SERİ SERIES SERIE SÉRIE	B	CİLT VOLUME BAND TOME	27	SAYI NUMBER HEFT FASCICULE	1	1977

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

ORMAN FAKÜLTESİ

DERGİSİ

REVIEW OF THE FACULTY OF FORESTRY, UNIVERSITY OF ISTANBUL

ZEITSCHRIFT DER FORSTLICHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT ISTANBUL

REVUE DE LA FACULTÉ FORESTIÈRE DE L'UNIVERSITÉ D'ISTANBUL

FAKTÖR ANALİZİ [1]

Doç. Dr. H. Alptekin GÜNEL [2]

Sayın Hocalarım, Değerli Arkadaşlarım,

Bugün sizlere «Faktör Analizi» olarak tanınan metodu ana çizgileri ile sunmaya gayret edeceğim. Faktör analizi gibi lineer cebrin adeta uygulama sahası olan bir konuyu, iki buçuk saat içinde bütün ayrıntıları ile tanıtmak, hiç değilse benim için, mümkün olmadığına göre, konuşmamın amacını faktör analizi ile ilgili temel kavramları vermek ve analiz sonunda ortaya çıkan faktör tablosunu tanıtmak şeklinde sınırlama zorunluluğunu duydum. Dikkatleri başka yöne çekmemek düşüncesiyle de kavramların açıklanmasında daha çok geometrik yolu kullanmayı öngördüm.

Faktör Analizi İstatistik biliminin bir kolu olmakla beraber, ruhbilimciler tarafından geliştirilmiştir. Bu sahadaki araştırmalarda çok başvurulan bir metot olması nedeniyle ruhbilimin bir kolu olduğu kanısı vardır. Metot, ruhbilim çalışmalarında, insan yetenek ve davranışları ile ilgili varsayımların açıklanmasında kullanılabilecek matematiksel modeller ortaya koyma isteğinden doğmuştur.

Faktör analizinin doğuşu daha ziyade Charles Spearman adlı araştırıcıya atfedilmektedir. Spearman 1904 yılında yayınladığı «General Intelligence, Objectively Determined and Measured» adlı makalesiyle faktör analizi metodunun ilk örneğini vermiştir. Gerçekte, Spearmanın sözü edilen yazıda kullandığı yaklaşım 1901 yılında istatistik biliminin büyük isimlerinden Karl Pearsonın ortaya attığı «Temel Eksenler» metodunun psikolojik olaylara bir uygulamasıdır. Ancak, Spearman daha sonraki çalışmalariyle faktör analizinin gelişmesine ve yeni tekniklerin

---

(*) Prof. Dr. A Kalıpsız tarafından İ.Ü. Orman Fakültesi mensupları için düzenlenen İstatistik Metodları kursunda yapılan konuşma metnidir. Bana bu imkânı verdiği için Sayın Prof. Dr. Kalıpsız'a teşekkür ederim.

[2] İ.Ü. Orman Fakültesi Orman Hasılatı ve Biyometri Kürsüsü Öğretim Üyesi, Istanbul

Yayın Komisyonuna Sunulduğu Tarih : 28.2.1977

bulunmasına büyük katkıda bulunmuştur. Faktör analizinin bugünkü düzeyine ulaşmasında katkıları olan bir kaç isim daha vermek gerekirse, L. L. Thurstone, Cyril Burt, Godfrey H. Thomson, Maxwell Garnett, Karl Holzinger ve Harry H. Harman sayılabilir.

Faktör analizi, her ne kadar, ruhbilimciler tarafından geliştirilmişse de, diğer araştırma alanlarında da sık sık kullanılan bir yöntemdir. Sosyoloji, Ekonomi, Taksonomi, Biyoloji, Tıp, Jeoloji, Meteoroloji, Askerlik v.b. dallarda faktör analizinin çok sayıda uygulama örnekleri vardır.

Buraya kadar açık bir tanımını yapmadan «Faktör» sözcüğü rahatlıkla kullanıldı. Metotla ilgili diğer ayrıntılara geçmeden önce faktör analizinde «faktör» sözcüğünden ne anlaşıldığı belirtilmelidir. Bir grup değişkenler arasında ortak yönler yani bir korelasyon varsa bu durumda bir «faktörün» varlığı söz konusudur. Bir ağacın çapı ile boyu, çapı ile hacmı arasında bir korelasyon vardır, dolayısiyle bu korelasyon bir faktör oluşturmaktadır.

Faktör analizinin amacı değişkenler arasındaki korelasyonu en iyi şekilde yeniden belirlemektir. Bu belirlemeyi, değişkenler karmaşıklığı içinden düzenli ve yoruma uygun bir basitleştirme yaparak gerçekleştirmeye çalışır.

Bazı varlıklar bazı özellikleri bakımından büyük benzerlik, diğer bir deyişle özellikleri itibariyle bir ortaklık göstermektedirler. Bu çakışma ne kadar fazla ise iki varlığı tefrik etmek o kadar güçleşecektir. İşte, faktör analizi böyle bir ayırımda başvurulan bir yöntemdir. Ancak, faktör analizi neden - sonuç ilişkisini araştırmamaktadır. Bunun yerine, araştırma objesini en iyi şekilde tanımlayacak özellikleri bir kaç faktör yardımı ile ortaya koymaya çalışır. Faktörler ise değişkenler arasındaki korelasyona göre belirlenir.

Bir objenin tanımı, kontrol dışı kalan değişkenler nedeniyle tam yapılamamaktadır. Ancak tanım belirli bir güvenirlilikle yaklaşık olarak gerçekleştirilebilir. Yapılan tanımın basit ve anlamlı olması istenir. Basitlik ve anlamlılıktan ne anlaşıldığına göre ortaya birçok faktör analizi ekolleri çıkmıştır.

Bir objeyi faktörler yardımı ile tanımlamada kullanılabilecek en basit matematiksel model doğrusal formdaki bir modeldir. Bu model başka formlarda da olabilirse de, bu takdirde bazı hesap karmaşıklığı ortaya çıkmakta, ayrıca sonuçların yorumlanması güçleşmektedir.

Sözü edilen doğrusal model sonsuz şekilde belirlenebilir. Ancak, sonuçların yoruma uygunluğu bakımından, bu modellerin bazı nitelikte olması istenir. Araştırma amacına bağlı olarak, önemli iki nitelik şunlardır:

1. Doğrusal dönüşüm azami varyans göstersin,
2. Doğrusal dönüşüm değişkenler arasında var olan korelasyonu en iyi şekilde tekrar versin.

Birinci nitelikteki dönüşüm Temel Öğeler Analizine (Principal Component Analysis), ikinci nitelikteki dönüşüm Faktör Analizine esas olmaktadır.

Temel Öğeler Analizinde, her hangi bir Z_j değişkenini, (F) ile gösterilen faktörlere göre tanımlayan doğrusal model aşağıdaki gibidir:

$$Z_j = a_{j1} F_1 + a_{j2} F_2 + \cdots + a_{jn} F_n \quad (j=1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

Buna karşılık, Faktör analizi doğrusal modeli ise

$$Z_j = b_{j1} F_1 + b_{j2} F_2 + \ldots + b_{jm} F_m + d_j U \quad (j=1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

şeklindedir.

Her iki modeldeki (a) ve (b) 'ler ile (d) modellerin tayini gereken katsayılarını göstermektedir. Modellerdeki F'lere ortak faktörler, U_j 'ye özgü faktör (unique factor) denilmektedir. Bu kavramlara ilerde tekrar değinilecektir.

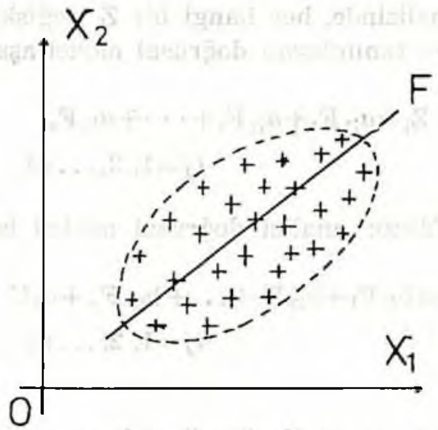
Faktör Analizinde Kullanılan Kavramlar

Faktör analizi amacının değişkenler karmaşıklığı içinden bu değişkenleri birkaç faktör yardımı ile daha basit olarak tanımlamak, böylece yoruma müsait bir düzen ortaya getirmek olduğu, söz konusu faktörlerin değişkenler arasındaki korelasyone göre belirlendiği yukarda ifade edilmişti. Buna göre, korelasyon Faktör analizinin üzerinde durulması gereken ilk kavramı olmaktadır. Ancak, korelasyon kavramı istatistik metotlar saatlerinde yeter açıklıkta tanıtıldığından, burada konuşmanın bütünlüğünü sağlayacak düzeyde değinilecektir.

