SERİ B CİLT 37 SAYI 2 1987

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

ORMAN FAKÜLTESİ
DERGİSİ

ORTALAMALARLA İLGİLİ VARSAYIMLAR VE DENETİM

Doç. Dr. Tahsin AKALP [1]

K ı s a Ö z e t

Çeşitli mühendislik dallarında karşılaşılan problemlerin çözümünde kullanılabilecek denetim yöntemleri olarak normal dağılımın ortalaması ve iki ortalama arasındaki farka ilişkin testler tanıtılmaya çalışılmıştır. Toplumların varyanslarının bilinip bilinmemesi de varsayımların denetiminde kullanılacak dağılımların farklı olmasını yada farklı uygulanmasını gerektirmektedir.

0. GİRİŞ

Bir sorunun bilimsel yöntemlerle çözümünde, önce sonucun ne olabileceği kestirilmekte, sonra da bu tahminin doğruluğu kanıtlanmaya çalışılmaktadır. Yapılan bu tahmine varsayım adı verilmektedir. Varsayım genel olarak; Geçmişteki deneyimler ve bugünkü bilgilere göre ileri sürülen, ancak doğruluğu henüz kanıtlanmamış bir yargı olarak da tanımlanabilir.

İstatistik varsayım ise toplumun bilinmeyen parametreleri hakkında tahminde bulunmaktır. Toplumun tamamı gözlenemeyeceği için toplumdan rasgele alınan örnekler üzerinde ölçülen yada gözlenen değerlerle toplumun parametreleri kararlaştırılmaktadır. İstatistik varsayım toplumun niteliklerini tanımlar ancak toplumun neden bu özelliklere sahip olduğunu açıklamaz.

İstatistikte varsayım denetimi daima iki varsayım içerir. Bunlar esas varsayım ve alternatif varsayımdır. Esas varsayım fark olmadığı şeklinde kurulur. Esas varsayımda toplum değeri ile örnek değeri arasındaki farkların belirli ve önemli nedenlerden değil, rasgele nedenlerden ileri geldiği, dolayısıyla bunlar arasındaki farkın sıfıra eşit olduğu kabul edilir. Bu nedenle bu varsayıma sıfır varsayım da denir. H_0 ile gösterilir. Alternatif varsayım ise sıfır varsayımın reddi halinde kabul edilebilecek varsayımdır ve H_A sembolü ile gösterilir. Alternatif varsayım, önerilen nedenlerin yada durumların sayısına göre iki veya daha çok sayıda olabilir.

Bir istatistik varsayım toplumun dağılımını ve bu dağılımın parametrelerini açıkça belirtiyorsa buna basit varsayım denir. Toplumun dağılım şeklinin bilinmemesi, yada buna ilişkin bir tahminde bulunulmaması halindeki varsayıma ise karmaşık varsayım denir. Bu durumda nonparametrik yöntemler sözkonusu olur. Bu yayında tümüyle basit varsayım üzerinde durulacaktır.

---

[1] İ Ü. Orman Fakültesi Tütün Eksperleri Yüksek Okulu.

Yayın Komisyonuna Sunulduğu Tarih : 22.8.1988

Varsayımın kontrol edilerek kabul veya reddine karar verilebilmesi için dağılımın değişim bölgesi, kabul ve red (kritik) bölgesi olarak ikiye ayrılır. Örneklerin hesaplanan parametreleri istatistik kabul bölgesine düşüyorsa varsayım kabul edilir. Kritik bölgeye düşüyorsa reddedilir. Kabul ve red bölgelerini belirlemek için önce α önem (anlamlılık) düzeyi seçilir. α red bölgesinde düşme olasılığını gösterir.

