittir. Olabilirlik fonksiyonu,

$$P(\mathbf{d}|\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{\det\Gamma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - f(t, \mathbf{p}))^T \Gamma^{-1}(\mathbf{d} - f(t, \mathbf{p}))\right) \quad (6)$$

şeklinde yazılır [12]. Burada gürültünün sıfır ortalamalı ve Γ kovaryans matrisli olduğu varsayılır. Eğer gürültü örnekleri birbirinden bağımsızsa, Γ 'nin köşegen elemanları sıfır olmayan varyanslardan oluşur. Eğer bütün varyanslar σ^2 'ye eşitse, log-olabilirlik fonksiyonunun genel gösterimi,

$$\text{Log}[P(\mathbf{d}|\mathbf{p})] = -\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{d} - f(t, \mathbf{p}))^T(\mathbf{d} - f(t, \mathbf{p})) + \text{sabit} \quad (7)$$

elde edilir. Burada $f(t, \mathbf{p})$, bağımsız t değişkenine ve veri kümelerinden belirlemek için araştırdığımız sistemin özelliklerini temsil eden K elemanlı parametre kümesi $\mathbf{p} = \{p_j, j = 1, 2, 3, \dots, K\}$ 'ye bağlı model fonksiyonunu temsil eder. Şimdi, verilerimizin bu tip denemeler için en çok olabilecek sonuca yakın olacağını varsaymak mantıklıdır. En çok olabilirlik prensibi, veri kümelerimiz için Denklem (7) de verilen log-olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden model parametrelerinin en iyi kestirimini ifade eder. Böylece, olabilirlik fonksiyonlarını maksimize eden parametreler için,

$$\frac{\partial \text{Log}[P(\mathbf{d}|\mathbf{p})]}{\partial p_j} = 0, (j = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (8)$$

denklem sistemini çözmemiz gerekir. Bu sonuçlar $\hat{\mathbf{p}} = \{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_K\}$ ile gösterilir ve model parametrelerinin *en çok olabilirlik kestiricisini* [6,7,8,9,10] tanımlar. Bu oldukça genel formüldür. $P(\mathbf{d}|\mathbf{p})$, örneklem olasılık yoğunluğunun değişik türleri için de kullanılır ve Gauss dağılımlı olduğu varsayıldığı zaman, en yaygın durumda, $\text{Log}[P(\mathbf{d}|\mathbf{p})]$ 'yi maksimize etmek, $\chi^2(\mathbf{p})$ 'yi minimize etmeye denk olur:

$$\chi^2(\mathbf{p}; \mathbf{d}) = \frac{(\mathbf{d} - f(t, \mathbf{p}))^T (\mathbf{d} - f(t, \mathbf{p}))}{2\sigma^2}. \quad (9)$$

Burada $\chi^2(\mathbf{p})$, gözlemlerle model arasındaki farkın karelerinin toplamıyla ağırlıklandırılır. Takip eden bölümde, bu uygunsuzluk fonksiyonunun nasıl minimize edileceğini veya buna denk olarak olabirlik fonksiyonunun nasıl maksimize edileceğini araştıracağız.

SAYISAL YÖNTEM VE ÖRNEK

Harmonik sinüzoidal sinyalleri düşünelim:

$$f(t) = \sum_{j=1}^M a_{j1} \cos(\omega_j t) + a_{j2} \sin(\omega_j t) \quad (10)$$

Burada sinyallerin sayısı M 'nin bilindiği varsayılıyor. Gerçekte, model fonksiyonlarının kaç tane parametre içerdiğini ve veriler için en uygun olan modeli bilemeyiz. Diğer taraftan kestirmek istediğimiz bilinmeyen parametreler vektörü, $\{\{\omega_1, a_{11}, a_{12}\}, \dots, \{\omega_M, a_{M1}, a_{M2}\}\}$ olarak düşünülür. Bu parametreler toplu olarak, $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^K$ ($K = 3M$) vektörü ile ifade edilsin.

