

*Araştırma Makalesi - Research Article*

# Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kürenin Geçici Rejimdeki Isı İletim Analizi

## Transient Heat Conduction Analysis of a Functionally Graded Sphere

Mehmet Ulutaş<sup>1</sup>, Durmuş Yarımabuç<sup>2\*</sup>

*Geliş / Received: 25/03/2021*

*Revize / Revised: 18/06/2021*

*Kabul / Accepted: 07/09/2021*

### ÖZ

Fonksiyonel derecelendirilmiş kalın cidarlı içi boş kürenin hiperbolik ısı iletim modeli kullanılarak geçici rejimdeki analizi ele alınmıştır. Isı iletim katsayısı, yoğunluk ve özgül ısı gibi malzeme özelliklerinin radyal yönde üstel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu koşullar altında, geleneksel analitik yöntemlerle çözülmesi zor olan değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanarak, Laplace uzayında zamandan bağımsız lineer adi diferansiyel denklem oluşturulur. Daha sonra, diferansiyel denklem Chebyshev Pseudospektral Yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülüp, Modifiye Edilmiş Durbin Ters Dönüşüm Yöntemi kullanılarak zaman uzayındaki çözüm elde edilir. Sıcaklık ve ısı akısının termal gevşeme, bağlı sıcaklık parametrelerine karşı geçici rejimdeki dinamik davranışları metal-seramik karışımı özel bir malzeme için incelenmiş, homojen malzeme ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Literatürde mevcut olan çözümler, bu çalışmada elde edilen sonuçları doğrulamak için kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan birleştirilmiş yöntemin, iyi yapılandırılmış, basit, etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler-** *Hiperbolik Isı İletimi, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Küre, Laplace Dönüşümü, Chebyshev Pseudospektral Yöntemi, Durbin Ters Dönüşüm Yöntemi*

### ABSTRACT

The functionally graded thick-walled hollow sphere is analysed in transient regime using a hyperbolic heat conduction model. It is assumed that the material properties, such as heat conduction coefficient, density, and specific heat change exponentially in radial direction. Under these conditions, a partial differential equation which is difficult to solve by conventional methods is obtained. By applying Laplace transform to this differential equation, time-independent linear ordinary differential equation is created in Laplace space. Then the differential equation is solved numerically using Chebyshev Pseudospectral Method and the solution in time space is obtained by using the Modified Durbin Inverse Transformation Method. The dynamic reactions of heat and heat flux in the transient regime and their behaviour against thermal relaxation, relative temperature parameters are investigated for a special material of metal-ceramic mixture and comparisons are made with homogeneous material. The solutions available in the literature are used to validate the results. The combined method used in this study is shown to be a well-structured, simple, and effective.

**Keywords-** *Hyperbolic Heat Conduction, Functionally Graded Sphere, Laplace Transform, Chebyshev Pseudospectral Method, Durbin's Inverse Method*

<sup>1</sup>İletişim: [ulutasmehmet@hotmail.com](mailto:ulutasmehmet@hotmail.com) (<https://orcid.org/0000-0002-6592-0073>)

Matematik Bölümü, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye, Türkiye

<sup>2\*</sup>Sorumlu yazar iletişimi: [durmusyariimpabuc@osmaniye.edu.tr](mailto:durmusyariimpabuc@osmaniye.edu.tr) (<https://orcid.org/0000-0002-8763-1125>)

Matematik Bölümü, Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Osmaniye, Türkiye

## I. GİRİŞ

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM)'yi oluşumu derecelendirilmiş fonksiyona sahip, bir malzemeden diğer malzemeye doğru geçişin kademeli olduğu kendine özgü bir malzeme olarak ifade edebiliriz. Bilimdeki gelişmeler sayesinde birçok alanda kendine özgü özelliklere sahip malzeme gereksinimine ihtiyaç duyulmuştur. Bu bağlamda, genel olarak yüksek mukavemete ve ısı dirence dayanıklı malzeme gereksiniminden kaynaklı olarak ortaya çıkan bu malzemeler ilk olarak Japonya'da malzemeler üzerine çalışma yapan bir grup malzeme bilimcisi tarafından ortaya atılmış ve geliştirilmeye başlanmıştır [1,2]. FDM genelde metal-seramik parçacıkların yapısal olarak dereceli birleştirilmesinden meydana gelen malzemedir. Dolayısıyla metalin yüksek mukavemet, iletkenlik, işlenebilirlik özellikleri ile seramiğin yüksek ısı dirence dayanıklılık, düşük özgül ağırlık özellikleri bir araya getirilerek bu özellikler yeni oluşturulan yapıda optimize edilebilir. FDM'ler uzay ve havacılık, endüstriyel malzeme, tıp, savunma sanayi vb. birçok alanda kullanılmaktadır. Literatürde bu konu çerçevesinde, farklı geometriler, ortamlar ve durumlar için birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir. Sıcaklık farkı olan ortamlarda, katı cisimlerde ısı transferi genellikle ısı iletimi şeklinde gerçekleşir ve bu transfer belirli bir zaman sonra dengeye ulaşır. Dolayısı ile katılarda, termal gerilmelerin doğru olarak hesaplanabilmesi için ısı iletim analizinin doğru yapılması gerekir. Katılardaki ısı iletiminin matematiksel ifadesi ile ilgili farklı teoriler vardır. Bunlardan en çok kullanılanı Fourier ısı iletimi teorisidir. Bu teoride katılardaki ısı transferinin, sıcaklık farkıyla doğru orantılı olduğu varsayılmaktadır. Bu teori birçok mühendislik uygulaması için yeterli olmasına karşın, termal şok, darbeli lazerli ısıtma gibi çok çeşitli termal yüklemelerin neden olduğu durumlarda ısı iletimini doğru bir şekilde açıklayamaz. Bu şekildeki yüksek sıcaklık veya sıcaklık farkının olduğu durumlarda, katılarda ısı iletimini daha iyi açıklamak için Fourier olmayan ısı iletim teorileri geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi de hiperbolik ısı iletimi teorisidir. Sıcaklık için elde edilen kısmi diferansiyel denklemin hiperbolik olmasından dolayı bu şekilde isimlendirilen bu teoride ortaya atılan termal gevşeme süresi, sıcaklık alanının kendini ısısal düzensizliklere göre ayarlaması gereken zamandır. Hiperbolik ısı iletimi teorisi üzerine küresel geometri kullanılarak birçok analiz yapılmıştır.