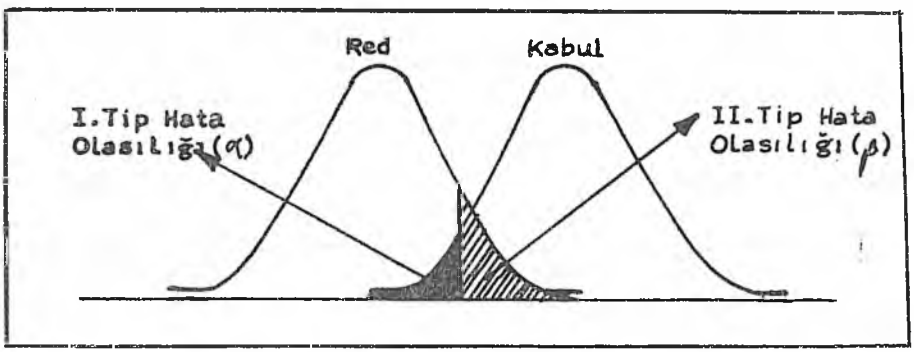
1. VARSAYIM DENETİMİNDE HATA TÜRLERİ

Varsayım denetiminde toplumun tümünü gözlemek mümkün olmadığı için denetim sonucu verilen kararların hatalı olması kaçınılmazdır. Denetim sonucu varılan yargı iki çeşit hata ile yüklü olabilmektedir. H_0 doğru iken reddedilmişse bir hata yapılmıştır. Buna I. tip hata denir. H_A doğru iken H_0'ı doğru kabul etmek de bir başka hataya neden olur. Buna da II. tip hata adı verilir. Biri istatistik varsayımın denetiminde verilen kararla gerçek durum arasındaki ilişki dört farklı şekilde olabilir. Bunlar;

Karar	Gerçek Durum	
	H_0 Doğru	H_0 Yanlış
H_0 Kabul	Doğru Karar	I. Tip Hata (α)
H_A Kabul	II. Tip Hata (β)	Doğru Karar

şeklinde gösterilebilir.

Önem düzeyi, I. tip hata yapılması olasılığını gösterir. I. tip hata olasılığı azaldıkça, II. tip hata yapılması olasılığı artar (Şekil 1.1).



Şekil 1.1. I. ve II. Tip Hata Olasılıkları.

I. tip hata yapma olasılığı (α) istenen düzeyde tutulabilir. II. tip hata yapma olasılığı (β)'nın hesabı ise oldukça güçtür. Ancak örnek büyüklüğü artırılarak istenen düzeye indirgenebilir. I. tip hata yapılması daha önemlidir. Zira denetime sokulan sıfır varsayım geçmişteki deneyimler ve bugünkü bilgilere göre ileri sürülmüş bir yargıdır.

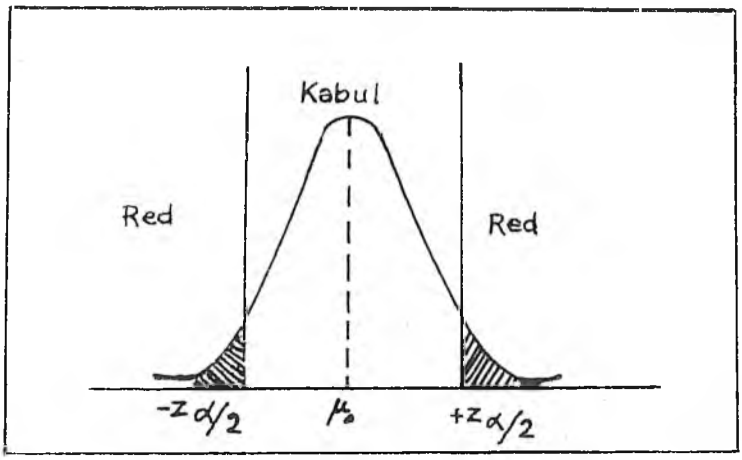
Toplum parametrelerine ait varsayımların denetiminde güven aralığı kavramı etkin bir yöntemdir. Güven aralığı yaklaşımının daha genel bir şekli olasılık oranları denetimidir. Güven aralığı içinde kalan değerler istatistik anlamda birbirlerinden farklı değildir.

Bu çalışmada tek ve iki ortalamaya ilişkin olan testler incelenmiştir. Bu inceleme toplum varyanslarının belli olup olmaması hallerine göre ayrı ayrı yapılmıştır.

