

SERİ
SERIE A

CİLT
TOME XXIV

SAYI
FASCICULE II

1975

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ

ORMAN FAKÜLTESİ
DERGİSİ

REVUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES FORESTIÈRES
DE L'UNIVERSITÉ D'ISTANBUL



AYNALI GÖNYELER ÜZERİNE BİR İNCELEME

Yazan

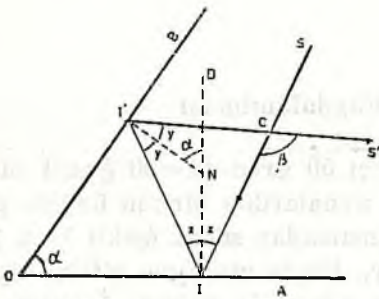
Prof. Dr. Kemal ERKİN

Bilindiği üzere aynalı gönyeler, arazi üzerinde dikaçıkları saptamağa yarıyan aletlerdir. Aynalı gönyeler konusu, bütün ölçme bilgisi kitaplarında yer almış bulunan bir konudur. Fakat bu konu, bu kitaplarda derinliğine incelenmiş görülmemektedir. Bu yazının amacı, aynalı gönyelerin, ölçme bilgisi kitaplarında genellikle sözkonusu edilmeden inceliklerini belirtmek, konuyu teorik olarak derinliğine incelemektir.

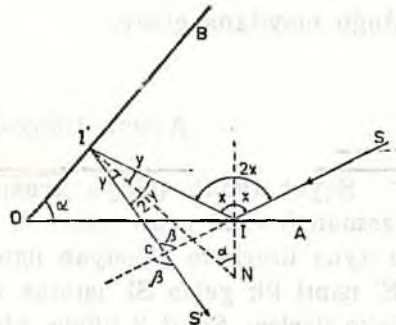
Aynalı Gönyelerin Prensibi

Aynalı gönyelerin prensibi, bütün elemanter fizik kitaplarının optik konusunda yer alır. Bu, çok basit bir prensiptir:

«OA ve OB gibi iki ayna birbirleriyle α açısı yapıyorsa, OA aynası üzerine gelen bir SI ışını, yansıma yasasına göre II' ve I'S' doğrultularında yansır. Son yansıyan I'S' ışınının doğrultusu ile SI doğrultusu arasındaki β açısı, aynalar arasındaki açının iki katıdır (Şekil 1).»



Şekil 1



Şekil 2

Gerçekten I ve I' noktalarındaki IN ve I'N nomalleri arasındaki açı ile aynalar arasındaki açının kenarları dik ve yönleri de aynıdır. O halde:

$$1) \quad \widehat{I'ND} = \widehat{AOB} = \alpha \quad \text{dır.}$$

Diğer taraftan yansıma yasasına göre IN ve I'N nomalleri, seyreden ışınların I ve I' noktalarında meydana getirdikleri açıların açıortaylarıdır. II'N üçgeninde α , dışaçı olduğundan :

$$2) \quad \alpha = x + y$$

dir. Aynı nedenle II'C üçgeninde :

$$3) \quad \beta = 2x + 2y = 2(x + y)$$

dir. (2) ile (3) karşılaştırılınca :

$$4) \quad \beta = 2\alpha \quad \text{olur.}$$

Şayet SI ışını OA aynası üzerine fazla eğik geliyorsa, o zaman ışınların seyri şekli 2 deki gibidir. Yine kenarları dik ve aynı yönde olduklarından :

$$5) \quad \widehat{INI'} = \widehat{AOB} = \alpha$$

dir. II'N üçgeninde x dışaçı olduğundan :

$$6) \quad \alpha = x - y$$

dir. II'C üçgeninde $2x$ dışaçı olduğundan :

$$7) \quad \beta = 2x - 2y = 2(x - y)$$

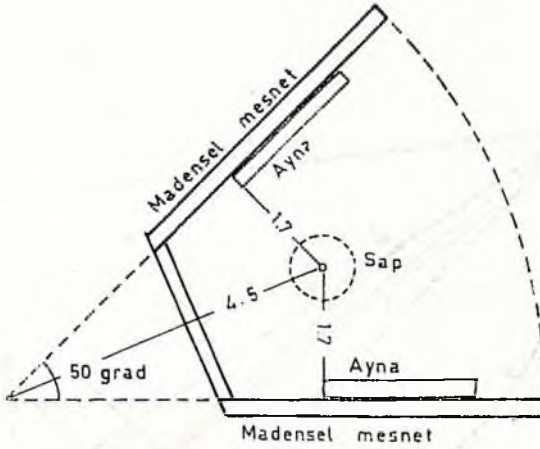
dir. (6) ile (7) karşılaştırılınca :

$$8) \quad \beta = 2\alpha$$

olduğu meydana çıkar.