Değişkenler arasındaki doğrusal bağıntının ölçüsü korelasyon katsayısıdır. Böyle bir bağıntının varlığı değişkenler arasında neden - sonuç ilişkisine bir kanıt olarak gösterilemez.

İki değişken arasındaki korelasyon, değişkenlerin aldıkları değerler bir koordinat sistemine noktalanmak suretiyle geometrik olarak gösterilebilir. Bu şekilde elde edilecek noktaların dağılımı, daha yerinde bir deyimle beraberliği iki değişken arasındaki korelasyon hakkında bilgi verecektir.

Bir an için, iki değişken değerlerinin belirlediği noktaların Şekil - 1 'deki gibi bir dağılım verdiğini kabul edelim. Dağılım bir elipse benze-



Şekil - 1.

mektedir. Elipsin büyük ekseninin (OF) durumu iki değişken arasında pozitif bir korelasyon olduğuna işarettir. Söz konusu iki değişken arasındaki korelasyon tam olsaydı bütün noktalar OF doğrusu üzerinde yer alacaklardı. Böyle bir duruma çok nadir hallerde rastlanır. Noktalar dağılımının daire çekline yaklaşması oranmda korelasyon zayıflıyacaktır.

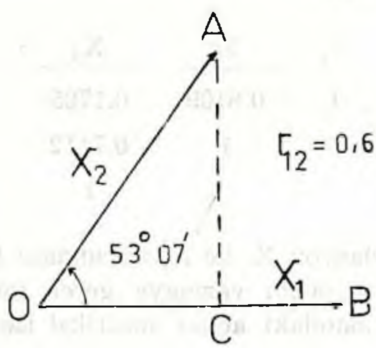
Faktör analizi değişkenlerarası korelasyonun doğrusal olduğunu varsayar. Ancak, korelasyon her zaman bu formda olmamaktadır. Dolayısiyle, faktör analizi korelasyonun doğrusal nitelikte olmadığı durumlarda kullanılmamalıdır. Her nekadar eğrisel karakterdeki korelasyon gösteren durumlar için faktör analizi teknikleri geliştirilmişse de, bunlar sonuçların yorumunu güçleştiren bazı komplikasyonlar arzetmektedir.

Burada değişkenlerin dağılım formları ile ilgili bir noktaya da değinmekte yarar vardır. Her ne kadar değişkenlerin normal dağılım göstermeleri istenirse de, değişkenlerin verdikleri dağılımın normal dağılımdan farklı olması faktör analizi bakımından pek önemli değildir; zira, değişkenin orijinal dağılımı fazla çarpık, çok tepeli ve kesik durumlu olmadıkça, yapılacak dönüşümlerle dağılımlar normal dağılıma yaklaştırılabilmektedir.

Değişkenlerin dağılımı ile ilgili bu kısa açıklamadan sonra tekrar korelasyon kavramına dönebiliriz.

İki değişken arasındaki korelasyon yönlendirilmiş iki doğru parçası arasında kalan açı yardımıyla da ifade edilebilir. Yönlendirilmiş doğru parçalarına vektör denildiğini biliyoruz.

Şekil - 1 'in X_1 ve X_2 değişkenlerini temsil eden eksen vektörleri, aralarındaki açının kosinüsü (X_1, X_2) 'nin korelasyon katsayısına eşit oluncaya kadar birbirlerine yaklaştırılsın. Örneğin korelasyon katsayısı $r=0.60$ ise, X_1 ve X_2 vektörleri arasındaki açı 53° 07′ oluncaya kadar X_2 ekseni X_1 eksenine yaklaştırılsın (Şekil - 2).



Şekil - 2.

Yukardaki dönüşüm sonucu elde edilen yeni durumda, eksenler artık farklı bir nitelik kazanmaktadırlar. Bu nitelikteki eksenlere «test vektörleri» adı verilmiştir.

Test vektörleri arasındaki açı bakımından iki özel durum vardır.

a. Vektörler arasındaki açı 0° dir.

b. Vektörler arasındaki açı 90° dir.

(a). 0° lik bir açının kosinüsü bir olduğundan, birinci durumda iki vektör çakışacaktır, yani değişkenler arasında tam bir korelasyon mevcuttur.

(b). 90° lik bir açının kosinüsü sıfırdır, dolayısiyle ikinci durumda değişkenler arasında bir korelasyon yoktur. Bu takdirde vektörler ortogonal'dır denir.

Şekil - 2 'deki X_1 ve X_2 vektörleri eşit ve birim uzunlukta alınırsa $\overrightarrow{OC}$ vektörünün uzunluğu θ açısının kosinüsüne, yani değişkenlerin korelasyon katsayısına eşit olur. Bu sonuç faktör analizi bakımından önemlidir.

Yukarda verilen örnekte iki değişken arasındaki korelasyondan söz edildi. İki değişkenli bir problem faktör analizi bakımından ilginç değildir. Metot çok değişkenli problemler için geliştirilmiştir. Açıklamaların kolayca izlenebilir bir düzeyde tutulmasına çaba gösterildiğinden, çok değişkenli problemlere ait örnek üç değişken üzerinde tekrarlanılacaktır. Değişkenler X_1, X_2 ve X_3 olsun. Değişkenler arasındaki korelasyon matriksi aşağıya çıkarılmıştır.

	X_1	X_2	X_3
X_1	1	0.8109	0.1705
X_2		1	0.7412
X_3			1

X_1 ile X_2 arasındaki korelasyon X_2 ile X_1 arasındaki korelasyona eşit olduğundan matriksin alt tarafını yazmaya gerek yoktur. X - değişkenlerinin test vektörleri arasındaki açılar matriksi ise aşağıdaki gibidir:

	X_1	X_2	X_3
X_1	—	35° 49′	80 °11′
X_2		—	42° 10′
X_3			—

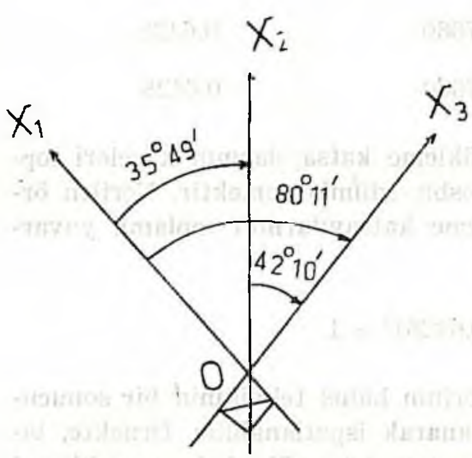
X - değişkenlerinin test vektörleri Şekil - 3 'te gösterilmiştir. Şekil - 3 üç boyutlu uzayda düşünülmelidir .Değişken sayısı 3 'ten fazla ise, söz konusu test vektörleri aynı düzlem veya aynı üç boyutlu uzay içinde kalmadıkça, bunların birbirlerine göre durumlarını gösterecek şekli çizme olanağımız yoktur.

Değişken sayısı arttıkça vektörlerin birbirlerine göre durumları karmaşık bir şekil arzedecektir. Böyle bir karmaşıklıktan kurtulma ve değişkenler sistemini daha az sayıda vektörlerle yeniden belirleme istek ve çabaları faktör analizinde bir çok tekniğin geliştirilmesine neden olmuştur. Bu tekniklerin esası «referans vektörleri» denen yeni vektörler bulmak ve test vektörlerini bu referans vektörlerine göre yorumlamaktır. Test vektörlerini yeniden tanımlamak için kullanılan referans vektörlerine «ortak faktör vektörleri» veya kısaca «faktör» denilmektedir.