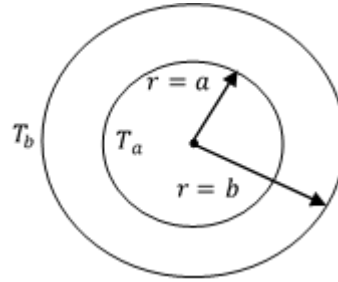
Literatürde bu alanda yapılmış bazı çalışmalar sırasıyla şu şekilde verilebilir. Doğrusal olmayan hiperbolik sistemde enerji korunumu ve ısı akısı gevşeme denklemlerini kullanarak metallerdeki silindirik termal dalgalar için kapalı formda bir çözüm [3]'de önerilmiştir. Hiperbolik ısı iletimi probleminde karşılaşılan keskin süreksizliklerin çevresindeki salınımları çözebilen bir sayısal yöntem çalışılmıştır [4]. Silindirik ve küresel geometride hiperbolik ısı iletim problemlerini sayısal olarak incelenmiştir [5]. Hiperbolik ısı iletim probleminin analitik çözümünün temel özellikleri [6]'da sunulmuştur. Sonsuz uzunluktaki içi boş silindirde gevşeme süresini içeren kararlı-periyodik ısı iletim modeli [7]'de ele alınmıştır. Anizotropik malzemenin termal davranışını tanımlamak için hiperbolik ısı iletim modeli genişletilmiştir [8]. Tek boyutlu ters hiperbolik ısı iletim probleminin bilinmeyen yüzey koşullarını tahmin etmek için, hiperbolik şekil fonksiyonu ve en küçük kareler yöntemiyle birlikte Laplace dönüşüm tekniği ve kontrol hacmi yöntemini uygulamıştır [9]. İç ve dış yüzeyinde ani sıcaklık değişimine maruz bırakılmış içi boş bir kürenin hiperbolik ısı iletimi denklemi için analitik bir çözüm oluşturulmuştur [10]. Yüzeyinde ani sıcaklık değişimine maruz bırakılmış katı, içi boş ve çift katmanlı kompozit kürelerdeki dinamik termal davranışların Fourier olmayan etkileri incelenmiştir [11]. İki yüzeyinde de ani sıcaklık değişimine maruz bırakılmış içi boş bir kürenin ani hiperbolik ısı iletim problemi integral dönüşümü yoluyla analitik olarak çözmüştür [12]. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kalın oyuk silindirin geçici rejimdeki ısı iletimi için analitik bir çözüm, aksel simetri koşullarında sunulmuştur [13]. Heterojen kürede Fourier olmayan hiperbolik ısı iletim modeli [14]'te ele alınmıştır. İçi boş bir küre içindeki sıcaklık dağılımı, Cattannotte-Vernotte yaklaşımına bağlı olan hiperbolik ısı iletim denklemi kullanarak analitik olarak incelemiştir [15]. Periyodik sınır ısı akısına maruz bırakılmış içi boş bir kürenin Fourier olmayan etkisi [16]'de incelenmiştir. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden yapılmış heterojen içi boş silindir ve küreler için Fourier olmayan hiperbolik ısı iletimini [17]'de ele alınmıştır. Silindirik koordinat sistemindeki hiperbolik ısı iletim problemi, hibrit bir Green fonksiyon metodu kullanarak analiz edilmiştir [18].

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş kalın cidarlı içi boş kürenin hiperbolik ısı iletim modeli kullanarak geçici rejimdeki analizi sayısal olarak çözümlenmiştir. Termal gevşeme süresi dışında, diğer tüm malzeme özelliklerinin radyal doğrultuda üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Bu koşullar altında, geleneksel analitik yöntemlerle çözülemeyen değişken katsayılı kısmi diferansiyel denklem elde edilmiştir. Hiperbolik ısı iletim problemi, zaman yönünde Laplace dönüşümü, uzay yönünde Chebyshev Pseudospektral Yöntemi kullanılarak çözülmüştür [19-21]. Modifiye Edilmiş Durbin Ters Dönüşüm Yöntemi [22] kullanılarak kısmi diferansiyel denklemin zaman uzayındaki çözümü elde edilmiştir. Kürenin iç ve dış yüzeyi arasında oluşacak olan yüksek sıcaklık farkı için, sıcaklık ve ısı akısının geçici rejimdeki dinamik tepkileri ve termal gevşeme, bağlı

sıcaklık parametrelerine karşı davranışları metal-seramik karışımı özel bir malzeme için incelenmiş, homojen malzeme ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Literatürde mevcut olan çözümler, bu çalışmada elde edilen sonuçları doğrulamak için kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan birleştirilmiş yöntemin, iyi yapılandırılmış, basit, etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

## II. MATERYAL VE METHOD

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş içi boş, kalın cidarlı heterojen kürenin tek boyutlu hiperbolik ısı iletim problemi ele alınmıştır. Kürenin iç yarıçapı  $a$  ve dış yarıçapı  $b$  olmak üzere kesit alanı Şekil 1'deki gibi verilmiştir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş kalın cidarlı kürenin kesiti

