GUFBD / *GUJS* (2022) 12(1): 380-384
DOI: 10.17714/gumusfenbil.906177 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Exterior modüller üzerinde ters türevler hakkında bir not

A note about anti-derivations on the Exterior modules

Ali KARAKUŞ*[1,a]
[1]*Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 79000, Kilis*

• Geliş tarihi / *Received*: 30.03.2021 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 21.12.2021 • Kabul tarihi / *Accepted*: 01.01.2022

Öz
Modüller Değişmeli Cebir'de üzerinde çokça çalışılan bir konudur. Bu modüllerin en bilinen türleri Exterior Modüller ve Simetrik Modüllerdir. Bu çalışmada, karakteristiği sıfır olan herhangi bir R halkası üzerindeki sonlu üretilmiş Exterior modüllerin ters türevleri ve bu modüllerin bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca, aynı R halkası üzerindeki Exterior modülün kararlı alt modülleri incelenmiştir. Bu kararlı alt modül yapılarının ters türevleri hakkında elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Exterior modül, Halka, Modül, Ters türev

Abstract
Modules are a subject that has been worked on in Commutative Algebra. The most known types of these modules are the Exterior Modules and Symmetrical modules. This study will examine the inverse derivatives of finite produced Exterior modules on any R-ring with zero characteristics and some of the features of these modules. In addition, the stable sub-modules of the Exterior module on the same R-ring have been examined. Some results are given on the inverse derivatives of these stable submodule structures.

Keywords*: Exterior module, Ring, Module, Anti-derivation*

[*a] Ali KARAKUŞ; alikarakus@kilis.edu.tr, Tel: (0536) 575 96 41, orcid.org/0000-0002-8483-0137

1. Giriş
1. Introduction

Exterior modül, bir modülden türetilebilen modüllerin en ilginç ve kullanışlılarından biridir. Aynı zamanda, determinantlar teorisi ile yakın bağlantıları olan bir değişmeli cebir türüdür. Değişmeli Cebir, özellikle ideal ve modül yapılarının ve bunlara benzeyen yapıların özelliklerini inceleyen bir alandır.

Bir halka ve onun ideali ile ilgili pek çok çalışma yapılmış ve halen de yapılmaya devam ediliyor. Özellikle polinom halkaları, bunların idealleri ile ilgili birçok çalışma yapılmaktadır. Bunlarda biri de polinom halkaları üzerinde tanımlanmış Gröbner tabanlardır. Matematikte ve daha özel olarak bilgisayar cebirinde, cebirsel geometride ve değişmeli cebirde, bir Gröbner tabanı, bir K halkası üzerinde bir polinom halkasında K$[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bir idealin özel bir tür oluşturma kümesidir. Gröbner tabanı, idealin ve ilişkili cebirsel çeşitliliğin, boyut ve sonlu olduğunda sıfır sayısı gibi birçok önemli özelliğinin kolayca çıkarılmasına izin verir. Bu konu ile ilgili çalışmalara (Çagman, 2017, Polat & Çagman, 2021) kaynakları örnek olarak verilebilir. Bu çalışmalar herhangi bir halka ve onun ideali üzerindeki uygulamaların yine bir halka üzerinde tanımlanan modül yapılarında da karşımıza çıkabileceğini gösterir. Bu sebeple bu çalışmada bir değişmeli halka üzerinde tanımlanan özel bir modül yapısı olan Exterior modülün bazı sonuçları verilmiştir.

Değişmeli Cebirde, bir halka üzerindeki modül kavramı tanımlanan alandaki vektör uzayının genelleştirilmiş bir gösterimidir. Exterior modül ise elemanları üzerinde Exterior (dış, wedge) çarpım tanımlanan bir yapıdır. Bunlarla ilgili çalışmalara (Baer, 1952; Hoffman & Kunze, 1961; Kuiper, 1961) kaynaklarında detaylı olarak yer verilmiştir.

Modüller üzerinde tanımlanan türev kavramı ilk olarak (Grothendieck, 1967) de karşımıza çıkmaktadır. Daha sonra (Osborn,1968; Matsumura,1986) da modüller üzerinde türev kavramı daha geniş bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca 1996 yılında R. Hart, k bir değişmeli halka ve R bir değişmeli k-cebir iken modüllerin yüksek mertebeden türevlerini incelemiştir (Hart, 1996). Ayrıca (Karakus, 2021) yine Exterior ve Simetrik Modüllerin türevleri ile ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir. Bu çalışmada, Exterior modül yapıları üzerinde tanımlanan ters türevler ve bunların bazı özellikleri incelenecektir.