Aynalı Gönyelerden Faydalanılması

Şayet aynalı gönye arasındaki açı 50 grad ($\alpha = 50$ grad) olursa o zaman $\beta = 100$ grad olur. O zaman aynalardan birinin üstüne gelip iki ayna üzerinde yansıyan ışın son yansımadan sonra (şekil 1 ve 2 de I'S' ışını) ilk gelen SI ışınına dik olur. Böyle bir ayna çiftine aynalı gönye derler. Şekil 3 böyle bir aynalı gönyenin gerçek boyutları ile bir kesitini göstermektedir. Bu şekilde yapılmış bir aynalı gönye ile arazi üzerinde dikaçılar, veyahut başka bir deyimle, birbirine dik doğrular tesbit etmek mümkündür.



Şekil 3

Aynalı Gönyede Işınlardan Seyri ve Görüntülerin Oluşması

A noktasına dikilmiş bir jalonun bir aynalı gönye ile gözlemlendiğini düşünelim (şekil 4). 1 numaralı ayna, A jalonunun A' gibi bir görüntüsünü verecektir. A' görüntüsü göreydir ve 1 numaralı aynanın düzlemine nazaran A'nın simetriğidir. A dan 1 No'lu ayna üzerine gelen ışınlar o suretle yansır ki uzantıları A' den geçsin. Örneğin AI ışını I' doğrultusunda o suretle yansır ki I' nün uzantısı A' den geçsin.

Keza 2 No'lu ayna için olaylar, sanki A' nde bir ışın kaynağı varmış gibi geçecektir. Dolayısıyla bu ayna A' den A'' gibi bir görüntü verecektir. A'' görüntüsü 2 No'lu aynanın düzlemine nazaran A' nün simetriğidir. 2 No'lu ayna üzerinden yansıyan bütün ışınların uzantısı A'' den geçecektir. Dolayısıyla II' ışını A'I'G doğrultusunda yansıyacaktır. A dan gelen AI ışını ile son yansıyan I'G ışını D noktasında kesişirler ve bu noktada bu iki ışın arasındaki açı bir dikaçdır.

DA'' doğrultusunda yere bir jalon saplıyalım (M jalonu ile A' görüntüsünü çakıştırmak suretiyle). Jalonun saplandığı nokta M olsun. Şeyet D noktasından idirilen çekülün arazi üzerinde gösterdiği nokta yine D ile gösterilirse, arazi üzerindeki \widehat{ADM} açısı bir dikaç olmuş olur. Veyahut AD doğrusuna D noktasından DM dike çıkarılmış olur.

Bu nokta, gözü A' ye birleştiren doğrunun daireyi kestiği noktadır.

D sabit olmadığına, dolayısıyla bu noktanın yeri belirli olmadığına göre, bu noktadan indirilen bir çekülün arazi üzerinde tesbit edilmiş bulunan bir P noktasından geçmesini sağlamak olanaksız gibi görünmektedir. Aynalı gönyelerin bu gün piyasada bulunan şekillerinin çoğunluğunda da gerçekten bu olanaksızdır.

Bugünkü aynalı gönyelerin hemen hemen hepsinde, gönyenin altında bir sap vardır. Çekül bu sapın ucundaki bir çengele asılır (Şekil 3 ve 4). Arazi üzerindeki nokta P ise, çekülün bu noktadan geçmesi sağlanır. Biraz yukarıda açıklanan işlem yapılarak arazi üzerine DI' doğrultusunda bir jalon saplanmış olsun. Evvelce M ile gösterilen jalonun saplanma noktasının bir an için A' ile çakıştığını düşünelim. APA' açısı dik açısı olarak kabul edilir. Başka bir deyimle PA' doğrusu PA ya dik kabul edilir.