İzotropik ortamlar için sistemi idare eden ısı iletim denklemi ve enerji denge denklemi [5,15]

$$\vec{q} + \tau \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada  $\vec{q}$ ,  $T$ ,  $\tau$ ,  $\lambda$ ,  $\nabla$ ,  $\rho$  ve  $c_p$  sırasıyla ısı akı vektörünü, sıcaklığı, termal gevşeme süresini, ısıl iletkenliği, gradyan operatörünü, yoğunluğu ve özgül ısıyı göstermektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin metal-seramik parçacıkların yapısal olarak dereceli birleştirilmesinden meydana gelen malzeme olduğu varsayılarak, malzeme özelliklerinin radyal yönde üstel olarak değişimi

$$\lambda(r) = \lambda_m e^{\beta(r-a)} \quad (3)$$

$$\rho(r) = \rho_m e^{\gamma(r-a)} \quad (4)$$

$$c_p(r) = c_{pm} e^{\omega(r-a)} \quad (5)$$

biçiminde olup, homojensizlik parametreleri  $\beta = \ln(\lambda_c/\lambda_m)/(b-a)$ ,  $\gamma = \ln(\rho_c/\rho_m)/(b-a)$  ve  $\omega = \ln(c_{pc}/c_{pm})/(b-a)$  bağıntıları kullanılarak hesaplanır.  $m$  ve  $c$  alt indisleri sırasıyla iç ve dış cidardaki malzeme özelliklerini göstermektedir. İç cidardaki malzeme %100 metal ve dış cidardaki malzeme %100 seramik olacak şekilde bir model oluşturulmuştur. Böylelikle metalce zengin iç yüzey ile yüksek mukavemetli, seramikçe zengin dış yüzey ile de yüksek sıcaklığa dayanıklı bir malzeme küresel geometri için elde edilmiştir. İki farklı malzemenin istenilen özellikleri atomik düzeyde bir araya getirilerek, malzemenin tek bir malzeme gibi davranması sağlanmıştır. Bütün değişkenleri aynı mertebeye getirmek ve daha etkili bir sayısal çözüm elde edebilmek için aşağıdaki boyutsuz parametreler kullanılmıştır.

$$\eta = \frac{r}{b}, \quad r_\alpha = \frac{a}{b}, \quad \theta = \frac{T - T_i}{T_b - T_i}, \quad T_\alpha = \frac{T_a - T_i}{T_b - T_i} \quad (6)$$

$$\xi = \frac{\kappa_m t}{b^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\kappa_m \tau}{b^2}, \quad \kappa_m = \frac{\lambda_m}{\rho_m c_{pm}}, \quad Q = \frac{b q_r}{\lambda_m T_i} \quad (7)$$

Burada,  $\kappa_m$ ,  $T_i$ ,  $\varepsilon_0$  ve  $T_\alpha$  sırasıyla seramik iç yüzeydeki ısı yayımını, fonksiyonel derecelendirilmiş küreye etki eden ilk sıcaklığı, boyutsuz termal gevşeme süresini ve bağıl sıcaklığı göstermektedir. Üstel olarak değişen malzeme özellikleri (3-5) ve boyutsuz parametreler (6-7) kullanarak küresel geometride boyutsuz hiperbolik ısı transfer denklemi (1) ve boyutsuz enerji denkleminin (2) bağlı (coupled) formu aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$\mathbf{M}_1(\eta) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \xi} + \mathbf{M}_2(\eta) \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \eta} + \mathbf{M}_3(\eta) \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Burada

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \theta \\ Q \end{bmatrix}$$

bilinmeyen sıcaklık ve ısı akısı içeren vektörü ve

$$\mathbf{M}_1(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_0 \\ (T_b - T_i)/T_i e^{(b\eta-a)(\gamma+\omega)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2(\eta) = \begin{bmatrix} (T_b - T_i)/T_i e^{\beta(b\eta-a)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_3(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2/\eta \end{bmatrix},$$

kısmi diferansiyel denklemin değişken katsayılar matrisleridir.

#### A. Başlangıç ve Sınır Koşulları

Küresel cismin geçici rejimdeki sıcaklık davranışını idare eden hiperbolik ısı iletim denkleminin tam çözümünü oluşturmak için, başlangıç ve sınır koşullarını tam olarak belirtmek gerekir. Cisme herhangi bir sıcaklık etkisi olmadan önce sistemin sabit sıcaklık ( $T_i$ ) etkisi altında olduğu ve ısı akısının ilk anda sıfır olduğu varsayılmıştır. Bu sınır koşullarının boyutsuz hallerinin  $\theta(\eta, 0) = Q(\eta, 0) = 0$  şeklinde olduğu varsayılmıştır. İç ve dış cidar arasındaki sıcaklık farkının fazla ( $T_b \gg T_\alpha$ ) olduğu durağan sınır koşulları alınmıştır. Bu koşullar boyutsuz olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$\theta(r_\alpha, \xi) = T_\alpha, \quad \theta(1, \xi) = 1 \quad (9)$$

#### B. Laplace Dönüşümü

Sistemi modelleyen kısmi diferansiyel denkleme (8), Laplace dönüşümü zaman yönünde uygulanarak adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu Laplace dönüşümü için sıcaklık ve ısı akısını içeren  $\mathbf{Y}(\eta, \xi)$  vektörü, Laplace uzayında  $\mathcal{L}[\mathbf{Y}(\eta, \xi)] = \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$  şeklinde tanımlanmış olsun. Başlangıç anındaki boyutsuz sıcaklık ve ısı akısının değeri sıfırdır. O halde başlangıç koşulu  $\mathbf{Y}(\eta, 0) = [0 \ 0]^T$  şeklindedir. Bu durumda, bağlı (coupled) formdaki kısmi diferansiyel denklemi Laplace uzayında

$$\mathbf{M}_2(\eta) \frac{\partial \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)}{\partial \eta} + (\mathbf{M}_1(\eta)s + \mathbf{M}_3(\eta)) \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s) = \mathbf{M}_1(\eta) \mathbf{Y}(\eta, 0) \quad (10)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Burada  $s$  Laplace parametresidir.