Veri vektörü $\mathbf{d} \in \mathfrak{R}^N$ 'nin elemanları,

$$d_i = \sum_{j=1}^M a_{j1} \cos(\omega_j t_i) + a_{j2} \sin(\omega_j t_i) + e(t_i), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (11)$$

veya buna denk olarak

$$d_i = \mathbf{G}(\{\omega\}, t_i) \mathbf{a} + e(t_i), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (12)$$

ile verilir. Burada \mathbf{a} doğrusal parametreleri ve \mathbf{G} ise $(N \times 2M)$ boyutlu doğrusal olmayan $\{\omega\}$ parametrelerine bağlı bir matrisi gösterir. Böylece, Denklem (9)'daki uygunsuzluk fonksiyonu,

$$\chi^2(\{\omega\}, \mathbf{a}; \mathbf{d}) = \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{G}(\{\omega\}, t) \mathbf{a})^T (\mathbf{d} - \mathbf{G}(\{\omega\}, t) \mathbf{a})}{2\sigma^2} \quad (13)$$

olur. $\chi^2(\{\omega\}, \mathbf{a}; \mathbf{d})$ 'nin \mathbf{a} doğrusal parametresine göre türevi hesaplanabilir ve sıfıra eşitlenir. Bu aynı zamanda \mathbf{a} için,

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{a} \quad (14)$$

veya

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} \quad (15)$$

denklemlerine götürür. Doğrusal olmayan ω parametrelerinin temel bir seçimi için $\hat{\mathbf{a}}$ doğrusal parametreleri hesaplandığı zaman $\chi^2(\{\omega\}, \hat{\mathbf{a}}; \mathbf{d})$,

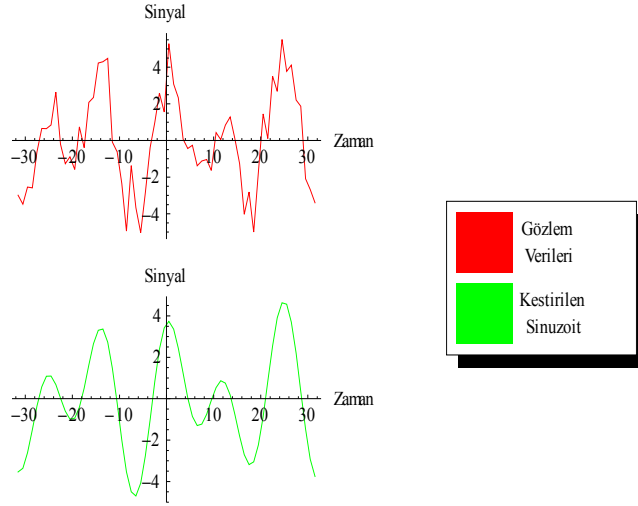
$$\chi^2(\omega) = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}}{2\sigma^2} \quad (16)$$

sadece doğrusal olmayan ω parametrelerinin bir fonksiyonu olur. Bu form, optimizasyon için daha uygundur. En çok olabirlik kestirimlerini bulmak için, öncelikle kısıtlanan global optimumu bulmada birçok algoritma içeren ve Mathematica'da oluşturulmuş olan NMinimize denklem çözücüyü başlangıç değerleri verilir. NMinimize fonksiyonu, türevlenemeyen veya sürekli olmayan ve yerel optimuma kolaylıkla takılmayan fonksiyonlarla uğraşmak için oldukça esnek bazı metotlar içerir. Bunlardan basit stokastik fonksiyon minimize edici olan "sahte sertleştirme" (simulated annealing) yöntemini seçtik. Bu yöntem, metal bir nesnenin yüksek sıcaklıkta ısıtıldığı ve ardından yavaşça soğutulduğu fiziksel sertleştirme işlemine benzer. İşlemde, daha düşük bir enerji durumunda metalin atomik yapısı göz önüne alınır. Böylece daha dayanıklı bir metal elde edilir. Optimizasyon terminolojisinde, sertleştirme yerel bir minimumdan kaçmaya ve daha iyi global minimuma bulmaya imkân sağlar. Başlangıçta, "NMinimize" fonksiyonu, ω parametreleri için rastlantsal başlangıç değerlerini seçer ve her adımda geçerli ω noktasının komşuluğunda yeni bir ω_{yeni} noktasını üretir. O ana kadar bulunan en iyi nokta, $\omega_{\text{en iyi}}$ olarak