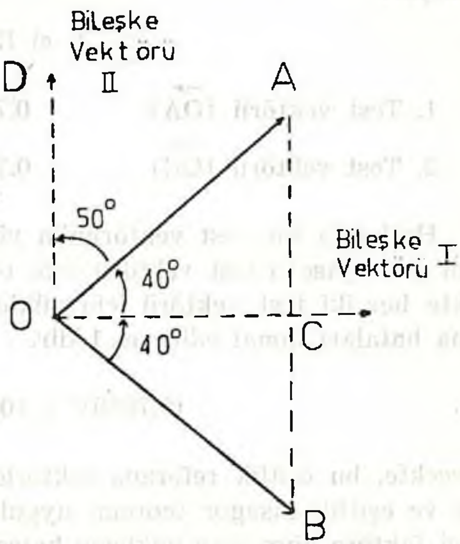
Bugün daha çok tarihsel değeri nedeniyle üzerinde durulan sentroid (veya ağırlık merkezi) metodu sözü edilen faktör analizi tekniklerinden biridir. Hesap işlemleri nispeten kısa olduğundan, bilgisayarların icadından önce, bazı yetersizliklerine rağmen, sentroid metot sık sık kullanılmıştır. Faktör analizinin bir çok kavramlarını açıklamakta kolaylık sağladığından, metot burada da kısaca tekrarlanılacaktır.

Sentroid metodun referans vektörü yarı açık şemsiyenin sapına benzetilebilir. Şemsiyenin telleri test vektörlerini temsil edecektir.

Sentroid metotta referans vektörlerinin bulunuşu önce iki değişkenli bir problem üzerinde açıklanmaya çalışılacaktır.



Şekil - 3.



Şekil - 4.

Aralarındaki açı 80° olan eşit uzaklıktaki $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörleri verilmiş olsun. Bu iki vektörün iç bileşkesi OC vektörü ile gösterilsin. Sentroid metotta ilk referans vektörü OC vektörü olmaktadır (Şekil - 4). $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörleri eşit uzunlukta alındıklarından $\vec{OC}$ vektörü AOB açısının açı ortayı olacak, dolayısiyle esas vektörlerin $\vec{OC}$ vektörüyle 40° lik açı yapacaklardır. Buna göre $\vec{OA}$ vektörünün $\vec{OC}$ ile yaptığı açının kosinüsü Cos 40° = 0.7660, $\vec{OB}$ vektörünün $\vec{OC}$ ile yaptığı açı Cos 40° = 0.7660 dır. Bu hesap tarzıyla, $\vec{OC}$ vektörüne referans vektörü diğer adıyla ortak faktör vektörü rolü verilmiştir. Faktör vektörü ile test vektörünün yaptıkları açının kosinüslerine yükleme katsayısı (Loading) denilmektedir. Uzayda bir test vektörünün belirlenmesi için uzay sayısı kadar referans vektörüne gerek olduğundan yukardaki örnekte ikinci bir referans vektörüne ihtiyaç vardır. Sentroid metotta ikinci referans vektörüne dik olarak alınan vektördür, yani ikinci referans vektörü test vektörlerinin dış bileşkesidir. Şekil - 4 'deki $\vec{OD}$ vektörü ikinci referans vektörü olmaktadır. $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörlerinin ikinci ortak faktöre göre yükleme katsayıları, sırasıyla Cos 50° = 0.6428 ve Cos 130° = −0.6428 dir. Yukardaki örneğe ait yükleme katsayıları toplu olarak aşağıda gösterilmiştir.

	1. ci Ref. Vek.	2. nci Ref. Vek.
1. Test vektörü ($\vec{OA}$)	0.7660	0.6428
2. Test vektörü ($\vec{OB}$)	0.7660	−0.6428

Herhangi bir test vektörünün yükleme katsayılarının kareleri toplamı 1 'e eşitse o test vektörü tam tesbit edilmiş demektir. Verilen örnekte her iki test vektörü için yükleme katsayılarının toplamı, yuvarlama hataları ihmal edilirse, 1 'dir.

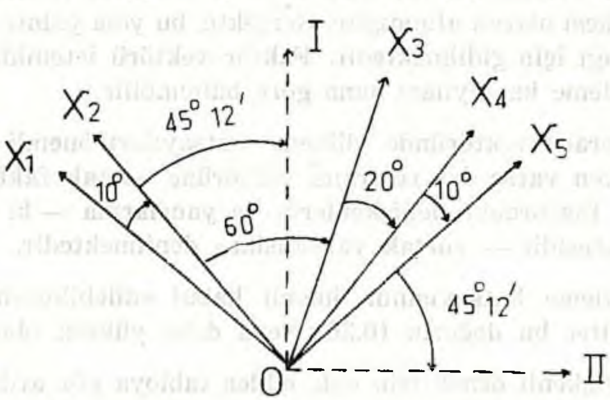
$$(0,7660)^2 + (0.6428)^2 = 1$$

Gerçekte, bu eşitlik referans vektörlerinin buluş tekniğinin bir sonucudur ve eşitlik Pisagor teoremi uygulanarak ispatlanabilir. Örnekte, birinci faktöre göre olan yükleme katsayıları daha yüksektir, yani birinci faktör daha iyi durumludur.

İki değişkenli halden çok değişkenli hale geçelim ve değişken sayımız 5 ve bunların korelasyon katsayıları aşağıdaki gibi olsun:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	—	0.9848	0.3420	0.0	−0.1736
X_2	10°	—	0.5000	0.1736	0.0
X_3	70°	60°	—	0.9397	0.8660
X_4	90°	80°	20°	—	0.9848
X_5	100°	90°	30°	10°	—

Tablonun alt tarafında verilen sayılar, kosinüsü tekabül ettiği değişkenlerin korelasyon kasayısına eşit açıları vermektedir. Test vektörleri, seçilen sun'i örnek nedeniyle, aynı düzlem içinde kaldıklarından, bir şekille gösterilebilirler. Beş test vektörünün birbirlerine göre konumları Şekil - 5 te verilmiştir. Test vektörlerinin ortak faktörlere göre tanımlanabilmesi için önce ortak faktörlerin bulunması gerekir. Santroid metotta I ci faktör test vektörlerinin bileşkesidir. Burada sözü edilen bileşkenin bulunmasındaki matematiksel tekniğe girmemek konuşmanın amacı bakımından büyük bir noksanlığa yol açmayacaktır. Bu konuda şu kadarını söylemekle yetinebiliriz: Test vektörleri bir uçları 0 noktasına bağlı eşit uzunlukta ipler olsun. Bu ipler eşit birer kuvvetle vektörler yönlerinde çekilirse 0 noktasının hareketi I ci ortak faktör vektörünü çizecektir. II ci faktör I ciye 0 noktasına dik olan vektördür.



Şekil - 5.

Test vektörlerinin I ci ve II nci faktörlere göre yükleme katsayıları aşağıya çıkarılmıştır. Parantez içindeki sayılar test vektörünün faktörle yaptığı açıyı göstermektedir.

	Faktör		
Test Vek.	I	II	Yüklemelerin kareleri toplamı
1	0.5707 (55° 12′)	−0.8211 (145° 12′)	1
2	0.7046 (45° 12′)	−0.7096 (135° 12′)	1
3	0.9668 (14° 48′)	0.2554 (75° 12′)	1
4	0.8211 (34° 48′)	0.5707 (55° 12′)	1
5	0.7069 (44° 48′)	0.7046 (45° 12′)	1
	2.9347	2.0653	= 5

Her test vektörünün iki faktöre göre yükleme katsayılarının kareleri toplamı 1 olduğuna göre test vektörleri faktör tarafından tam belirlenmişlerdir. I. ci faktöre göre olan yükleme katsayılarının kareleri toplamı II. ciye olan toplamdan büyüktür. Ayrıca, bu iki toplamın toplamı son sütunun toplamına, son sütunun toplamı da değişken sayısına eşittir. Bu eşitlikler ancak ideal durumlar için gerçekleşmektedir. Bu konuya ilerde tekrar değinilecektir. Ancak, bir noktaya dikkatlerinizi çekmek isterim. Her hangi bir test vektörünün faktörlerdeki yükleme katsayılarının kareleri toplamı 1 'dir. Bu sayısının kare kökü de 1 'dir. Hatırlanacağı gibi, test vektörlerini 1 birim uzunlukta almıştık.

Yukarda verilen her iki örnekte de I. ci faktör vektörü test vektörlerinin bileşkesi olarak alınmıştır. Gerçekte, bu yola yalnız hesap ve açıklama kolaylığı için gidilmektedir. Faktör vektörü istenildiği gibi seçilebilir ve yükleme katsayıları buna göre bulunabilir.

Bir referans vektöründe yükleme katsayıları önemli iki veya daha fazla değişken varsa bu referans vektörüne «ortak faktör» (Common factor), bu faktördeki değişkenlerin varyanslarına — ki yükleme katsayısının karesidir — «ortak varyanslar» denilmektedir.