Teorik olarak bu, şüphesiz doğru değildir. $A'P$ nin daireyi kestiği nokta C olsun. APC diküçgeninde P bir dışa açısıdır. O halde:

$$9) \quad P = 100 + \alpha$$

dır. Demek oluyor ki hata, α dır. APC diküçgeninde:

$$10) \quad \sin \alpha = \frac{PC}{AP} = \frac{PC}{d}$$

veyahut α çok küçük olduğundan

$$11) \quad \alpha = \frac{PC}{d} \text{ radyan}$$

$$12) \quad \alpha' = \rho' \frac{PC}{d} = \frac{20000}{\pi} \cdot \frac{PC}{d} \text{ grad dakikasıdır.}$$

Hatanın büyüklüğü hakkında bir fikir edinebilmek için 12 sayılı eşitlikteki miktarlara gerçeklere uygun değerler verelim. Örneğin $PA = d = 20$ m. alalım (gönyenin A jalonuna mesafesi). $PC = 1$ cm. kabul edelim (şekil 3 teki gerçek boyutlar gözönüne alınırsa PC nin bu civarda — hatta daha küçük — bir değer alabileceği kolaylıkla anlaşılır). O zaman:

$$13) \quad \alpha' = \frac{20000}{\pi} \cdot \frac{1}{2000} = \frac{10}{\pi} \approx 3'$$

Görülüyor ki hata, ihmal edilebilecek kadar küçüktür. O halde P sapının, gözün durumuna göre, ilk gelen ve ikinci defa yansıyan

ışınların D gibi kesim noktalarında bulunmasına pratikte pek lüzum yoktur.

Problem biraz daha derince incelenirse, teorik olarak hatanın, her zaman α ya eşit olmadığı görülür. Hatanın α ya eşit olabilmesi için yere saplanan M jalonunun A' görüntüsünün bulunduğu noktada olması gerekir. Uygulamada bu, genellikle gerçekleşmez. Bu nokta, DA'' doğrusu üzerinde bazan DA'' nün dışında (şekil 4 de görüldüğü gibi M noktasında), bazan da DA'' arasında M' gibi bir noktada bulunur.

Örneğin nokta M de bulunursa, arazi üzerinde tesbit edilen açı \widehat{MPA} dir. Şekil 4 de kolaylıkla görüleceği gibi:

$$(14) \quad \widehat{MPA} = \widehat{A'PA} + \epsilon = 100 + \alpha + \epsilon$$

dir. Hata $\alpha + \epsilon$ dir. Bu hata, biraz evvel hesaplanan hatadan ϵ kadar büyüktür. Keza bu nokta M' de bulunursa, arazi üzerinde tesbit edilen açı $\widehat{M'PA}$ dir. Şekil 4 ten:

$$(15) \quad \widehat{M'PA} = \widehat{A'PA} - \epsilon' = 100 + \alpha - \epsilon'$$

olduğu anlaşılır. Bu sefer hata $\alpha - \epsilon'$ dür. Bu hata, evvelce hesaplanan hatadan hatadan ϵ' kadar küçüktür.

Ancak ϵ ve ϵ' açıları hesaplanan α hatası yanında çok küçük hatalardır. Nazara bile alınmaması gerekir. Onun için P sapının bulunduğu yer dolayısıyla husule gelen açı hatası daima ihmal edilecek kadar küçük kalır.

Bu hatanın ihmal edilmesi için başka bir neden daha vardır: Bu neden, konmadan ileri gelen hatadır. Gönyelerde herhangi bir noktaya konma, genellikle çekülle yapılır ve bu iş gönye elde tutularak gerçekleştirilir. Bir taraftan elin titremesi, diğer taraftan rüzgârın etkisi düşünülürse bu koşullar altında sıhhatli bir konma yapılamıyacağı kolaylıkla anlaşılır. Bu konmada birkaç santimetrelilik bir hatayı daima gözönüne almak lâzımdır. En iyimser varsayımla konmada 2 sm. lik bir hata yapıldığı kabul edilirse bu, 20 m. lik bir mesafede:

$$(16) \quad \beta' = \frac{2}{2000} \cdot \frac{20000}{\pi} = \frac{20}{\pi} = 7'$$

grad dakikalık bir hataya karşıt olur. Sapın D noktasında bulunmamasından doğan α hatası (ki yapılan örnek hesapta 3 grad dakikası ola-

rak bulunmuştur), bu hatanın yanında çok küçük kalır. O zaman toplam hata olarak:

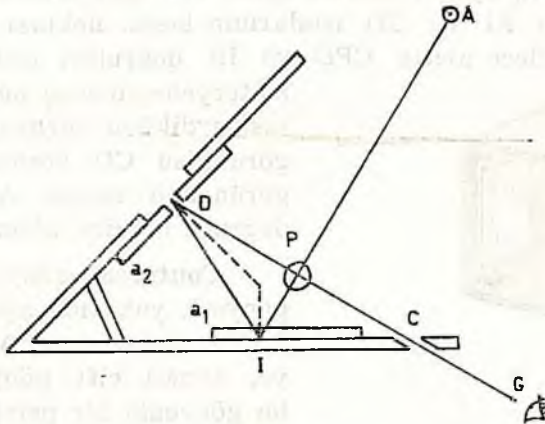
$$17) \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} < 8'$$

grad dakikası bulunur. Görülüyor ki bu haliyle bile hata ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

Aynalı Gönyelerde kesin doğruluk sağlama çabaları

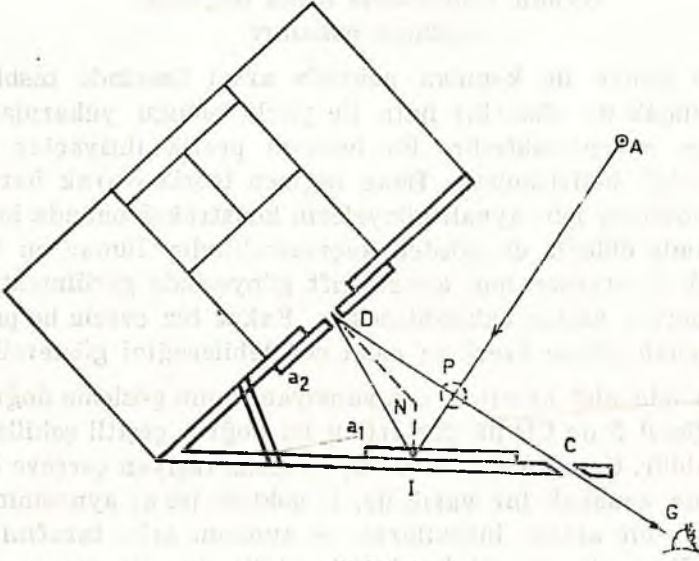
Aynalı gönye ile konulan noktada arazi üzerinde tesbit edilen dik açının -küçük de olsa- bir hata ile yüklü olduğu yukarıda yapılan açıklamadan anlaşılmaktadır. Bu hatanın pratik ihtiyaçlar için hiç önemli olmadığı belirtilmiştir. Buna rağmen teorik olarak hatasız dik açı tesbit edilmesi için aynalı gönyelerin konstrüksiyonunda bazı çabalar sarfedilmiş olduğu da gözden kaçmamaktadır. Bunun en karakteristik örneği Coutureau nun aynalı çift gönyesinde görülmektedir. Bu gönyeden ileride kısaca bahsedilecektir. Fakat biz evvela bu problemin basit bir aynalı gönye üzerinde nasıl çözülebileceğini gösterelim:

Bunun için alet üzerinde son yansıyan ışının gözleme doğrusu tesbit edilir. Şekil 5 de CD ile gösterilen bu doğru, çeşitli şekillerde gerçekleştirilebilir. Örneğin C noktası a_1 aynasını taşıyan çerçeve kısmının C noktasında açılacak bir yarık ile, D noktası ise a_2 aynasının D noktasında sırsız bir aralık bırakılarak ve aynanın arka tarafını görmek olanağı sağlanmak suretiyle belirlenebilir (ancak bunun için a_2 aynasını taşıyan çerçevenin bu kısımda aynanın arkasını serbest bırakacak ufak bir pencere şeklinde açık olması gerekir).



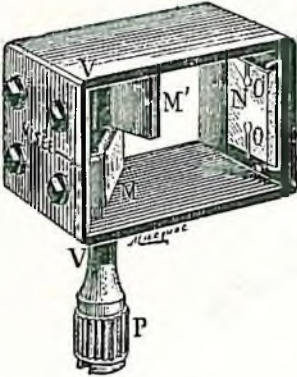
Şekil 5

Kişisel düşüncemize göre bu gözleme doğrusunu şu şekilde de oluşturmak mümkündür (şekil 6). a_2 aynasının üstünde genellikle çerçevede açılmış bulunan dikdörtgen şeklindeki pencerenin uygun bir yerine düsey doğrultuda bir kıl germek suretiyle C aralığı ve ortasında bir kıl gerili bulunan bu çerçeve ile gerçek bir diopter düzeni meydana getirilebilir. Bu suretle gözlemleri daha rahat bir şekilde yapmak mümkün olur.