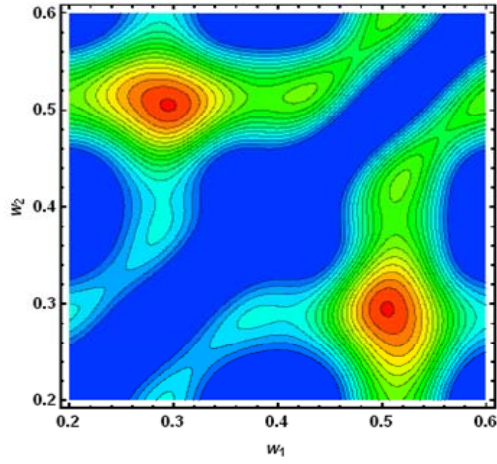
belirlenir. Eğer $\chi^2(\omega_{\text{yeni}}) \leq \chi^2(\omega_{\text{en iyi}})$ ise ω_{yeni} , $\omega_{\text{en iyi}}$ ve ω ile yer değiştirir. Yoksa ω_{yeni} , $e^{b(i, \Delta\chi^2, \chi^2_0)}$ olasılıkla ω ile yer değiştirir. Burada b , Boltzmann üssü olarak tanımlanan bir fonksiyondur. $\Delta\chi^2$, i . adımda, amaç fonksiyonunun değişimini; χ^2_0 , önceki adımda amaç fonksiyonunun değerini ve b ise, önceden varsayılan $-\Delta\chi^2 \log(i+1) / 10$ fonksiyonunu temsil eder. Her bir başlangıç noktası için adımlar maksimum sayıya ulaşana kadar tekrarlanır. Böylece metot, $\chi^2(\hat{\omega})$ 'yi global minimum yapan bir $\hat{\omega}$ noktasına yakınsatır veya art arda yapılan adım sayısı için aynı noktada kalır. ω 'nın kestirim değeri elde edildiğinde Denklem (15) den a doğrusal parametreleri tekrar hesaplanır. Bütün bunları yapmak için, sinüzoidlerin açısız frekanslarını, sonrasında ise genliklerini kestirme problemine bu işlemin nasıl uygulandığını gerçekleştiren *Mathematica* kodu yazıldı. Bu kodun performansını test etmek için,

$$f(t) = \cos(0.3t) + 2 \sin(0.3) + 3 \cos(0.5t) + 0.01 \sin(0.5t) \quad (17)$$

sinüzoidal sinyali düşünüldü. Gürültülü veri üretmek için ilk olarak model sinyalin $N=64$ örneklem değeri hesaplandı ve sonrasında, sıfır ortalamalı birim varyanslı Gauss dağılımdan rastlantısal olarak üretilen gürültü değerleri eklendi. Yazılan *Mathematica* kodu, bu veriler için iş istasyonunda koşturuldu ve yaklaşık olarak 7 saniye CPU zamanı harcadıktan sonra, Şekil 1'deki sonuçlar elde edildi. χ^2 nin yüzeyi Şekil 2'de gösterilmiştir. Burada minimize yapılan fonksiyonun topolojisi hakkında bir fikir elde edilir. Hatta bu temel örnekte görülür ki, χ^2 , frekansların yüksek dereceden doğrusal olmayan bir fonksiyonudur ve pek çok yerel minimuma sahiptir. Bu durumda, eğer yanlış bir başlangıç noktasından başlanılırsa minimumu kaçırma tehlikesi vardır. Minimumun araştırmasını içeren sayısal hesaplamaların maliyeti çok büyüktür ve sıklıkla optimal altı yöntemler kullanılır. İki minimum değerinde, $\chi^2 = 28.35$ bulunur.



Şekil 1. İki frekanslı sinyalin kestirim işlemi. Her noktada gürültünün standart sapması $\sigma = 1$ olarak alınmıştır.