Bir yükleme katsayısının önemli kabul edilebilmesinde kullanılan kaba bir kriter bu değerin (0.30) veya daha yüksek olmasıdır.

Beş değişkenli örnek için elde edilen tabloya göz atılacak olursa, I. ci faktördeki bütün yükleme katsayılarının önemli olduğu görülür. II. ci faktör de ortak faktördür. Zira, dört tane önemli yükleme katsayısı vardır.

Faktör analizinde, I. ci ortak faktörün mümkün olduğu kadar çok sayıda ortak varyansa sahip olması arzu edilir. II. ci ortak faktör geriye kalan ortak varyansların en çoğunu, III. cü faktör bunlardan da geriye kalan ortak varyansların en çoğunu v.b. ihtiva edecek şekilde belirlenirler, ta ki geriye hiç ortak varyans kalmasın.

Başlangıçta verilen faktör analizi modeline göre, bir testin varyansının iki öğeden oluştuğu kabul edilmektedir. Birinci öğe ortak varyans olup ikinci öğeye özgü varyans (unique variance) denilmektedir. Özgü varyansın yalnız ait olduğu değişkene has özelliklerinden ileri geldiği, dolayısiyle diğer değişkenlerle bir korelasyon göstermediği kabul edilir. Yalnız bir test için önemli yükleme katsayısı veren referans vektörüne özgü faktör adı verilmiştir. Özgü faktörü, yükleme katsayısı önemli olan değişkene yakın, diğer değişkenlere dik durumludur.

Teorik olarak, özgü varyans da spesifik ve hata varyansları denen iki elemana ayrılmaktadır. Yalnız bir değişkene has özellik veya özellikler spesifik varyansa yol açmaktadır. Ancak, bir değişkene has özellikler analize sokulmamış bazı değişkenlerde de bulunabilir. Bu değişkenlerin de analize alınması halinde, spesifik özelliklerin bu nitelikleri ortadan kalkar ve o değişkenin daha önceki spesifik varyansı ortak varyansa katılır. Buna göre, faktör analizinin yapısı analizde kullanılan değişkenlere bağlı olarak belirlenmektedir.

Değişken varyansının diğer elemanı hata varyansı (veya güvensizlik) değişkenleri tam ölçmemekten ileri gelmektedir. Değişkenin varyansı ile hata varyansı arasındaki fark değişkenin güvenirlik ölçüsü olmaktadır. Ancak, faktör analizi, özgü varyansı elemanlarına ayıramadığından güvenirlik ölçüsü de hesaplanamamaktadır.

Bir değişkenin varyansı, V_T, ortak varyansı V_{or} ve özgül varyansı V_{oz} ile gösterilecek olursa, yukardaki açıklamalara göre

$$V_T = V_{or} + V_{oz}$$

eşitliği vardır. Özgü varyansı, spesifik varyans V_s, hata varyansı V_H toplamı olduğundan, bu eşitlik

$$V_T = V_{or} + V_s + V_H \tag{3}$$

şekline girer. Faktör analizi modeli (n) tane faktör belirlenmiş ve bir değişkenin i 'inci faktördeki ortak varyansı — bu varyansın o faktördeki yükleme katsayısının karesi olduğu yukarda belirtilmişti — V_{oi} ise, değişkenin modeldeki ortak varyansı için

$$V_{or} = \sum_{i=1}^{n} V_{oi} \tag{4}$$

eşitliği vardır.

Faktör analizinde elde edilebilecek faktör sayısı, modele (n) değişken sokulmuş ise, her değişken için, ekstrem olarak 1 faktör, her özgü varyans için de 1 tane olmak üzere, en çok ($2n$) kadardır. Ancak, uygulamada hiç bir zaman bu sayıda faktör elde edilmemektedir.

Ortak varyans için elde edilen (4) eşitliği (3) ifadesinde yerine kor ve eşitliğin iki yanı V_T ile bölünürse (5) bağıntısı elde edilir:

$$1 = \frac{V_T}{V_T} = \frac{V_{01}}{V_T} + \frac{V_{02}}{V_T} + \cdots + \frac{V_{0n}}{V_T} + \frac{V_s}{V_T} + \frac{V_H}{V_T} \tag{5}$$

$$\frac{V_{oi}}{V_T} = C_i, \quad \frac{V_s}{V_T} = S, \quad \frac{V_H}{V_T} = H$$

konarak (5) eşitliği aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$1 = \Sigma\, C_i + S + H \tag{6}$$

(6) eşitliği faktör analizin modelinin temel ifadesidir.

Faktör analizinde, $\sum_{n=1}^{i} C_i$ terimine, yani bir değişkenin ortak faktördeki yükleme katsayılarının kareleri toplamına «komünalite» denilmekte ve (h^2) ile gösterilmektedir. (6) bağıntısından komünalite için

$$h^2 = 1 - (S + H) \tag{7}$$

ifadesi yazılabilir.

Değişkenlerarası korelasyonu yeniden belirtmek amacıyla referans vektörlerini bulmada kullanılan iki doğrusal model başlangıç kısmında verilmişti ((1) ve (2) No.lu ifadeler). Temel öğeler analizinde özgü varyansın olmadığı kabul edilmektedir. Referans vektörlerini bulmada yararlanılan korelasyon matriksinin esas köşegeni (*) üzerindeki katsayıların 1 olması modelde özgü varyansın olmadığı kabulünün sonucudur. Zira, korelasyon matriksinin esas köşegeni üzerindeki sayılar bir değişkenin ortak faktörlere dağılan ortak varyanslarının toplamıdır.

Daha önce verilen örneklere ait korelasyon matrikslerine tekrar dönelim. İlk yazılan matriksde esas köşegene 1 değerleri konmuştu; zira, bir değişkenin kendisi ile olan korelasyonun tam olacağı doğaldır. Faktör analizi bakımından bunun anlamı değişken tanımının hatasız yapıldığıdır. Daha sonraki korelasyon matrikslerinin köşegenleri üzerinde her hangi bir sayı gösterilmemiştir. Bilindiği gibi, bir değişkenin ortak varyansı yükleme değerlerinin kareleri toplamına eşittir. Buna aynı zamanda komünalite diyoruz. Komünalite 1 den küçükse bu takdirde modelde özgü varyansın varlığı kabul edilmektedir, dolayısiyle faktör analizi modeli seçilmiştir.

Komünalite 1 'e eşit değilse, korelasyon matriksinin köşegen değerleri ne olacaktır ve bunlar nasıl tesbit edilecektir sorusunu cevaplandırmak amacıyla bir çok yaklaşımlar ileri sürülmüştür.

Komünalitenin tayininde kullanılan, belki de en basit yol, korelasyon matriksinin o değişkene ait satırındaki en yüksek korelasyon katsayısını almaktır. Bunun için korelasyon matriksinin tamamı yazılır ve her değişken için komünalite değeri seçilir. Diğer basit bir yaklaşım, söz konusu değişkenin diğer $(n-1)$ tane değişkenle yaptığı korelasyonların aritmetik ortalamasını almaktır. Yüksek kapasite ve hızdaki bilgisayarların varlığı komünaliteyi çok daha iyi şekilde tayin edebilen teknikler kullanmayı mümkün kılmaktadır. Öte yandan, ampirik tespitlere göre, değişken sayısı 20'den fazla ise, komünalitenin şu veya bu şekilde hesaplanmasının faktörlerin belirlenmesini pek etkilemediği savunulmaktadır. Burada, dikkatlerinizi şu noktaya çekmek isterim. Faktör analizinde, analizde kullanılan değişkenler yardımıyle hesaplanmış bir değişken ayrı bir değişkenmiş gibi işleme sokulmamalıdır. Aksi halde bazı korelasyon değerleri yükselecek ve sun'i olarak ortak bir faktör bulunmuş olacaktır. Örneğin, çap ve boya göre hesaplanmış hacım bu tür analizlerde ayrı bir değişken değildir.

Buraya kadar yapılan açıklamaları bir örnek üzerinde toplu olarak tekrarlıyalım:

(*) Bir kare matriksin esas köşegeni matriksin sol üst başındaki terimi matriksin en alt sırasının en sağındaki terimine birleştirilen farazi doğrudur.

306 araştırma ünitesinin herbirinde sekiz değişkenin değerleri ölçülmüştür. Değişkenler arasındaki ikili korelasyon katsayılar tablosu aşağıya çıkarılmıştır.