#### C. Chebyshev Pseudospektral Yöntemi

Chebyshev Pseudospektral Yönteminde (CPY) belirlenen aralıkta çözüme yaklaşırken, hatayı minimum tutacak örgü noktaları seçerek bu noktalardaki interpolasyon polinomu bulunur. Problemin çözümünde daha az nokta kullanarak yüksek hassasiyette çözümler elde etmek için, orta noktalara göre sınır noktalarında daha sık bir noktasal dağılım içeren Chebyshev Gauss-Lobatto noktaları tercih edilmiştir. Bu noktalar:

$$\eta_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (11)$$

biçiminde yarım çember üzerine eşit aralıklarla yerleştirilmiş olmalarına karşın yatay eksene izdüşümleri alındığında sınırlarda sık aralıklı, orta noktalarda daha seyrek aralıklı bir dağılım oluştururlar. Böylelikle daha az örgü noktasıyla yüksek hassasiyette çözümler elde edilebilir.

Chebyshev Gauss-Lobatto noktaları kullanılarak Lagrange interpolasyon yöntemiyle oluşturulan  $(N + 1) \times (N + 1)$  boyutundaki Chebyshev diferansiyel matrisinin ( $\mathbf{D}_N$ ) en genel formu aşağıdaki bağıntı [21] kullanılarak elde edilir:

$$\mathbf{D}_{Nij} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = 0 \\ -\frac{\eta_j}{2(1 - \eta_j^2)} & 1 \leq i = j \leq N - 1 \\ \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j \eta_i - \eta_j} & i \neq j \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = N \end{cases} \quad (12)$$

öyleki

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, N \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu oluşturulan diferansiyel matris ( $\mathbf{D}_N$ ), sol taraftan bir kere  $\bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$  vektörü ile çarpıldığında bu vektörün birinci türevine  $\bar{\mathbf{Y}}'(\eta, s) = \mathbf{D}_N \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$ , iki kere çarpıldığında bu vektörün ikinci türevine  $\bar{\mathbf{Y}}''(\eta, s) = \mathbf{D}_N^2 \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$ , üç kere çarpıldığında bu vektörün üçüncü türevine  $\bar{\mathbf{Y}}'''(\eta, s) = \mathbf{D}_N^3 \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$  karşılık gelir. Bu şekilde soldan diferansiyel matris ile çarpım yapılarak yüksek mertebeli türev ifadelerine yüksek hassasiyetli yaklaşımlar sağlanır [19-21].

Bağlımlı (coupled) formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklem (10) Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak

$$\mathbf{L}_N \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Rhs} \quad (13)$$

lineer denklem sistemine dönüştürülür. Burada lineer operatörü  $\mathbf{L}_N$  ve sağ taraf vektörü  $\mathbf{Rhs}$ ,

$$\mathbf{L}_N = \mathbf{M}_2(\eta) \mathbf{D}_N + \mathbf{M}_1(\eta) s + \mathbf{M}_3(\eta), \quad \mathbf{Rhs} = \mathbf{M}_1(\eta) \mathbf{Y}(\eta, 0)$$

şeklinde olup, (9) sınır koşulları uygulandıktan sonra aşikar olmayan çözüm, uygun bir ayrıklaştırma yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

#### D. Modifiye Edilmiş Durbin Ters Laplace Yöntemi

Laplace dönüşümünün tersi, aşağıdaki kontur integrali olarak tanımlanır:

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)] = \mathbf{Y}(\eta, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \bar{\mathbf{Y}}(\eta, s) e^{st} ds \quad (2.10)$$

burada  $\alpha > 0$ ,  $\bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$  içindeki tüm tekilliklerin reel kısımlarından daha büyük olan keyfi reel sabittir. Laplace uzayında sayısal olarak CPY ile çözülen problemin fiziksel zaman uzayına geri dönüşümü, etkili bir sayısal ters dönüşüm yöntemi olan, Modifiye Durbin Ters Dönüşümü [22] ile yapılmıştır. Sonlu Fourier-cosinüs-sinüs dönüşümüne dayalı olan bu yöntem, Dubner ve Abate'nin [23] ters dönüşüm metodunun geliştirilmiş halidir. Fiziksel uzayda çözümü aranan  $\bar{\mathbf{Y}}(\eta, s)$  matrisinin zaman uzayı yönündeki ters Laplace dönüşümü için:

$$Y(\eta, t_j) = \frac{2e^{aj\Delta t}}{N_T} \left[ -\frac{1}{2} \text{Re}\{\bar{Y}(\eta, a)\} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (A(\eta, k) + iB(\eta, k)) e^{(2\pi i/N)kj} \right\} \right], \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$A(\eta, k) = \sum_{m=0}^M \text{Re} \left\{ \bar{Y} \left( \eta, a + i(k + mN) \frac{2\pi}{N_T} \right) \right\}, \quad B(\eta, k) = \sum_{m=0}^M \text{Im} \left\{ \bar{Y} \left( \eta, a + i(k + mN) \frac{2\pi}{N_T} \right) \right\}$$

ile verilen Durbin'in formülasyonu uygulanmıştır [17, 24-29]. Burada  $i$  karmaşık sayıyı,  $N_T$  zaman aralığını,  $N$  eşit uzaklıkta örgü noktalarının toplam sayısını,  $s_k = a + ik2\pi/N_T$  ise  $k$ 'nıncı Laplace dönüşüm parametresini ifade etmektedir. Zaman uzayındaki ayrık noktalar da  $t_j = j\Delta t = jN_T/N$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  şeklinde örüntülenmiştir. Yapılan dönüşümde, Narayanan [30] tarafından önerildiği gibi ters Laplace dönüşümünde daha iyi sonuçlar elde edebilmek için her bir terim Lanczos faktörü