Şekil 2. İki sinüzoidal uydurma problemi için χ^2 fonksiyonunun yüzeyi

En çok olabilirlik kestiriminden gerçek parametre değerleri hakkında bir çıkarım yapabilmek için kestiricilerin varyansının kestirilmesi ve gerçek parametrelerden ne kadar uzaklaştığımızı gösteren bazı ölçüler gereklidir. Kestirimlerin doğruluk değerini ölçmek için, öncelikle geçerli \mathbf{d} veri kümesinden $\hat{\mathbf{p}}$ hesaplanır ve bu $\hat{\mathbf{p}}_0$ ile gösterilir. Daha sonra $\hat{\mathbf{p}}$ parametre değerleri, doğru değerler olarak varsayılır. Kestirilen $\hat{\mathbf{p}}_0$ parametre kümesi doğru olmamasına rağmen, onun doğru olduğu sanal uzay düşünülür. Özellikle, sanal uzaydaki $\hat{\mathbf{p}}_i - \hat{\mathbf{p}}_0$ 'nin olasılık dağılımının şeklinin, gerçek uzaydaki $\mathbf{p}_i - \hat{\mathbf{p}}_0$ 'in olasılık dağılımının şekliyle aynı veya çok yakın olması beklenir. \mathbf{p} 'nin mantıklı bir gösterimi $\hat{\mathbf{p}}_0$ olabilsin diye sadece rastlantısal hataların denemelere katıldığı durum ve veri analizinin \mathbf{p} 'nin bir fonksiyonu olarak hızlıca değişmeyeceği varsayılır. Daha sonra, $P(\mathbf{d}|\mathbf{p})$ olasılık fonksiyonundan $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \dots, \mathbf{d}_{n_{MC}}$ yapay veri kümeleri inşa edilir. Her bir yapay veri kümesinden "Monte Carlo" parametreleri olarak adlandırılan $\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{n_{MC}}$ değerlerini bulmak için kestirim işlemi uygulanır. Sonra, kestirim işleminin doğruluğunun gösterilmesi bakımından $\hat{\mathbf{p}}_0$ için $\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2, \hat{\mathbf{p}}_3, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{n_{MC}}$ dağılımının oluşturulmasına çalışılır. Bunu yapmak için, uygunluk probleminde Monte-Carlo simülasyonlarının [12] nasıl uygulanabileceğini gösteren *Mathematica* kodu yazıldı.

Denklem (17) deki sinyal modeli ile ilişkili Monte-Carlo simülasyon ($n_{MC} = 100$) sonuçları Tablo 1'de özetlenmiştir. Burada, frekansın kestirim değerlerinin genliklere göre daha çok gerçek değerlerine yakın olduğu görülebilir. Beklenildiği gibi, CPU zaman tüketimi parametrelerin sayısı arttıkça artar. Diğer yandan uygunluğun kalitesi

$$\chi^2_{\text{indirgenen}} = \frac{1}{N - K} \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - f(t_i, \mathbf{p}))^2}{\sigma^2}, \quad (18)$$

indirgenen ki-kare tarafından ölçülür. Burada K , serbestlik derecesini belirtir.

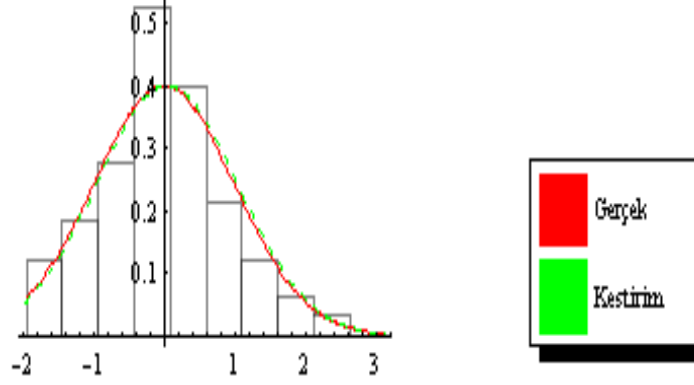
Tablo 1. Monte-Carlo Simülasyonlarının Özeti

Parametreler	Kestirilen Değerler
$\omega(1)$	0.3013±0.0041
$\omega(2)$	0.4978±0.0025
$a_1(1)$	1.1856±0.1397
$a_2(1)$	2.120±0.1805
$a_1(2)$	3.3104±0.1148
$a_2(2)$	0.0384±0.2231
χ^2	25.2509±3.9752

Eğer model güvenilir ve belirsizlik ölçülerinin kestirimleri doğruysa, iyi bir uygunluk için $\chi^2_{\text{indirgenen}} \approx 1$ olması beklenir. Fakat bu istatistik, sahip olduğu dağılımla bir rastlantı değişkenidir. Veri kümesi ne kadar büyük olursa bu dağılım da o kadar dar olacaktır. Monte-Carlo parametreleri oluşturulduğu zaman, minimumda $\chi^2_{\text{indirgenen}} \approx 0.91$ elde edildi. Bu ise, modelin doğruluğunun göstergesinin bir ölçüsüdür.