Değişken	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	0.54	0.08	0.18	0.20	0.13	0.10	0.05
2		—	0.01	0.05	0.07	—0.01	0.08	—0.00
3			—	0.58	0.51	0.26	0.46	0.22
4				—	0.46	0.40	0.27	0.22
5					—	0.46	0.40	0.21
6						—	0.11	0.18
7							—	0.51

Bir korelasyon katsayıları tablosunun incelenmesinde önce güvenilir katsayılar belirlenir. Bunun için de, seçilen güvenirlik düzeyi ve serbestlik derecesine göre, kritik korelasyon katsayısı bilinen esaslara göre hesaplanır veya hazır tablolardan alınır. Ölçme sayısının 30'dan yukarı olmasına gayret edilmelidir. Zira, bundan küçük ölçme sayısı için hesaplanacak korelasyon katsayısının varyasyonu yüksektir.

Yukardaki örnekte, serbestlik derecesini yaklaşık 300 kabul edersek, % 1 güvenirlik için kritik korelasyon katsayısı 0.15 bulunur. Bu değere göre, tablonun birinci satırında üç güvenilir korelasyon katsayısı vardır ve bunların en büyüğü 1. ci ve 2. ci değişkenler arasındaki korelasyon katsayısıdır (0.54). İkinci satırda güvenilir katsayı yoktur. Diğer satırlardaki korelasyon katsayıları, 6. ile 7. arasındaki katsayı dışında (ki % 5 için bu katsayıda güvenilirdir), bütün değerler güvenilirdir. Bu durumda, değişkenler arasında bir gruplaşma olduğu düşünülmelidir.

Temel öğeler modelinde korelasyon matriksinin köşegen değerleri 1 alınıyordu. Analizde bu şekildeki bir korelasyon matriksi esas alınacak olursa, sekiz değişken olduğuna göre, sekiz faktör bulunacaktır. Ancak, bizim amacımız, sekiz değişkenin belirlediği yapıyı daha az boyutlu bir uzayda yeter yaklaşıklıkta tekrar ortaya koyabilmektedir. Bu nedenle analiz sonunda elde edilen faktörlerin genellikle ilk iki - üç tanesi yeterli görülür. Örneğimize ait korelasyon matriksinin ilk üç ortak faktörü aşağıya çıkarılmıştır.

Değişken	Ortak Faktör Yükleme Değerleri I	II	III	Komünalite h^2
1	0.3233	0.8150	—0.0103	0.7688
2	0.1696	0.8574	—0.1521	0.7870
3	0.7610	—0.1807	—0.0714	0.6169
4	0.7349	—0.0511	0.3046	0.6354
5	0.7694	—0.0199	0.2195	0.6402
6	0.5658	—0.0542	0.4871	0.5603
7	0.6582	—0.1373	0.5746	0.7824
8	0.5072	—0.1922	0.6202	0.6788
Karakteristik kök (Faktör varyansı)	2.8551	1.4937	1.1210	5.4698
Yüzde varyans	35,69	18,67	14,01	68,37

Bir değişkenin ortak varyansının o değişkene ait yükleme katsayılarının kareleri toplamı olduğunu biliyoruz. Analizdeki tanımın tam olması halinde ortak varyans 1'e eşittir. Ancak, biz daha az boyutlu uzayda yorum yapmanın kolaylığından yararlanabilmek için yukardaki örnekte bazı faktörleri ihmal ettik. Bu yüzden, değişkenlerin konümalite başlığı altında verilen ortak varyansları 1'den küçüktür $(1-h^2)$ miktarının özgü varyansı verdiği daha önce belirtilmişti. Bizim asıl bilmek istediğimiz değişkenin güvenirlik değeridir. Ancak, bu değer hesaplanamadığından özgü varyansı ile yetinmek zorundayız. Komünalite değeri 0,3 veya daha küçük, dolayısiyle özgü varyansı 0,7 veya daha büyükse, o değişken güvenirli kabul edilmemektedir.

Yukardaki faktör tablosunun alttan ikinci satırında gösterilen karakteristik köklerin elde edilişindeki matematiksel esasları bu açıklamada bir yana bırakabiliriz. Dikkat edilecek olursa, her karakteristik kök kendisinden sonra gelen kökten daha büyüktür. Bu doğal bir sonuçtur. Zira, temel öğeler metodunda her faktör veya referans ekseni, daha önceki eksenlere dik olmak şartiyle, toplumun geriye kalan varyansının mümkün olan en büyük payını üzerine alacak şekilde belirlenmektedir. Ayrıca, her karakteristik kök ait olduğu faktördeki yükleme katsayılarının kareleri toplamına eşittir.

Değişkenlerin tam olarak tanımlanması halinde, değişkenin toplam varyansı 1'e eşitti. Dolayısiyle, faktör analizinde gerçekleşebilecek azami varyans değişken sayısına eşit olacaktır. Böylece, faktörün bu azami varyansa katılma oranı, karakteristik kök değeri değişken sayısına bölünerek bulunabilir. Örneğimizde, birinci faktörün genel varyansa katkısı yüzde 35,69, ikinci faktörün katılma payı yüzde 18,67, üçüncü faktörün katılma payı yüzde 14,01 olup üç faktör birlikte genel varyansın yüzde 68,37 sini içermektedirler.

Bir değişkenin test vektörü olarak gösterilirken standart sapması uzunluk birimi olarak alınmıştı. Buna göre, karakteristik kökün kare kökü ait olduğu faktörün uzunluğunu verecektir.

Faktördeki bazı yükleme katsayıları (değişkenlerin faktörlerle yaptığı korelasyon katsayıları) eksi değerlere sahiptir. Gerçekte, yüklemenin aldığı işaret yorumu etkilememektedir. Zira, bir faktör daha önceki faktörlere dik olmak zorundadır, ancak faktörün yönünü istediğimiz şekilde seçebiliriz. Dolayısiyle aynı faktör üzerinde, yükleme katsayılarının işareti bu seçime göre belirlenecektir. Kesin bir kural olmamakla birlikte, faktörün yönü büyük yükleme katsayılarının işareti artı olacak şekilde tayin edilir.

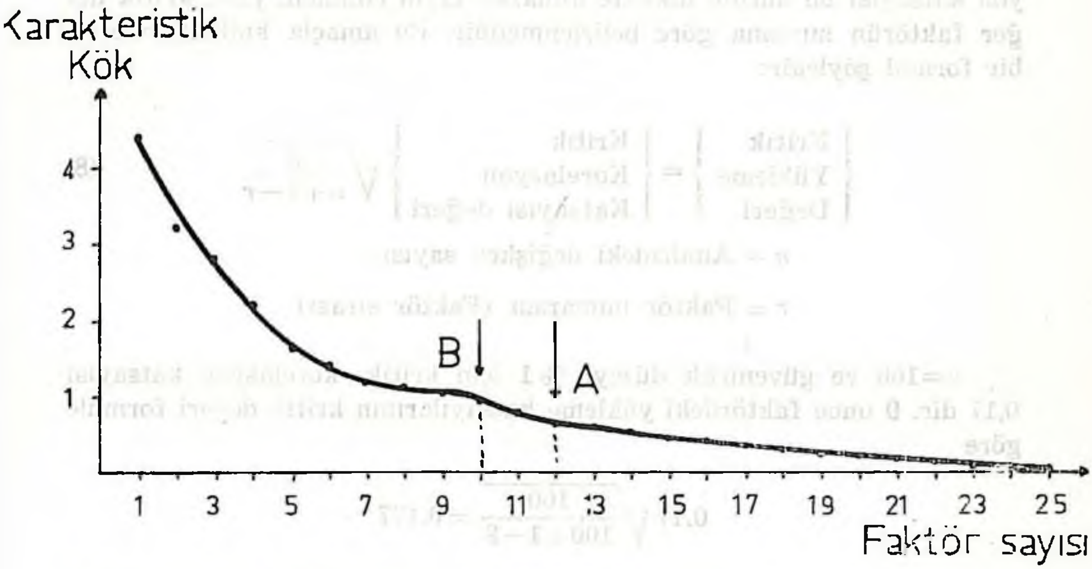
Daha önce, temel öğeler analizinde doğrusal dönüşümle değişken sayısı kadar referans ekseni elde edildiği, fakat bunlardan bir kısmının analizi dışında bırakıldığı ifade edilmişti. Burada cevaplandırılması gereken soru hangi nitelikteki faktörlerin terk edilebileceği ve bu hususta objektif bir kriter olup olmadığıdır.