$$L_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) / \left(\frac{\pi k}{N}\right), & k > 0 \end{cases}$$

ile çarpılmıştır. Bu ters dönüşüm yönteminde istenen hassasiyette çözümlerin elde edilmesi; örgü noktalarının toplam sayısına ( $N$ ), zaman aralığına ( $N_T$ ) ve  $a$  parametresine bağlıdır. Literatürde, ters dönüşümün doğru sonuçlar vermesi için  $5 \leq aN_T \leq 10$  aralığında seçilmesi gerektiği belirtilmiştir [22]. Bu çalışmada, ters dönüşüm uygulanırken  $aN_T = 7.5$  alınmıştır.

### III. BULGULAR

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş içi boş kalın cidarlı kürenin geçici rejimdeki sıcaklık ve ısı akı analizi Chebyshev Pseudospektral Yöntemi (CPY) ile sayısal olarak çözümlenmiştir. İçi boş kalın cidarlı kürenin iç yarıçapı  $a = 0.6$  ve dış yarıçapı  $b = 1$  olarak alınmıştır. Bu cisimlerin tüm malzeme özelliklerinin üstel olarak radyal yönünde derecelendirildiği kabul edilmiştir. Fonksiyonel dercelendirilmiş malzemeyi oluşturan metal ( $Ti - 6Al - 4V$ ) yüksek süneklik, homojenlik ve yüksek mukavemete sahip iken diğer malzeme olan seramik ( $ZrO_2$ ) yüksek çatlak dağılma direncine ve çok yüksek termal genişlemeye sahiptir. Kürenin iç cidarı metalce ( $Ti - 6Al - 4V$ ), dış cidarı ise seramikçe ( $ZrO_2$ ) zengin olacak şekilde özel olarak seçilen metal ve seramik karışımından oluştuğu düşünülmektedir. Bu özel malzemenin özellikleri Tablo 1'de verilmiştir. Bu metal-seramik karışıma karşılık gelen homojensizlik parametreleri de  $\beta = -3.1944$ ,  $\gamma = 0.5409$  ve  $\omega = -0.7311$  verilmiştir. Malzeme özelliklerin radyal değişimi için verilmiş olan homojensizlik parametrelerinin sıfır alınması ( $\beta = \gamma = \omega = 0$ ) durumunda, homojen metal malzemenin elde edileceği açıktır.

**Tablo 1.** Karışımda kullanılacak malzemelerin özellikleri [31] (Metal-Seramik)

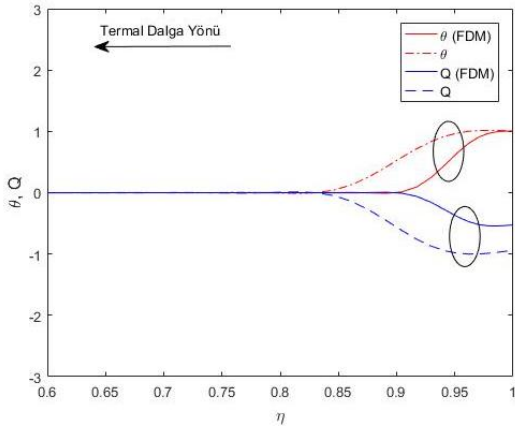
Malzeme	$\lambda, W/(mK)$	$\rho, kg/m^3$	$c_p, J/(kg.K)$
$Ti - 6Al - 4V$	7.5	4430	560
$ZrO_2$	2.09	5500	418

Bu çalışmada kullanılan yöntemin doğruluğunu göstermek için, malzeme özelliklerinin radyal yönde kuvvet kuralına göre sabit bir homojensizlik parametresi ile değiştiği  $\lambda = \lambda_m r^\beta$ ,  $\rho = \rho_m r^\beta$ ,  $c_p = c_{pm} r^\beta$  bağlı (coupled) formdaki sınır değer probleminin çözümü yapılmış ve Babaei ve Chen [14]'nin yapmış olduğu analitik çalışma ile Tablo 2'de karşılaştırılmıştır. Kürenin dış yüzeyine etki eden yüksek dış sıcaklığın ilk anlarında ( $\xi = 0.06$ ), ilk yansımadan sonra ( $\xi = 0.42$ ) ve dengeye ulaşmaya yakın bir zaman dilimindeki ( $\xi = 1.92$ ) aşamalarda boyutsuz zamanlarda karşılaştırmalar yapılmıştır. Laplace-Pseudospektral-Durbin birleşik yöntemi ile elde edilen sonuçların analitik çözümlerle iyi bir uyum içerisinde olduğu ve 18 kolokasyon noktasında en az beş haneli hassasiyete sahip olduğu görülmüştür.