2.Materyal ve metot
2.Material and method

Bir R-modül üzerinde tanımlanan Exterior modül, değişmeli cebir alanında diferansiyel formlar üzerinde tanımlanan modüllerin bir direkt toplamıdır. Bu Exterior modül üzerinde tanımlanan işlem, diferansiyel formlar üzerinde tanımlanan işlemdir. Bir R-modül üzerindeki Exterior modül, $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 \in R$ ve Λ simgesi de Exterior çarpım ya da wedge çarpım olmak üzere, $r_1, r_2 \Lambda r_3, r_4 \Lambda r_5 \Lambda r_6$ şeklindeki formlar tarafından oluşturulur. Bu elemanların lineer kombinasyonlarından oluşan diferansiyel formlar Exterior modülün elemanlarıdır. Bir R-modül üzerinde tanımlanan Exterior modül, aynı zamanda bölüm Exterior modülü olarak ta ifade edilir.

İki değişkenli bir fonksiyon, eğer tüm değişkenlerine göre lineer ise bu fonksiyona bilineer fonksiyon denir. Buna en basit örnek olarak $f(x, y) = xy$ fonksiyonu verilebir. Daha kapsamlı olarak yazmak gerekirse, bir V vektör uzayı üzerindeki bilineer fonksiyon $B: V \times V \to F$ dönüşümü ile birlikte aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur:

i-) $B(v, w) = -B(w, v)$
ii-) $B(\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2, w) = \theta_1 B(v_1, w) + \theta_2 B(v_2, w)$.

Yukarıda da belirttiğimiz gibi, herhangi bir R halkası üzerinde tanımlanan modül yapısının türev ve ters türevleri Değişmeli Cebir alanında üzerine çokça çalışılan bir konudur. Bu noktada ilk olarak bu modül yapıları üzerinde tanımlanmış olan türev ve ters türev kavramlarını incelmek faydalı olacaktır. R bir halka ve her $x, y \in R$ olmak üzere, R halkası üzerinde $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ ile tanımlı $\delta: R \to R$ dönüşümüne bir türev denir (Bracic, 2001). Benzer şekilde bir R-modül üzerinde ters türev ve özellikleri de (Bland, 2005; Rim, 1987) da incelenmiştir. Bu çalışma boyunca R ile, karakteristiği 0 olan ve sonlu üretilmiş bir halka kastedilecektir.

E ve Ê, karakteristiği sıfır olan bir R halkası üzerinde sonlu üretilmiş iki R-modül ve β: ExÊ→ R bir bilineer fonksiyon olsun. E nin p. Exterior kuvveti E^p ile gösterilir. Herhangi bir $e' \in E'$ için tek bir $i_p(e'): E^p \to E^{p-1}$ lineer dönüşümü vardır öyle ki herhangi $x_j \in E, j = 1,2, \ldots, p$ için

$$i_p(e')x_1 \Lambda x_2 \Lambda \ldots \Lambda x_p = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k x_1 \Lambda x_2 \Lambda \ldots \Lambda x_{k-1} \Lambda x_{k+1} \Lambda \ldots \Lambda x_p, x \geq 1 \quad (1)$$

$$i_0(e') = 0 \tag{2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $E^0 = E^{-1} = R$ dir. (1) numaralı denklemdeki ε_k ifadesi

$$\varepsilon_k = (-1)^{k+1}\beta(e', x_k) \tag{3}$$

olarak yazılır.

$$A(E) = \sum_{p=0} E^p \tag{4}$$

E, R-modülü üzerindeki Exterior modül ve

$$i(e') = \sum_{p=0} i_p(e') \tag{5}$$

ise dönüşümlerin direkt toplamları olsun. O zaman $i(e')$, Exterior modül için bir anti (ters) türevdir. Herhangi bir $e' \in E'$ için eğer

$$i(e')A \subseteq A \tag{6}$$

ise R üzerindeki $A(E)$ nin A alt modülüne kararlı alt modül denir.

3.Bulgular

3.Results

Bu kısımda öncelikle Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 verilecek olup, Teorem 3.1'in ispatı verildikten sonra Teorem 3.2 in ispatına geçilecektir.

Teorem 3.1: F, E nin bir alt modülü ve $q > 1$ olmak üzere $v_q \in E^q$ olsun. Eğer $v_q \in F^q$ ise bir $F_1 \subseteq F$ alt modülü ve $e_1', e_2', \ldots, e_{q-1}' \in E'$ elemanları vardır öyle ki

$$E = F + F_1 \tag{7}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{q-1} i(e_j')\right) v_q \tag{8}$$

elemanları F_1 de sıfırdan farklı elemanlardır. Bu teorem $A(E)$ nin kararlı alt modüllerinin aşağıda verilecek olan karakterizasyonlarının bir sonucudur.