Şekil 6

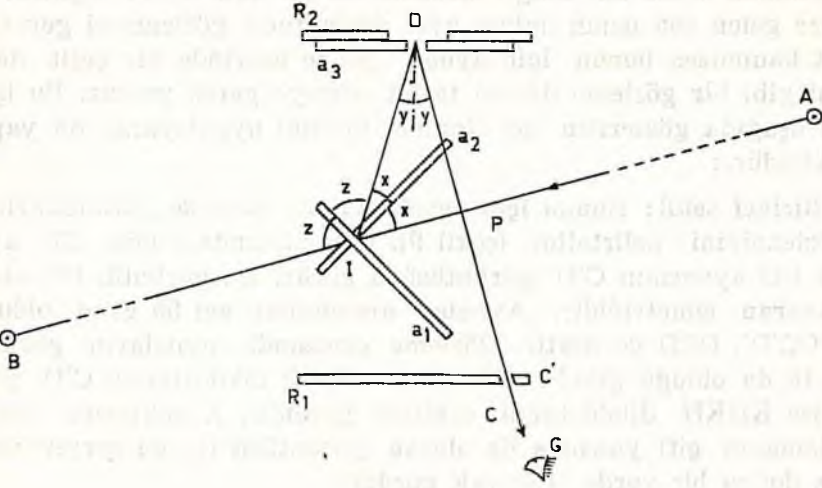
CD gözleme doğrusu tesbit edilince a_2 aynasının üzerine gelen ID ışını, dolayısıyla a_1 aynası üzerine gelen AI ışını otomatikman tesbit edilmiş olur. Sap AI ve CD ışınlarının kesim noktası P nin altına tesbit edilir. Böylece alette CPD ve IP doğruları tesbit edilmiş ve materyelleştirilmiş bulunur. A noktasına dikilen herhangi bir jalonun görüntüsü CD gözleme düzeninde görüldüğü zaman A noktası, IP doğrusu üzerine alınmış demektir.



Şekil 7

Coutureau gönyesi: Coutureau gönyesi, yukarıda açıklanan sistem üzerine yapılmıştır. Aslında bu gönye, aynalı çift gönyedir. Şekil 7 bu gönyenin bir perspektif resmini, şekil 8 ise gönyenin şematik bir kesitini göstermektedir.

Şekil 8 de görüldüğü gibi Coutureau gönyesi, birbirine dik ve üst üste konmuş a_1 , a_2 aynaları ile, onlarla 50 gradlık bir açı yapan ve



Şekil 8

çerçevenin R_2 yüzüne tesbit edilmiş bulunan a_3 aynasından bileşiktir. CD gözleme doğrusu, C noktasında çerçevenin madensel R_1 yüzünde açılmış bir aralıkla a_3 aynasının D noktasında ve yaklaşık olarak a_1 , a_2 aynalarının merkezleri hizasında sırlanmamış olarak bırakılan iki göz veya iki aralık ile oluşturulmuştur. Coutureau gönyesinin bazı tiplerinde C aralığı mevcut olmayıp gözleme çerçevesinin R_1 yüzünün C' kenarı ile yapılmaktadır. Bu düzenle a_1 , a_3 aynaları A tarafındaki, a_2 , a_3 aynaları ise B tarafındaki noktaları gözliye bilen iki gönye elde edilmiştir. CD gözleme doğrultusunda herhangi bir A veya B noktasının gözlenebilmesi için gönyenin o duruma getirilmesi lâzımdır ki AI (veya BI) doğrultusu PI ile çakışsın. Bu böyle olunca A ve B noktalarına dikilmiş jalonların görüntüleri CD gözleme doğrultusunda görüldüğü zaman otomatik olarak :