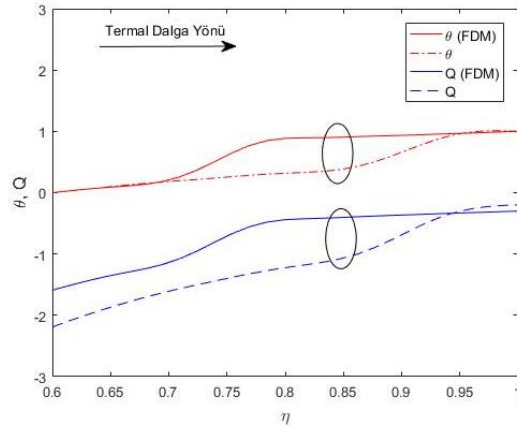
**Tablo 2.** Sıcaklığın farklı boyutsuz zaman dilimlerinde [14] ile karşılaştırılması

	$\xi = 0.6$		$\xi = 0.42$		$\xi = 1.92$	
	CPY	[14]	CPY	[14]	CPY	[14]
0.60	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.61	0.00225578	0.00225568	0.02972289	0.02972303	0.08088687	0.08088683
0.65	0.00278298	0.00278273	0.10125040	0.10125061	0.28236426	0.28236421
0.70	-0.00373811	-0.00373823	0.18460801	0.18460781	0.50092556	0.50092567
0.77	0.00456380	0.00456344	0.27545754	0.27545782	0.66775188	0.66775190
0.83	0.02932910	0.02932900	0.34237135	0.34237136	0.79525960	0.79525964
0.90	0.59738223	0.59738233	0.38361732	0.38361754	0.89001757	0.89001750
0.95	1.01381454	1.01381467	0.51493020	0.51493011	0.95337175	0.95337174
0.99	1.02351076	1.02351074	0.85413478	0.85413474	0.98932549	0.98932551
1.00	1.00584200	1.00584200	1.00071672	1.00071672	1.00069693	1.00069693

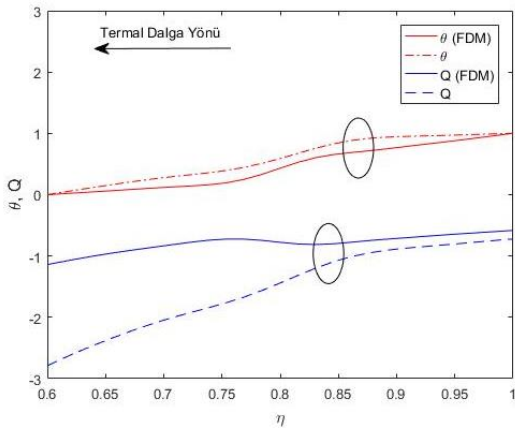
Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ile homojen malzemenin boyutsuz termal gevşeme süresinde ( $\varepsilon_0$ ), boyutsuz sıcaklık ( $\theta$ ) ve boyutsuz ısı akısı ( $Q$ ) için farklı boyutsuz zaman ( $\xi$ ) dilimlerinde termal dalgaları cidar boyunca Şekil 2’de incelenmiştir. Şekiller üzerindeki elipsler fonksiyonel derecelendirilmiş ve homojen malzeme için sıcaklık ve ısı akı çiftlerini göstermektedir.