Faktör analizinde hangi faktörlerin ihmal edilebileceği konusunda ortaya konan fikirler arasında tam bir uyum olduğu iddia edilemezse de farklılıkların ayrıntılarda kaldığı bir gerçektir. Teklif edilen kriterler daha ziyade ampirik karakterdedir. Burada, bir fikir verme düşüncesiyle iki kriterden söz edilecektir.

a. Birinci kriter Guttman tarafından teklif edilmiş, Kaiser adlı diğer bir araştırıcı tarafından kullanılır hale getirilmiştir. Bu kritere göre, karakteristik kökleri 1 'den büyük faktörler modele dahil edilmektedir. Kaiser kriteri temel öğeler analizine daha uygun düşmektedir. Bazı tesbitlere göre, özellikle değişken sayısı 20 ilâ 50 arasında ise kriter en güvenilir kriterdir. Değişken sayısı 20 den azsa kriter daha tutucu olmakta, yani modele sokulan faktör sayısı artmaktadır. 50 den fazla değişkenin bulunduğu problemlerde fazla sayıda faktör dışarda bırakılmaktadır.

b. İkinci kriter özgü varyanstan yararlanmaktadır. Temel öğeler analizinde köşegen değerlerini 1 almakla ortak varyanslar içinde özgü varyans paylarının da bulunabileceği kabul edilmektedir. Ortak varyansa katılma oranı faktör numarası arttıkça yükselmektedir. Özgü varyansın sözü edilen katılma oranının ciddi miktarlara ulaşmağa başladığı faktör tesbit edilebilirse, bundan sonra gelecek faktörler model dışı tutulabilirler. Bu esasa göre geliştirilen kritere «yamaç kırılım» testi (Scree test) denilmektedir. Kritere, teklif edene atfen Catell testi veya grafik test de denebilir. Bu usulde, karakteristik kökler, ait oldukları faktörün numarasına göre grafik eksenine taşınır. Elde edilen noktalar arasından geçirilen eğrinin kırılım gösterdiği faktörden sonra gelen faktörler ihmal edilmektedir.

Şekil - 6, 25 değişken için bulunmuş 25 faktöre ait karakteristik kökler, dik koordinat eksenlerine taşınarak elde edilmiştir. Şekildeki 10 uncu faktörün karakteristik kökü 1 olduğundan modele dokuz faktör alınacaktır. Grafik teste göre, eğri (A) noktasından itibaren doğrusal bir form kazanmaktadır. Eğrinin bu formu almağa başladığı yerdeki faktör sayısı, seçilmesi gereken azami faktör sayısını verecektir. Şekilde bu sayı onikidir.



Şekil - 6.

Modelde muhafaza edilecek faktörler verilen kriterlerden birine göre tesbit edildikten sonra, sıra bunların yorumlanmasına gelecektir. Faktörleri yorumlama faktöre güvenilir yükleme katsayıları ile katılan değişkenler yardımıyla yapıldığından, hangi yükleme katsayılarının anlamlı kabul edileceği hususunda bir objektif kritere ihtiyaç vardır. Teklif edilmiş birçok kriterden en tanınmış üç tanesi burada da tanıtılmağa çalışılacaktır.

1. Daha önce açıklandığı gibi, yükleme katsayıları değişkenlerle referans eksenleri arasındaki korelasyon katsayılarıdır. O halde, bir korelasyon katsayısının güvenilirliğini incelemede kullanılan testler yükleme katsayıları için de aynen kullanılabilir. Ancak, bu incelemede % 1 lik güvenirlik düzeyi tercih edilmelidir. Ölçme sayısı yüksekse, bu kriter ikinci olarak verilen kriter kadar seçici değildir.

2. Yükleme katsayısının karesi kendi faktörüne ait karakteristik kökünün % 10 veya daha fazlası ise, katsayı güvenilir olduğu kabul edilmektedir. Böylece, bu kritere göre, 0,3 'ten büyük katsayılar (Ölçme sayısı 50 'den az değilse) güvenilir nitelikte olmaktadırlar.

3. Daha önce açıklandığı gibi, özgü varyansın ortak varyanslara katılma oranı birinci faktörden uzaklaşıldıkça artmaktaydı. O halde, yükleme katsayısının güvenirliğini tesbitte kullanılacak kritik korelasyon katsayısı bu durum dikkate alınarak tayin edilmeli, yani, kritik değer faktörün sırasına göre belirlenmelidir. Bu amaçla kullanılabilecek bir formül şöyledir:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Kritik}\\ \text{Yükleme}\\ \text{Değeri}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Kritik}\\ \text{Korelasyon}\\ \text{Katsayısı değeri}\end{array}\right\} \sqrt{\frac{n}{n+1-r}} \qquad (8)$$

n = Analizdeki değişken sayısı

r = Faktör numarası (Faktör sırası)

n=100 ve güvenirlik düzeyi % 1 için kritik korelasyon katsayısı 0,17 dir. 9 uncu faktördeki yükleme katsayılarının kritik değeri formüle göre

$$0.17\sqrt{\frac{100}{100+1-9}} = 0.177$$

(8) formülü yardımıyla değişik örnek büyüklükleri (n) için, faktörlerin kritik yükleme değeri tabloları hazırlanabilir.

(n) sayısı azaldıkça kritik korelasyon katsayısı dolayısiyle kritik yükleme değeri de yükselmektedir.

Faktör Matriksinin Yorumlanması

Buraya kadar verilen tanımlar ve yapılan açıklamalardan anlaşılacağı gibi, faktör analizi istatistik bir metot olmaktan ziyade matematiksel niteliği ağır basan bir yöntemdir. Faktör analizi belirli bir varsayımın kontrolü yerine, söz konusu varsayımın kontroluna olanak sağlayan basitleştirilmiş bir modeli ortaya koymakda yardımcı olmaktadır.

Analiz yardımıyla değişkenlerarası yapıyı daha basit bir şekilde temsil eden modeli seçerken, bazı faktörler belirli bir kritere göre terk edilmektedir. Bazı durumlarda, analize sokulan değişkenlerden bazılarına ait ortak varyanslarının önemli bir kısmı terk edilen faktörlerde kalabilmektedir. Bu olay, söz konusu değişkenlerin toplumun genel niteliklerine ters düştükleri, dolayısiyle toplum içinde ayrı bir grup oluşturdukları hallerde ortaya çıkmaktadır. Bazı faktörlerin terk edilmesi toplumun içinde yer alan böyle grupların tanımlamayı engellemektedir.

Analize sokulan değişkenler bir faktörün zıt uçlarında yer aldıklarına göre, yükleme katsayılarının güvenilir olup olmadığı yanında, işaretleri de dikkate alınarak gruplara ayrılabilirler. Aynı düzeyde fakat zıt yönde etkili değişkenler bir faktörün uçlarına doğru kayarlar. Birinci tiptekiler kadar zıt nitelikte olmayan değişkenler ise bunların arasında bir yerde bulunacaklardır. Bu sıralanış değişkenleri sınıflandırmada kullanılabilmektedir.

Değişkenleri sınıflandırmada daha sistematik bir yol, değişkenleri araştırma konusuna göre gruplara ayırmak, gruplara giren değişkenlerin yükleme katsayılarının aynı alt topluma ait olup olmadıklarını varyans analizi ile kontrol etmektedir.

Tekrar edilecek olursa, faktör analizi değişkenlerarası korelasyonu en iyi şekilde tekrar belirleyen basitleştirilmiş model kurmaktadır. Araştırmaya esas olan varsayımların bu modele göre kontrolü, yani modelin yorumlanması araştırıcıya aittir. Faktördeki güvenilir yükleme katsayılarının olayın hangi yönünü yansıttığı, bir değişkenin faktörde bulunmasının ne anlama geldiğini yargılamak araştırıcının görevidir.

Faktörlerin Rotasyonu

Buraya kadar yapılan açıklamalarda faktör matriksi doğrudan doğruya korelasyon matriksinden elde edilmiştir. Faktörlerin bu şekildeki tayinine «direkt metot» denilmektedir. Direkt metot grubuna giren birçok çözüm teknikleri geliştirilmiştir. Direkt metotlardan bazıları başlangıçta komünalitenin hesabına ihtiyaç göstermekte, bazıları ise modele esas alınacak faktör sayısının tesbitini öngörmektedir.