Son olarak, verilerdeki rastlantısal gürültü değerlerinin $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ ile Gausslu normal dağılımdan oluşturulduğu varsayıldı. Şekil 3, verilerdeki

rastlantısal gürültünün gerçek ve kestirilen olasılık yoğunluğunu gösterir. Buradan da görülmektedir ki, kestirilen yoğunluk (süreksiz), gerçek yoğunluğa (sürekli) yakındır. Örneklemelerin sayısı arttıkça verilerin histogramı gerçek yoğunluğa daha da yakınlaşacaktır. Histogram, yoğunluğun *parametrik olmayan* bir kestiricisi olarak bilinir. Çünkü belirtilen parametrelere bağlı değildir.



Şekil 3. Verideki gürültünün gerçek ve kestirim olasılıklarının karşılaştırılması

SONUÇ

Burada sunulan sonuçlar göstermektedir ki, çok fazla veri kümelerinin Monte Carlo simülasyonunu kullanan yukarıdaki metot, oldukça geneldir ve gürültü ile bozulan doğrusal olmayan modellerle çalışmamızı sağlar. Fakat çok sayıda yapay veri kümesini üretmek için, büyük bir CPU zaman harcanmasına gereksinim duyulur. Metot, ikiden daha fazla sinyal olduğu genişleyen durumlara da direkt uygulanır. Sinüzoidlerin sayısı başlangıçta biliniyor kabul edilir. Fakat genelde bilinmez. Böylece, bu sayının kestirimi, sayısal algoritmanın geliştirilmesi ve farklı metotlarla karşılaştırılması ileriki çalışmalarımıza ışık tutacaktır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Marmara Üniversitesi tarafından desteklenen FEN-DKR–200407–0082 numaralı "Bayes Model Seçimi ve Parametre Kestirimi" isimli projenin bir parçasıdır.

REFERANSLAR

- [1] Bretthost, G. L.: “Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation”, *Springer-Verlag*, 12, (1997).
- [2] Dou, L.; Hodgson, R.J.W.: “Bayesian Inference and Gibbs Sampling in Spectral Analysis and Parameter Estimation: I”, *Inverse Problems*, 11 (1995) 1069-1085.
- [3] Andrieu, C.; Doucet, A.: “Joint Bayesian Model Selection and Estimation of Noisy Sinusoids via Reversible Jump MCMC”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol: 47, No: 10 (1999) 2667-2676.
- [4] Capon, J.: “Maximum-likelihood spectral estimation”, *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*, Springer-Verlag (1983).
- [5] Gelman, A.; Carlin, J.B.; Stern, H.S.; Rubin, D.B.: “Bayesian Data Analysis”, *Chapman & Hall/CRC*, (2000).
- [6] Cevri, M.: “Bayesian Parameter Estimation”, *Yüksek Lisans Tezi*, Marmara Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, (2002).
- [7] Fisher, R.A.: “Theory of Statistical Estimation”, *Proceedings of the Cambridge Philosophy Society*, 22 (1925), 700-725.
- [8] Edwards, A.W.F.: “Likelihood”, *Cambridge University Press*, (1972).
- [9] Press, W.H.; Flannery, B.P.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.: “Numerical Recipes in C: The Art of Computing “, 2nd Ed.; Cambridge University Press, (1995).
- [10] Kelly, J.J.: “Introduction to Data Analysis”, *Essential Mathematica for Students of Science*, (1998)
- [11] Weillin, P.; Gayllord, R.; Kamin, S.: “An Introduction to Programming with Mathematica”, *Cambridge University Press* (2005).
- [12] Tan, S.M.; Fox, C. ; Nicolls, G.K.: “Physics 707 Inverse Problems” (2006).