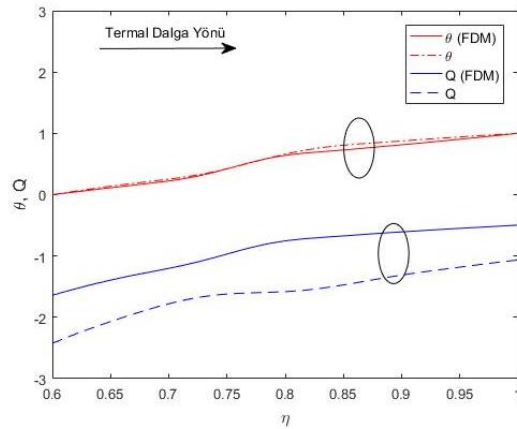
(a)  $\xi = 0.06$



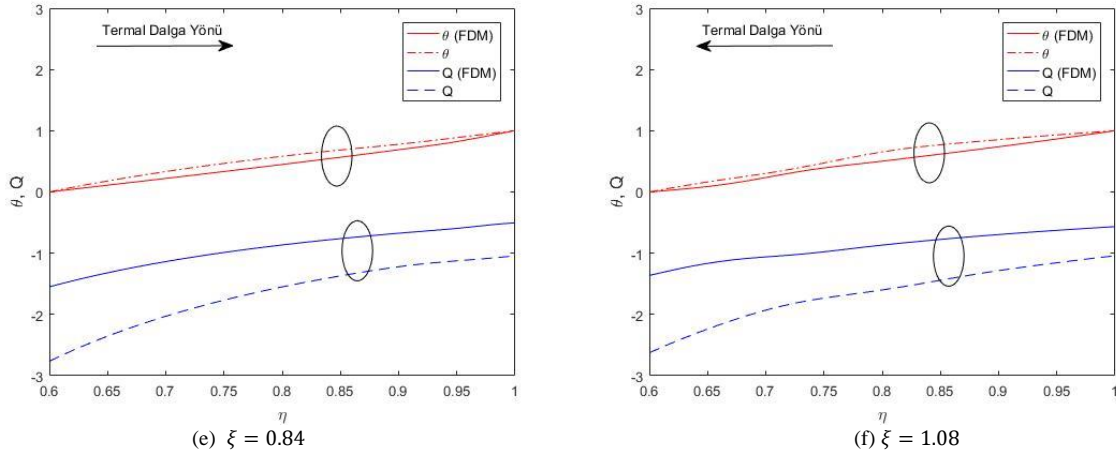
(b)  $\xi = 0.42$



(c)  $\xi = 0.84$

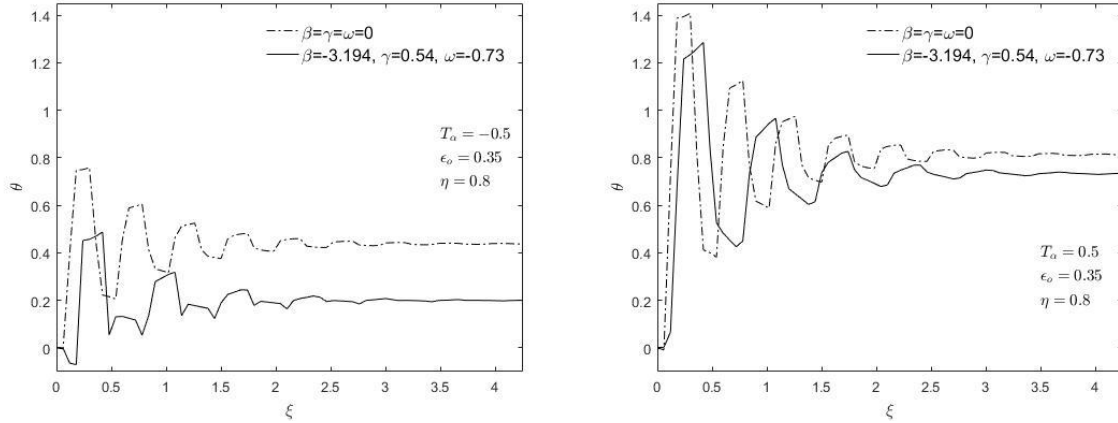


(d)  $\xi = 1.08$



Şekil 2. Sıcaklık ve ısı akısının kürenin kalınlığı boyunca farklı zaman dilimlerindeki dağılımları.

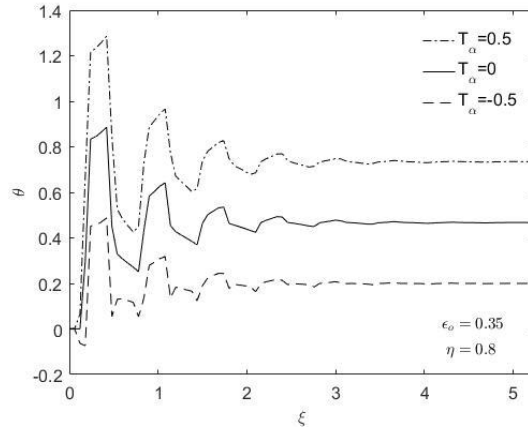
İç ve dış cidarda sıcaklığın sabit ancak dış cidardaki sıcaklığın iç cidardan daha fazla olduğu sınır koşulu (9) ele alınmıştır. Dolayısı ile fonksiyonel derecelendirilmiş (düz çizgi) ve homojen malzemede (kesikli çizgi) zaman yönünde başlangıçta dış cidardan iç cidara doğru ilerleyen sıcaklık ( $\theta$ ) ve ısı akısı ( $Q$ ) dalgası (Şekil 2(a)), iç cidara çarptıktan sonra düşey doğrultusunda bir değişiklik olmadan geri yansıyor tekrar dış cidara doğru yönelmiştir (Şekil 2(b)). Hem fonksiyonel olarak derecelendirilmiş hem de homojen malzeme için yansımalar dögüsel olarak tekrarlayıp dalga yüksekliği azalıp dengeye ulaşana kadar devam etmektedir (Şekil 2(c-f)). Benzer karakteristik gösteren her iki malzemenin cidar boyunca ilerleme ve yansıma süreleri farklıdır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme öngöröldüğü gibi homojen malzemeye göre daha yavaş ilerlemektedir. Homojen malzeme sadece metalden oluştuğu için ısı iletimi fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden daha yüksektir. Her iki malzeme de belli bir zaman sonunda dengeye ulaşmaktadır.



Şekil 3. Kürenin başlangıç sıcaklığının iç sıcaklıktan daha yüksek (soldaki şekil) ve daha düşük (sağdaki şekil) olduğu durumlarda, cidarın orta noktasındaki sıcaklığın zaman boyunca sabit bir termal gevşeme süresinde FD ve homojen malzeme için karşılaştırılması.

İç cidardaki sıcaklığın başlangıç sıcaklığından küçük ( $T_\alpha = -0.5$ ) ve büyük ( $T_\alpha = 0.5$ ) olduğu durumlarda, cidarın orta noktasında ( $\eta = 0.8$ ) sabit bir termal gevşeme süresi ( $\epsilon_0 = 0.35$ ) için boyutsuz zaman boyunca sıcaklık dağılımının fonksiyonel derecelendirilmiş ve homojen malzeme için karşılaştırılması Şekil 3'te verilmiştir. Homojen malzemenin her iki durum için hem genliğinin hem de sıcaklık değerinin fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye göre daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. İç cidardaki sıcaklığın başlangıç sıcaklığından büyük olduğu durumda sıcaklık değerlerinin beklendiği gibi daha yüksek olduğu açıkça görölmektedir.





**Şekil 4.** Fonksiyonel derecelendirilmiş kürenin iç sıcaklık değerlerinin başlangıç sıcaklık değerinden küçük, eşit ve büyük olması durumunda cidarın orta noktasındaki sıcaklık dağılımı.

Dış cidarı yüksek sıcaklığa maruz bırakılmış fonksiyonel derecelendirilmiş kürenin sabit bir termal gevşeme süresinde, iç sıcaklığının başlangıç sıcaklığından küçük ( $T_\alpha = -0.5$ ), eşit ( $T_\alpha = 0$ ) ve büyük ( $T_\alpha = 0.5$ ) olduğu durumlar Şekil 4'te verilmiştir. İç sıcaklığın değeri arttıkça sıcaklığın dalgalanma genliğinin arttığı ve genel olarak pozitif yönde ötelenmenin olduğu da görülmüştür.