Yukarda yapılan açıklamalarda kullanılan örneklerde dik koordinat eksenleri esas alınmıştı. Ancak, koordinatların dik olması zorunluluğunun bulunmadığına da işaret edilmişti.

Direkt metotta, değişkenlerin faktörleri üzerindeki konumları bakımından bazı sun'ilikler olabilmektedir. Örneğin, ikinci referans ekseni birinciye dik olmak, ayrıca değişkenlerin arasından geçmek zorundadır. Bu yüzden bazı yüklemelerin eksi işaretli olması doğaldır (*). Bu durum daha sonraki faktör vektörleri için de aynen tekrarlanmaktadır. Dolayısiyle, eksi yükleme katsayıları her zaman gerçek durumu yansıtmamaktadır. Bu nedenle, direkt çözüm sonuçları ile ayrıntılı yoruma gidilemez iddiası vardır.

Böylece, faktör analizi yardımıyla bir modelin izlenmesinde iki soru söz konusu olmaktadır.

— Alışılagelmiş dik koordinatlar, acaba her zaman yoruma en uygun modeli belirleyebilmekte midir?

— Matematiksel yönden eşdeğer başka modeller de aynı derecede kabul edilebilir, fakat içerik itibariyle değişik çözümler verebilmektedir. O halde, söz konusu olabilecek düzenler arasından hemen daima aynı çözümü verecek bir uzlaştırıcı model bulunabilir mi?

Bugün üzerinde anlaşılan husus direkt metotun değişkenlerarası yapıyı belirlemede yeterli olmadığıdır. Birçok problemlerde, referans eksenlerinin konumlarında yapılan düzenlemelerle direkt metotta karşılaşılan bazı belirsizlikler azaltılarak daha gerçekçi yorumlar yapma olanağı elde edilebilmektedir. İşte, referans eksenlerinin yeniden düzenlenmesine rotasyon denilmektedir. Rotasyondan sonra elde edilen yeni değerlere «türetilmiş çözümler» (derived solutions) denilmektedir.

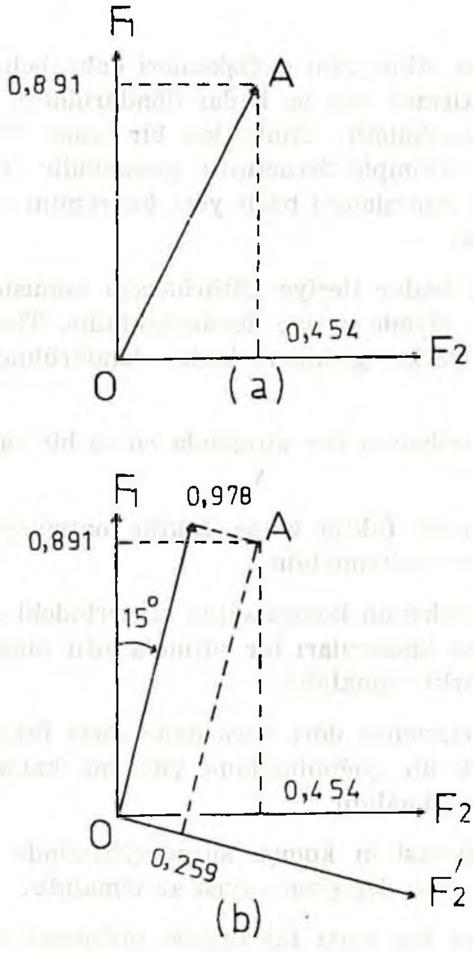
Rotasyonla İlgili Örnekler

Rotasyon, referans eksenlerinin orijin etrafında işlenen yeni bir konum elde edilinceye kadar döndürülmesidir. Rotasyonda, eksenlerin birbirlerine diklikleri muhafaza edilmişse, ortogonal rotasyon yapılmış de-

(*) Yükleme katsayılarından bir kısmının eksi işaretli olan faktörlere çift kutuplu faktörler denir.

mektir. Diğer bir rotasyon türü eğik (oblique) rotasyondur. Bu tür rotasyonda, eksenler arasındaki açı 90° den büyük veya küçük alınmaktadır.

Ortogonal rotasyonu bir örnekle açıklamaya çalışalım: Direkt çözümle elde edilmiş iki faktörümüz F_1 ve F_2 olsun (Şekil - 7.a). Değişkenin birinci faktörle olan yükleme katsayısı 0.891 (=Cos 27°), ikinci faktörle olan yükleme katsayısı 0.454 (=Cos 63°) dır. Şekildeki $\overrightarrow{OA}$ vektörü test vektördür. F eksenlerinin arzu edilen bir açı kadar (Örneğin 15°) O noktası etrafında ve aralarındaki diklik muhafaza edilecek şe-



Şekil - 7.

kilde döndürülmeleri halinde OA 'nın yeri değişmeyecektir. Buna karşılık, A noktasının eksenlerin yeri konumuna göre belirlenen yükleme değerleri birinci durumdan farklı olacaktır. Eksenler 15° lik açı kadar döndürüldüklerinden A 'nın F_1 'ne göre yükleme değeri 0.978, F_2 'ne göre değeri ise 0.208 dir. Bu değerler trigonometrik bağıntılar yardımıyla da hesaplanabilir. Her iki eksen konumuna göre yükleme katsayılarının kareleri toplamı, yuvarlamadan ileri gelen farklılık dışında, aynıdır, yani ortak varyans miktarı, rotasyon orijin etrafında yapılmışsa, referans eksenlerinin konumuna bağlı kalmamaktadır. Zira, bu dönüşümde OA test vektörünün yeri değişmemiştir. Ancak, ortak varyansın eksenlerdeki oranı farklıdır. Bu oran birinci eksene göre yükselmiş, ikinci eksene göre azalmıştır.

Eksenlerin daha etkin yani değişkenleri daha belirgin sınıflara ayıran bir konuma getirmek için ne kadar döndürülmesi gerektiğini tayinde bazı kriterler verilmiştir. Bunlardan bir tanesi Thurstone'un teklif ettiği «Basit yapı» (Simple Structure) prensibidir. Thurstone önceleri üç şart olarak ileri tanımladığı basit yapı kavramını sonraları beş şarta göre belirlemektedir.

Rotasyonun ne kadar ileriye götürüleceği konusunda Thurstone'un verdiği kriter daha ziyade seziye dayanmaktadır. Thurstone eksenlerin aşağıdaki beş şart yerine gelinceye kadar döndürülmesini teklif etmektedir. ,

1. Faktör matriksinin her sırasında en az bir tane sıfır bulunmalıdır.

2. (m) tane ortak faktör varsa, faktör matriksinin her sütununda en az (m) tane sıfır bulunmalıdır.

3. Faktör matriksinin komşu sütun çiftlerindeki değişkenlerden çoğunluğunun yükleme katsayıları bir sütunda sıfır oluyorsa diğer komşu sütunda sıfırdan farklı olmalıdır.

4. Faktör matriksinde dört veya daha fazla faktör (sütun) varsa, değişkenlerin büyük bir çoğunluğunun yükleme katsayıları komşu sütun çiftlerinde sıfır olmalıdır.

5. Faktör matriksinin komşu sütun çiftlerinde yükleme katsayıları sıfırdan farklı olan değişken sayısı az olmalıdır.

Thurstone'un bu beş şartı faktörlerin birbirleri ile korelasyon göstermediği yani eksenlerin ortogonal durumlu olduğu durumlar için göz önünde tutulmalıdır.

Rotasyonun ulaşmak istediği durum değişkenler arası yapıyı tek bir faktörle açıklamaktır. Ancak, şimdiye kadar böyle bir rotasyon gerçekleştirilememiştir. Basit yapı prensibi bu amaca bir yaklaşım olmaktadır.

Rotasyon sonunda bir faktöre olan yükleme katsayılarının değeri yükselirken bazılarının değerinde azalma olacaktır. Yükleme katsayısının yüklemesi değişkenin faktörü belirlemedeki payının arttığına, dolayısiyle o faktöre kendi özelliklerini kazandırdığına işarettir.

Yukarda iki değişkenli bir problem için verilen rotasyon örneğini çok değişkenli bir problem üzerinde tekrarlayalım.