2. NORMAL DAĞILIMIN ORTALAMASI İLE İLGİLİ TESTLER

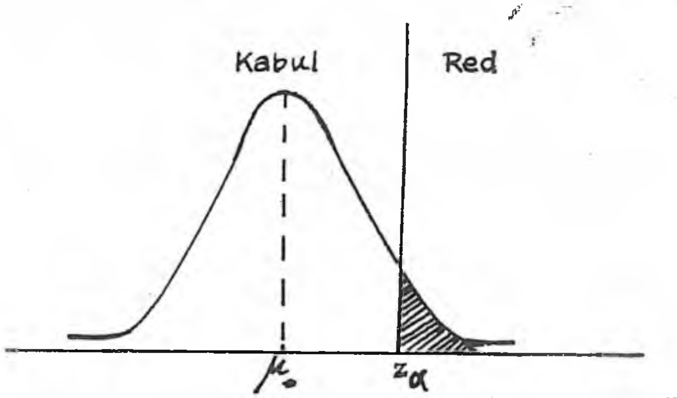
Normal dağılımlı bir toplumdan alınan n birimlik bir örneğin istatistik ölçüleri $\bar{x}$, S, $S_{\bar{x}}$ olacaktır. Esas varsayım toplum aritmetik ortalaması μ'nin μ_0 gibi bir değere eşit olduğu şeklinde kurulmuş ise $H_0 : \mu = \mu_0$ olacaktır. Alternatif varsayım ise üç farklı şekilde kurulmuş olabilir.

i) $H_A : \mu \neq \mu_0$ şeklinde kurulmuş ise denetim iki yönlüdür.



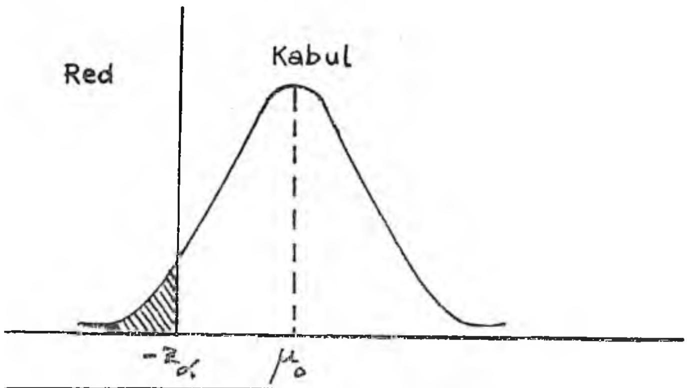
$\alpha/2$ büyüklüğündeki kritik bölgeler dağılımın iki yanında yer alırlar.

ii) $H_A : \mu > \mu_0$ şeklinde kurulmuş ise denetim tek yönlüdür.



büyüklüğündeki kritik bölge dağılımın sağ yanında yer alır.

iii) $H_A : \mu < \mu_0$ şeklinde kurulmuş ise denetim tek yönlüdür.



büyüklüğündeki kritik bölge dağılımın sol yanında yer alır.

2.1. Toplumun Varyansı (σ^2) Biliniyorsa

Bu durumda esas varsayım denetiminde kullanılacak dönüşüm;

$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ olacaktır. Örnek normal dağılımlı bir toplumdan alınmışsa bu dönüşüm standart normal dağılımlı olacaktır. Toplum normal dağılımlı değilse örnek sayısı n, yeterince büyük alınacak örneğin aritmetik ortalamasının yaklaşık normal dağılımlı olması sağlanır (Merkezi Limit Teoremi). Bu nedenle Z dönüşümü, yeter büyüklükteki örnekler için standart normal dağılımlı kabul edilebilir.

Denetimin kritik değerleri alternatif varsayıma göre belirlenecektir. $H_A : \mu \neq \mu_0$ şeklinde ise denetim iki yönlüdür. Kritik $Z\alpha/2$ değerleri standart normal dağılım tablosundan alınır ve hesaplanan Z değeri ile karşılaştırılır, $|Z| < Z\alpha/2$ ise H_0 varsayımının reddi için yeterli delil bulunamamış olacağından H_0 varsayımı kabul edilir. Aksi halde H_0 varsayımı α düzeyinde reddedilir ve alternatif varsayım kabul edilir.