Teorem 3.2: Eğer A, R üzerinde $A(E)$ nin bir alt modülü ise A kararlıdır ancak ve ancak $F \subseteq E$ olacak şekilde tek bir alt modül vardır öyle ki

$$A = A(F) \tag{9}$$

dir.

$Q_{q,n}(G_{q,n})$, $1,2,3,\ldots,n$ arasından seçilen tamsayıların q uzunluğundaki kesin olarak artan ya da kesin olarak azalmayan $\binom{n}{q}$ ($\binom{n+q-1}{q}$) dizilerini kümesi olsun. Ve bu kümeyi de Δ ile gösterelim. Ayrıca $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de E nin herhangi elemanları olsunlar. Bazı $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q) \in \Delta$ için

$$f_\alpha = f_{\alpha_1} \Lambda f_{\alpha_2} \Lambda \ldots \Lambda f_{\alpha_q} \tag{10}$$

eşitliğini yazabiliriz. E nin q. Exterior türevi için $\Delta = Q_{q,n}$ alalım. Biliyoruz ki, $\{f_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ kümesi E^q nun bir tabanıdır ve dolayısıyla herhangi $v_q \in E^q$ için

$$v_q = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha f_\alpha, a_\alpha \in R \tag{11}$$

yazılabilir. Bu noktadan itibaren Teorem 3.1 in ispatına geçebiliriz.

İspat: F nin eleman sayısını $\mathrm{s(F) = t}$ ile gösterelim. $f_1, f_2, \ldots, f_t, f_{t+1}, \ldots f_n \in E$ elemanları arasından öyle elemanlar vardır ki $f_1, f_2, \ldots, f_t \in F$ dir. Eğer Teorem 3.1'deki gibi $0 \neq v_q \in E^q$ ise tüm $a_\alpha = 0$ olmamak şartıyla, v_q elemanı (11) denklemindeki gibi düşünülebilir. $v_q \notin F^q$ olduğundan bir $\gamma \in \Delta$ vardır öyle ki $a_\gamma \neq 0$, $\gamma_q > t$ ve $\gamma \in \{t+1, t+2, \ldots, n\}$ dir. Diğer taraftan, $\alpha \in \Delta$ ve $\alpha \in \{1,2,\ldots,t\}$ olmak üzere v_q, $f_\alpha \in F^q$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$f_1', f_2', \ldots, f_n' \in E$ olmak üzere

$\beta(f_j', f_i) = \delta_{ij};\ i,j = 1,2,\ldots,n$ ve $e_i' = f_{\gamma i}'; i = 1,2,\ldots,q-1$ olsun.

Ayrıca

$$\tau = i(e_1')\Lambda i(e_2')\Lambda \ldots \Lambda i(e_{q-1}') = \prod_{t=1}^{q-1} i(f_{\gamma t}')$$

şeklinde tanımlayalım.

İddiamız, $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q-1}\} \subseteq \alpha$ iken $\tau(f_\alpha) = 0$ olduğudur. (1) eşitliğinden, f_α üzerinde

$$i(f_j')f_\alpha = i(f_j')f_{\alpha_1}\Lambda f_{\alpha_2}\Lambda \ldots \Lambda f_{\alpha_q} = \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k f_{\alpha_1}\Lambda f_{\alpha_2}\Lambda \ldots \Lambda f_{\alpha_{k-1}}\Lambda f_{\alpha_{k+1}}\Lambda \ldots \Lambda f_{\alpha_q}$$

yazılır. Burada $\varepsilon_k = \pm\beta(f_j', f_{\alpha_k}) = \pm\delta_{j\alpha_k}$ dır. Çünkü, eğer $j \notin \alpha$ ise

$$i(f_j')f_\alpha = 0 \tag{12}$$

dır. Eğer $j \in \alpha$ ise $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{q-1})$ olmak üzere

$$i(f_j')f_\alpha = c_\alpha f_{\omega_1} \Lambda f_{\omega_2} \Lambda \ldots \Lambda f_{\omega_{q-1}} \tag{13}$$