#### IV. SONUÇLAR

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş içi boş kalın cidarlı kürenin geçici rejimdeki sıcaklık ve ısı akı analizi, zaman yönünde Laplace dönüşümü, uzay yönünde Chebyshev Pseudospektral Yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Daha sonra, modifiye edilmiş Durbin ters dönüşüm yöntemi kullanılarak kısmi diferansiyel denklemin zaman uzayındaki çözümü elde edilmiştir. Termal gevşeme süresi dışında, diğer tüm malzeme özelliklerinin radyal doğrultuda üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Kürenin iç cidarı metalce, dış cidarı ise seramikçe zengin olacak şekilde özel olarak seçilen metal ve seramik karışımından oluştuğu varsayılmıştır. Sonuç olarak, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş küresel kapların homojen malzemelere göre termal davranışlarının daha yavaş ve düşük ısılarda tepkiler verdiği görülmüştür. Farklı malzeme çeşitleri kullanılarak oluşturulacak fonksiyonel derecelendirilmiş kürelerle, ihtiyaca en uygun termal davranışlar elde edebilir. Bunu yanında, kullanılan birleştirilmiş yöntemin, iyi yapılandırılmış, basit, etkili bir yöntem olduğu gösterilmiştir.

#### TEŞEKKÜR

Bu çalışma Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (BAP) destekli OKÜ BAP-2019-PT3-012 numaralı projenin ürünüdür.

#### KAYNAKLAR

- [1] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Hirai, T. & Shiota, I. (1990). Proceedings of the 1st International Symposium on Functionally Gradient Materials, Sendai, Japan.
- [2] Koizumi, M. (1993). The Concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34, 3-10.
- [3] Wilhelm, H. E. & Choi, S. H. (1975). Nonlinear hyperbolic theory of thermal waves in metals. *The Journal of Chemical Physics*, 63(5), 2219-2123.
- [4] Chen, H. T. & Lin, J. Y. (1993). Numerical analysis for hyperbolic heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(11), 2891-2898.
- [5] Lin, J. Y. & Chen, H. T. (1994). Numerical solution of hyperbolic heat conduction in cylindrical and spherical systems. *Applied Mathematical Modelling*, 18, 384-390.
- [6] Antaki, P. J. (1995). Key Features of analytical solutions for hyperbolic heat conduction, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 95(2044), 1-15.
- [7] Zanchini, E. & Pulvirenti, B. (1998). Periodic heat conduction with relaxation time in cylindrical geometry, *Heat and Mass Transfer*, 33, 319-326.
- [8] Al-Nimr, M. A. & Naji, M. (2000). The hyperbolic heat conduction equation in an anisotropic material. *International Journal of Thermophysics*, 21(1), 281-287.

- [9] Chen, H. T., Peng, S. Y. & Yang, P. C. (2001). Numerical method for hyperbolic inverse heat conduction problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 28(6), 847-856.
- [10] Jiang, F. (2005). Analytical solution for hyperbolic heat conduction in a hollow sphere, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 19(4), 595-598.
- [11] Tsai, C. S., Lin, Y. C. & Hung, C. I. (2005). A study on the non-Fourier effects in spherical media due to sudden temperature changes on the surfaces. *Heat Mass Transfer*, 41, 709-716.
- [12] Jiang, F. (2006). Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects. *Heat Mass Transfer*, 42, 1083-1091.
- [13] Hosseini, S. M., Akhlaghi, M. & Shakeri, M. (2007). Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method. *Heat Mass Transfer*, 43, 669-675.
- [14] Babaei, M. H. & Chen, Z. T. (2008). Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere. *International Journal of Thermophysics*, 29, 1457-1469.
- [15] Moosaie, A. (2009). Axisymmetric non-Fourier temperature field in a hollow sphere. *Archive of Applied Mechanics*, 79, 679-694.
- [16] Shirmohammadi, A. & Moosaie, A. (2009). Non-Fourier heat conduction in a hollow sphere with periodic surface heat flux. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 36, 827-833.
- [17] Keles, I. & Conker, C. (2011). Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30, 449-455.
- [18] Chen, T. M. (2010). Numerical solution of hyperbolic heat conduction problems in the cylindrical coordinate system by the hybrid Green's function method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, 1319-1325.
- [19] Trefethen, L. N. (2000). *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia, PA.
- [20] Eker, M., Yarimpabuç, D. & Çelebi, K. (2020). Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation. *Engineering Computations*, 38(1), 371-391.
- [21] Eker, M., Yarimpabuç, D., Yıldırım, A. & Çelebi, K. (2020). Elastic solutions based on the Mori-Tanaka scheme for pressurized functionally graded cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 19(4), 57-68.
- [22] Durbin, F. (1974). Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*, 17(4), 371-376.
- [23] Dubner, R. & Abate, J. (1968). Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier Cosine transform. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 15(1), 115-123.
- [24] Çalım, F. F. (2009). Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(3), 469-476.
- [25] Temel, B., Yıldırım, S. & Tutuncu, N. (2014). Elastic and viscoelastic response of heterogeneous annular structures under arbitrary transient pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 89, 78-83.
- [26] Çalım, F. F. (2016). Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section. *Composites Part B: Engineering*, 98, 472-483.
- [27] Temel, B. & Şahan, M. F. (2018). Investigation of the Efficiency of the Solution of a Simple Mechanical Model by Using Laplace Transformation. *American Journal of Engineering Research (AJER)*, 7(10), 276-282.
- [28] Noori, A. R., Aslan, T. A. & Temel, B. (2021). Dynamic Analysis of Functionally Graded Porous Beams Using Complementary Functions Method in the Laplace Domain. *Composite Structures*, 256, 113094.
- [29] Temel, B., Aslan, T. A. & Noori, A. R. (2021). In-plane vibration analysis of parabolic arches having a variable thickness. *Int. J. Dynam. Control*.
- [30] Narayan, G. V. (1979). *Numerical operational methods in structural dynamics*. Doktora Tezi, University of Minnesota, Minneapolis, MN.
- [31] Yıldırım, A., Yarimpabuç, D. & Celebi K. (2020). Transient thermal stress analysis of functionally graded annular fin with free base. *Journal of Thermal Stresses*, 43(9), 1138-1149.