2.2. Toplum Varyansı (σ^2) Bilinmiyorsa

Örneğin alındığı toplumun varyansı bilinmiyorsa Z - dönüşümü kullanılamaz. Bu durumda örneğin standart sapması (S) hesaplanmış olacağından dönüşümde bu değer toplum değeri yerine konulabilir. Bu durumda elde edilecek değişken t - dağılımı gösterir. Yani,

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \quad \text{olur.}$$

Esas varsayımın kritik değeri, alternatif varsayımın kuruluş şekline göre denetim çift veya tek yönlü olacaktır. Kritik bölgeler denetimin çift veya tek yönlü oluşuna göre değişecektir.

3. ORTALAMALAR ARASINDAKİ FARKA İLİŞKİN VARSAYIMLAR

Birçok araştırmada örnek sayısı birden fazladır. Özellikle birbirine karşıt veya ikiye indirilebilen durumlardaki iki toplum ortalamasının karşılaştırılması ve bunlar arasındaki farkın anlamlı olup olmadığının araştırılması sözkonusu olur. Şu gibi durumlara birçok örnek vermek mümkündür. Örneğin iki farklı suni gübre cinsinin belli bir toprakta buğday verimine etkisi, kadın ve erkek işçilerin belli bir işi yapma süreleri v.b.

İkiden çok ortalama ile ilgili denetimler, ortalamaların ikişer ikişer karşılaştırılması yolu ile yapılabilir. Ancak hesap zorluğu yanında bu durumda I. tip hata olasılığı da öngörülen düzeyden fazla olur. Bu sakıncaları ortadan kaldırmak amacıyla geliştirilen ve çok geniş uygulama alanı olan varyans analizi yöntemi bu konunun dışında tutulmuştur.

Örneklerin her ikisininde normal dağılımlı toplumlardan rasgele ve bağımsız olarak seçilmesi koşuluyla toplumların varyanslarının bilinip bilinmediğine göre farklı denetim yöntemleri uygulanır.

3.1. Toplumların Varyansları (σ_1^2 ve σ_2^2) Biliniyorsa

Örneklerin alındığı toplumların varyansları biliniyorsa $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ veya $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C$ (C, sabit) şekillerinde kurulabilen esas varsayımın denetimi için yapılacak dönüşüm, toplumlar normal dağılımlı olduklarından standart normal dağılım gösterecektir. Burada esas varsayım ve alternatif varsayımın kuruluş şekli bilim dalının ve problemin gerektirdiği şekilde bizzat araştırmacı tarafından kararlaştırılır.

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = C$ esas varsayımının denetiminde;

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

dağılımı kullanılır. Dağılımın kritik değeri alternatif varsayıma göre belirlenir. Alternatif varsayım $H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq C$ ise denetim iki yönlü olur ve kritik değer ise $\mp Z_{\alpha/2}$'ye eşittir. $H_A : \mu_1 - \mu_2 > C$ ve $H_A : \mu_1 - \mu_2 < C$ için ise denetim tek yönlü olur. Bu durumda kritik değer $+Z_\alpha$ veya $-Z_\alpha$'ya eşit olacaktır.

3.2. Toplumların Varyansları Bilinmiyorsa

Toplum varyanslarının bilinmemesi durumunda özellikle iki farklı durumdan söz edilebilir.

i) Toplum varyanslarının eşit olduklarının bilinmesi yada kabul edilmesi fakat bu ortak varyansın mutlak değerinin belli olmaması,

ii) Toplum varyansları hakkında, pozitif oldukları dışında bir bilgiye sahip olunmaması.

İkinci durumda çeşitli yaklaşık testler uygulanır. Örneğin Behrem - Fischer kriteri.