eşitliği elde edilir. R, karakteristiği sıfır olan sonlu üretilmiş bir R-modül olduğundan c_α hiçbir zaman sıfır olamaz ve $f_{\omega_1} \Lambda f_{\omega_2} \Lambda \ldots \Lambda f_{\omega_{q-1}} \in E^{q-1}$ olur. Dolayısıyla $f_{\omega_1} \Lambda f_{\omega_2} \Lambda \ldots \Lambda f_{\omega_{q-1}}$ de hiçbir zaman sıfır olamaz. Dolayısıyla (12) ve (13) eşitliklerinden görülebileceği üzere, $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q-1}\} \subseteq \alpha$ iken $\tau(f_\alpha) = 0$ olur. Aynı zamanda yukarıdaki iddiadan da biliyoruz ki eğer $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q-1}\} \subseteq \alpha$ ise, o zaman

$$\tau(f_\alpha) = d_\alpha f_{r_\alpha} \tag{14}$$

dır. Burada $d_\alpha = \pm 1$ dolayısıyla da her durumda sıfırdan farklıdır. Ayrıca, burada şunu da hatırlatmak gerekirse, $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q-1}\}$ kümesini α ya tamamlayan tamsayı için tek bir seçenek vardır. Dolayısıyla $\tau(f_\alpha)$ ve $\tau(f_\mu)$ elemanları için eğer α ve μ, Δ da farklı elemanlar ise $r_\alpha \neq r_\mu$ dir.

$\underline{\Delta} = \{\alpha \in \Delta : \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{q-1}\} \subseteq \alpha\}$ alırsak

$$\tau(v_q) = \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \tau(f_\alpha) = \sum_{\alpha \in \underline{\Delta}} a_\alpha d_\alpha f_{r_\alpha} \tag{15}$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca (15) eşitliği F de sıfırdan farklı bir eleman olduğu için, $r_\gamma > t$ ve $a_\alpha d_\alpha \neq 0$ dır. Bu yüzden $f_1, f_2, \ldots, f_t, \tau(v_q)$ lineer bağımsız elemanların kümesidir ve $f_1, f_2, \ldots, f_t, \tau(v_q), g_{t+2}, \ldots, g_n$ şeklindeki bir baza tamamlanabilir. Böylelikle Teorem 3.1 ispatlanmış olur.

Şimdi Teorem 3.2'yi ispatlayabiliriz:

İspat: $v_i \in E^i, 0 \leq i \leq q$ ve$v_q \neq 0$ olmak üzere, $0 \neq v = v_0 + v_1 + \cdots + v_q \in A$ olsun. Eğer $q = 0$ ise $v = v_0$, A kümesinde R nin sıfırdan farklı bir elemanıdır. Dolayısıyla da $R \subseteq A$ dır. Eğer $q = 1$ ise, $v_1' \in E'$ elemanı $\beta(v_1', v_1) = 1$ şartını sağlar. Bu yüzden de $i(v_1') = 1$ olur. Eğer $q = 1$ ise,

$v_1 = v - v_0 \in A$ ve dolayısıyla da $F = A \cap E \neq 0$ elde edilir. Kabul edelim ki $q > 1$ ve bazı $a_\gamma \neq 0$ için v_q elemanı (11) eşitliğindeki gibi olsun. τ, Teorem 3.1 in ispatında tanımlandığı için

$$\begin{aligned} i(f_{\gamma q}')\tau(v_q) &= i(f_{\gamma q}') \textstyle\sum_{\alpha \in \underline{\Delta}} a_\alpha d_\alpha f_{r_\alpha} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha \in \underline{\Delta}} a_\alpha d_\alpha i(f_{\gamma q}') f_{r_\alpha} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha \in \underline{\Delta}} a_\alpha d_\alpha f_{r_\alpha \Lambda \gamma q} \end{aligned} \tag{16}$$

yazılır. Fakat burada $r_\gamma = \gamma_q, a_\alpha d_\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq \gamma$ için $r_\alpha = \gamma_\alpha$ dır. Dolayısıyla (16) dan $i(f_{\gamma q}')\tau(v_q) = a_\gamma d_\gamma \in R$ olur. Eğer $p < q$ ise $i(f_{\gamma q}')\tau(v_q) = 0$ ve dolayısıyla da $i(f_{\gamma q}')\tau(v) = a_\gamma d_\gamma$ olur. Eğer $p < q - 1$ ise $\tau(v_p) = 0$ ve $\tau(v_{p-1}) \in R \subseteq A$ ile $\tau(v_q)$ sıfırdan farklıdırlar. Bundan dolayı

$$\tau(v) = \tau(v_{q-1}) + \tau(v_q) \tag{17}$$

olup A nın kararlı oluşundan $\tau(v) \in A$ olur. Bu ise bize $\tau(v_q) = \tau(v) - \tau(v_{q-1})$ olduğunu gösterir. Yani $R \subsetneq A$ ise $F = A \cap E \neq 0$ olduğunu ispatlamış olduk. Dolayısıyla $A(F) \subsetneq A$ dır. Eğer $A(F) \neq A$ olsaydı, $v_i \in E^i, 0 \leq i \leq p$ olmak üzere $\omega = v_0 + v_1 + \cdots + v_p \in A - A(F)$ olurdu.