305 araştırma ünitesi üzerinde sekiz değişken ölçülmüştür. Bu değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları tablosu aşağıdaki gibidir:

Değişken	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	0.846	0.805	0.859	0.473	0.398	0.301	0.382
2		—	0.881	0.826	0376	0.326	0.277	0.415
3			—	0.801	0.380	0.319	0.237	0.345
4				—	0.436	0.329	0.327	0.365
5					—	0762	0.730	0.629
6						—	0.583	0.577
7							—	0.539

Bu korelasyonun matriksi yardımıyla belirlenen faktör matriksi (direkt metot) ise şöyledir:

Değişken	F_2	F_2	F_3
1	0.856	—0.324	0.838
2	0.848	—0.412	0.889
3	0808	—0.409	0.821
4	0.831	—0.342	0.808
5	0.750	0.571	0.889
6	0.631	0.492	0.640
7	0.569	0.510	0.583
8	0.607	0.351	0.492
Karakteristik kök	4.449	1.510	5.959 Toplam

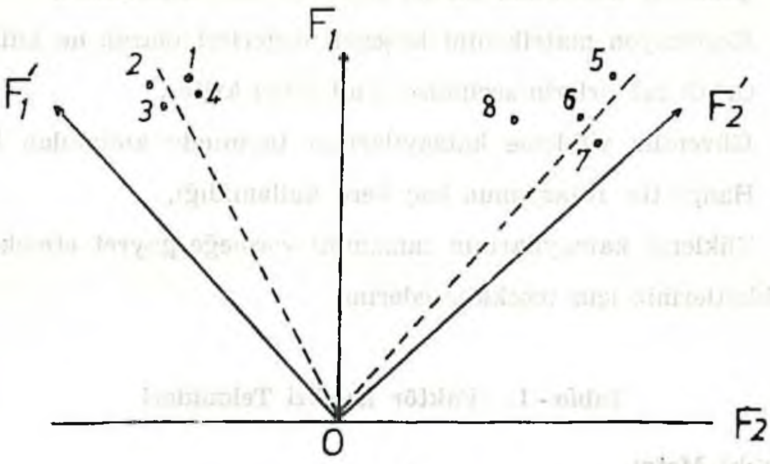
Faktör matriksinde yükleme katsayılarının hepsi mutlak değerce 0.3 dan büyüktür. İkinci faktör beklenildiği gibi, çift kutupludur (bipolar). Güvenilir yükleme katsayılarının bu kadar çok sayıda olması faktörlerin yorumunu güçleştirmektedir. Bu güçlüğü. bir ölçüde de olsa, hafifletmek için eksen rotasyonuna baş vurabiliriz.

Yukarda verilen faktör matriksinden görüleceği gibi, özellikle 5, 6, 7 ve 8 Nolu değişkenlerin her iki eksendeki yükleme katsayısı değerleri birbirine yakındır, dolayısiyle ilk dört değişkenin birinci eksendeki yüklemelerini artıracak şekilde bir rotasyona gidilmesi halinde, ikinci eksenin birinciye dik olması zorunluluğu yüzünden son dört değişkenin yükleme katsayıları arasındaki benzerlik ortadan kaldırılamıyacaktır. Bu yüzden rotasyon uzlaştırıcı bir konuma kadar sürdürülmesi gerekir. Bu sınırlama altında yapılan rotasyon sonunda elde edilen yeni yükleme katsayıları aşağıya çıkarılmıştır.

Değişken	F_1	F_2	h^2
1	0.853	0.332	0.838
2	0.906	0.261	0.889
3	0.874	0.237	0.820
4	0.846	0.302	0.807
5	0.175	0.926	0.888
6	0.140	0.788	0.641
7	0.082	0.760	0.584
8	0.216	0.667	0.492
Karakteristik kök	3.132	2.827	5.959

Beklenildiği gibi, rotasyon sonunda komünalite değerleri değişmemiştir. Basit yapı kriterinin şartları belirgin bir şekilde yerine getirilememişse de değişkenler arasındaki kümeleşme açıkça ortaya konabilmiştir. Gerçekte, bu örnek için, eğik rotasyonun daha etkin eksen konumu vereceğine işaret etmek isterim (Şekil - 8).

Ortogonal rotasyonun, yukardaki örnekte olduğu gibi, her zaman tatmin edici faktör matriksi ortaya koyamaması başka rotasyon şekillerinin aranmasına yol açmış ve eğik rotasyon bir alternatif olarak kullanılmaya başlanmıştır. Eğik rotasyonda da, ortogonal rotasyon için verilen kriterler, eksenlerin dikliği dışında, aynen kullanılmaktadır. Bununla birlikte, eğik rotasyon faktör matriksinin yorumlanmasında karşılaşılan karmaşıkları ortadan kaldırabilmiş değildir. Bu yüzden hangi tür rotasyonun kullanılması gerektiği araştırıcının geçmişteki deneylerine ve problemin özelliğine göre kararlaştırılmalıdır.



Şekil - 8

Bugün genel kanı, faktör analizinde birden fazla faktör çözümünün yapılması gerektiği yönündedir. Bu şekilde, faktörlerin «Sağlamlığı» nın kontrol edilebileceği ileri sürülmektedir. Sağlamlılıktan kasıt, çözüm tekniğine bağlı olmaksızın aynı nitelikteki faktörün hemen daima elde edilebilmesidir. Aynı probleme çeşitli çözüm teknikleri uygulanarak sonuçlarda en çok elde edilen faktörlerin, varsayımları kontrolda ortak bir dayanak olarak alınması faktör analizinin başarısı yönünden tavsiye edilmektedir.

Başlangıçta çizilen sınırlamalar karşısında, faktör analizi konusunda yapmak istediğim açıklamalar buraya kadar anlatılanlardan ibarettir. Bunlara ek olarak, faktör analizinde kullanılan çözüm teknikleri hakkında çok genel bir fikir verebilmek amacıyla, Tablo - 1 hazırlanmıştır.

Faktör analizi hesaplarının yapılmasında kullanılan bazı hazır bilgisayar programları vardır. Kaliforniya Üniversitesinde hazırlanmış BMD08M kod nolu program ile IBM 'in SSP (Scientific Subroutine Pavkage) benim tanımaya fırsat bulduğum iki paket programdır. Faktör Analizi üzerine yazılmış ve benim sizlere sağlık verebileceğim eser Harry H. Harman'ın «Modern Factor Analysis» adlı kitabıdır.

Sözlerimi bitirmeden önce, faktör analizinin kullanıldığı bir araştırmanın faktör matriksini verirken, aşağıdaki altı noktanın da dikkate alınmasını tavsiye edeceğim.

a. Çözümde kullanılan direkt metodun kısa açıklaması,

b. Korelasyon matriksinin köşegen değerleri olarak ne kullandığı,

c. Ortak faktörlerin seçiminde kullanılan kriter,

d. Güvenilir yükleme katsayılarının tayininde kullanılan kriter.

e. Hangi tür rotasyonun kaç kere kullanıldığı,

f. Yükleme katsayılarının tamamını vermeğe gayret etmek.

Dikkatleriniz için teşekkür ederim.

Tablo - 1. Faktör Analizi Teknikleri

A. Direkt Metot

Aa. Komünalitenin tayinini gerektiren çözümler,

— Temel öğeler metodu (Principal Component)
— Sentroid metodu (Centroid solution)
— Temel - Faktör metodu (Principal - Faktör solution)
— Üçgensel Çözümleme metodu (Triangular decomposition)

Ab. Ortak faktör sayısının önceden belirlenmesini gerektiren çözümler,

— Maksimum olasılık metodu (Maximum likelihood solution)
— Minres metodu, (Minres Solution)
— Çok gruplu metot (Multiple group solution)
— Basit Faktör Modelleri

1. Tek faktörlü model
2. Çift faktörlü model

B. Türetilmiş Çözümler veya Çok Faktörlü Çözümler

— Binormamin tekniği
— Biquartimin tekniği
— Kovarimin tekniği
— Direkt oblimin tekniği
— Oblimaks tekniği
— Eğik çok faktörlü çözüm

— Quartimaks tekniği
— Quartimin tekniği
— Subjektif teknik
— Varimax tekniği

FAYDALANILAN ESERLER

CHILD, D. : 1973. The Essentials of Factor Analysis, Holt, Rinehart and Winston, London.

COOLEY, H. W. - P. R. Lohnes : 1971. Multivariate Data Analysis, John Wiley & Sons Inc.

HARMAN, H. H. : 1967. Modern Factor Analysis (2. Rev. Ed.), Univ. of Chicago Press.