İlk durumda dönüşümlerde toplum varyansları yerine örneklerin varyansları kullanılır. Toplumlar normal dağılımlı olduklarından veya örnek büyüklüğü yeterince fazla ise dönüşüm, serbestlik derecesi $v = n_1 + n_2 - 2$ olan t - dağılımı olacaktır.

İki toplumun varyansları eşit ise toplum varyansları yerine,

$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ ifadesinden hesaplanan örnek varyansı kullanılır. Bu durumda t - dağılımının değeri;

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - C}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{olur.}$$

Örnek ortalamalarının t - dağılımı ile denetlenmesinde toplumların eşvaryanslı olmaları önkoşulu normal dağılımlı olmalarından daha önemlidir. Ancak örnek büyüklükleri yeterince fazla ve eşitse varyansların eşit olmamasının sonuca etkisi azdır.

3.3. Eşleştirilmiş Örneklerin Karşılaştırılması

Toplumdan alınan eşit bireyli iki örneğin bireylerinin karşılıklı eşleştirilmesi halinde yada farklı olduğu sanılan iki toplumdan rasgele ve bağımsız olarak alınan eşit büyüklükteki iki örneğin her bireyine, ardarda veya yanyana eşleştirerek, farklı işlemler uygulanması halinde eşler arasındaki farklar (n) sayıda gözlemden oluşan tekbir örnek olarak kabul edilebilir. Bu yöntemde örneklerin alındığı iki toplumun varyanslarının eşit olması gerekmez. Ayrıca örneklerin bağımsız olması koşulu da aranmaz.

Eşler arasındaki farkları $d_i = x_i - y_i$ ile gösterirsek bunların aritmetik ortalaması $\bar{d}$, varyans S_d^2 olsun, Esas varsayım; $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, alternatif varsayım ise $H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ şeklindedir. t - dönüşümü, serbestlik derecesi $v = n - 1$ olan t - dağılımı gösterir. Yani;

$$t = \frac{\bar{d}}{S\,\bar{d} / \sqrt{n}}$$ dir. Denetim iki yönlüdür.

SONUÇ

Ortalamalarla ilgili varsayımlar ve bu varsayımların denetimine ilişkin testler özellikle mühendislikte büyük önem taşımaktadır.

Gübreleme arzu edilen düzeyde etkili olmuş mudur? Makinanın ayarı gerekir mi? İki aletin duyarlığı arasında anlamlı bir fark var mıdır? İki meşcere tipinin verimleri farklı mıdır? gibi sorulara yanıt aranırken kullanılabilecek denetim yöntemleri bu makalede tanıtılmaya çalışılmıştır. Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için örneklerin alındığı toplumların normal dağılımlı olması gerekir. Bunu gerçekleştirmek üzere örnek sayısının daima fazla tutulması yararlı olur. Ayrıca örneklerin rasgele ve bağımsız alınmış olmasına da özen gösterilmelidir.

KAYNAKLAR

BAYAZIT, M. - OĞUZ, B., 1985. Mühendisler İçin İstatistik, Birsen Kitabevi, 187 s.

CENGİZ, N., 1984. Bio - Matematik ve İstatistik Yöntemler, Ege Üniversitesi Basımevi, 203 s.

DÜZGÜNEŞ, O., 1963. Bilimsel Araştırmalarda İstatistik, Ege Üniversitesi Matbaası, 375 s.

GÜNEL, A., 1971. İstatistiksel Testler Hangisi Ne Zaman? İ.Ü. Orman Fakültesi Dergisi, Seri B, s. 1, s. 238 - 254.

GÜNEL, A., 1978. İstatistik Metodlar Ders Notları (Temel Kavramlar) Roto Baskısı, 136 s.

KALIPSIZ, A., 1981. İstatistik Yöntemler, İ.Ü. Orman Fakültesi Yayını, 558 s.

KORUM, U., 1985. Matematiksel İstatistiğe Giriş, A.Ü. Siyasal Bilgiler Fak. Yayını, 447 s.

VELİCANGİL, S., 1984. Bio İstatistik, Filiz Kitabevi, 349 s.