$v = \omega - (v_{q+1} + v_{q+2} + \cdots + v_p) \in A - A(F)$ olsun. Eğer $v \in A(F)$ olsaydı,

$v_{q+1} + v_{q+2} + \cdots + v_p \in A(F)$ olduğundan $\omega \in A(F)$ olacaktı. Teorem 3.1 den, $e_j' \in E^i$

$j = 1,2, \ldots, q - 1$ ve herhangi bir F_1 alt modülü için $E = F + F_1$ dir öyle ki

$$0 \neq \tau(v_q) \in F_1 \tag{18}$$

dir. Aynı zamanda $\tau(v) = \tau(v_{q-1}) + \tau(v_q)$ ve $\tau(v_q) = \tau(v) - \tau(v_{q-1})$ dir. $\tau(v_{q-1}) \in R \subsetneq A$ ve A nın kararlılığından dolayı $\tau(v) \in A$ elde edilir. Yani $\tau(v_q) \in A$ bulunmuş olur. Fakat (18) den dolayı $0 \neq \tau(v_q) \in A \cap E \cap F_1 = F \cap F_1 = 0$ olur ki bu ise bir çelişkidir. Ve bu çelişki ile ispat tamamlanmış olur.

4.Tartışma ve sonuç

4. Discussion and conclusion

Exterior türev konusu sadece Matematiksel Fizik için değil aynı zamanda Değişmeli Cebir için de önemli bir konudur. Çünkü bir modül yapısının hem Exterior modül hem Simetrik modül olarak farklı varyasyonları vardır. Dolayısıyla modül yapıları üzerinde tanımlanan anti(ters) türev kavramı, Cebir alanında da önemli bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Sonlu üretilmiş bir R halkası üzerindeki Exterior modüllerin ters türevleri üzerinde çalışmak, araştırmacılara hem Matematiksel Fizik hem de Değişmeli Cebir alanında farklı bakış açıları kazandırır. Bu çalışmada herhangi bir R halkası üzerinde tanımlanan bir R-modül M nin ters türevleri ve modüllerin yarı kararlı olma durumunu inceledik.

Yazar katkısı
Author contribution

Bu çalışma tek yazarlı olup, her aşamasında yazar kendisi yer almıştır.

Etik beyanı
Declaration of ethical code

Bu makalenin yazar(lar)ı, bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve / veya yasal-özel izin gerektirmediğini beyan etmektedir.

Çıkar çatışması beyanı
Conflicts of interest

Yazar(lar), herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar
References

Baer, R. (1952). *Linear algebra & Projective geometry*. (1st ed.). New York: Academic Press Inc.

Bland, P.E. (2005). Higher derivations on rings & Modules. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 263497,* https://doi.org/10.1155/IJMMS.2005.2373.

Bracic, J. (2001). Representations & Derivations of modules. *Irish Mathematical Society Bulletin, 47*(2001), *27-39.*

Çagman, A. (2017). Explicit Gröbner basis of the ideal of vanishing polynomials over Z_2xZ_2. *Karaelmas Fen Mühendislik Dergisi, 7*(2), 349-351.

Grothendieck, A. (1967). *Elements de geometrie algebrique. publicationes mathematicae*. (Vol. 4). I.H.E.S: Paris.

Hart, R. (1996). Higher derivations & Universal differentials operators. *Journal of Algebra,* 0253, *184,* 175- 181. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0253.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1961). *Linear algebra*. (2nd ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall Inc.

Karakuş, A. (2021). An approximation to second exterior derivation of high order universal modules, *Algebra Letters, 1*(2021), *1-13.*

Kuiper, N. (1961*). Linear algebra & Geometry*. (1st ed.). North-Holland Publicshing Company.

Matsumura, H. (1986). *Commutative ring theory*. (1st ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Osborn, H. (1968). Module of differentials II. Mathematische Annalen, 175, 146-158.

Polat, K., & Çagman, A. (2021). Polcag spaces: I. group-like structures. *Thai Journal of Mathematics, 19*(1), 87-92.

Rim, S.H. (1987). Extensions of high anti-derivations to modules of quotients. *Journal of the Korean Mathematical Society,24*(1), 25-31.