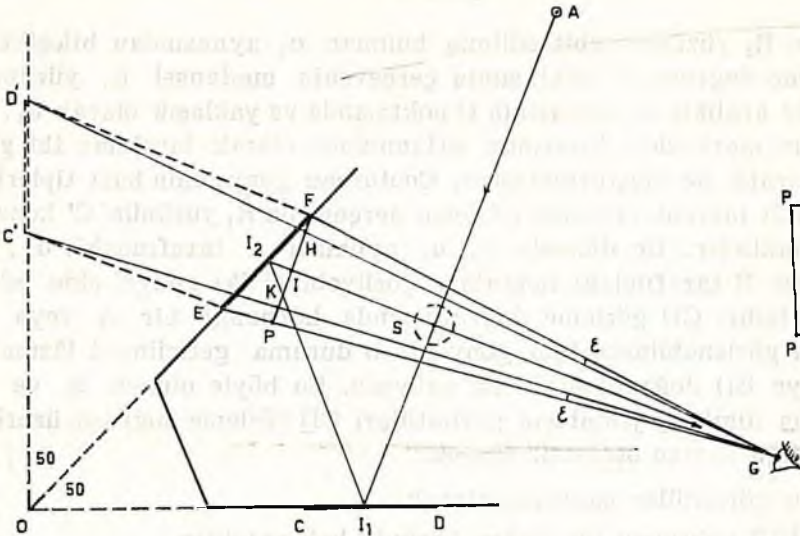
- Bu görüntüler çakışmış olacak,
- APIB noktaları bir doğru üzerinde bulunacaktır.

Işınlardan seyri, şekil 8 de açıkça gözükmektedir.

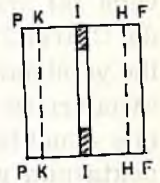
Aynalı gönyelerde teorik olarak kesin doğruluğu sağlamak için başka olanaklar: Teorik kesin doğruluğu sağlamak için, hangi şekilde olursa olsun, aynalı gönyeler üzerinde bir gözleme düzlemi tesbit etmek gerek filama görüntülerinin ayna içinde, gerekse dolaysız olarak çıplak

gözle görülmesi gereken filamanın gözlenmesini zorlaştırır. Gerçekten özellikle çıplak gözle gözlenecek filamayı üçüncü ayna üzerinde açılmış bulunan sırsız bir deliğin arkasından görmek rahat değildir. Gerçi göze gelen son ışının daima aynı doğrultuda gözlenmesi gereklidir. Fakat kanımızca bunun için aynalı gönye üzerinde bir çeşit diopter düzeni gibi bir gözleme düzeni tesbit etmeye gerek yoktur. Bu işi örneğin aşağıda gösterilen şekillerden birisini uygulayarak da yapmak mümkündür. :

Birinci şekil: Bunun için evvela aynalı gönyede görüntülerin nasıl gözlendiğini belirtelim (şekil 9). G noktasındaki göz, EF aynası içinde CD aynasının C'D' görüntüsünü görür. Bu görüntü, CD nin EF ye nazaran simetriğidir. Aynalar arasındaki açı 50 grad olduğuna göre OC'D', OCD ye diktir. Gözleme esnasında aynaların görünüşü, şekil 10 da olduğu gibidir. EF aynası FPPF dikdörtgeni, C'D' görüntüsü ise KHKH dikdörtgeni şeklinde görünür. A noktasına dikilmiş bir filamanın çift yansıma ile oluşan görüntüsü ise bu çerçevenin ortasına doğru bir yerde II olarak görünür.



Şekil 9



Şekil 10

Şimdi, gözleme yapılırken göz kararı ile fakat çok kolaylıkla FPPF aynası içinde KHKH görüntüsünü ortalamak mümkün olabileceği gibi filamanın görüntüsünü de bu çerçevelerin ortasına almak olanaklıdır. O zaman $HF = PK$, $IP = IF$ olacaktır. Bu durum gerçekleştiği zaman ışınların alacağı seyir şekil 9 da gösterilmiştir. Şekildeki ϵ açıları birbirine eşittir. Son yansıyan I_2G ışını EGF açısının açı or-

Aynalı gönyenin hareketleri ve bu hareketlerin sonuçları

Gözlemeler yapılırken aynalı gönye elde tutulur. Üçayak üstüne konmaz. Bu koşullar altında aynalı gönyenin sabit kalabilmesine olanak yoktur. (Görüntüyü bir filama ile çakıştırmak için gönyeye verilen büyük ölçüdeki hareketler burada gözönüne alınmamaktadır). Elle tutulan gönye azçok kımıldar veya kımıldatılır. Bu hareketler acaba görüntü oluşumunu, görüntü yerini ne şekilde etkiler? Bu hususta bazı literatürde pek de doğru olmayan bilgilere rastlanmaktadır. Örneğin E. Thiéry'nin Instruments Topographiques adlı eserinde bu konu ile ilgili olarak şu satırlar yer almaktadır (sahife 172): «şurasını belirtelim ki, ve bu çok önemli bir noktadır, elin hareketleri sonunda gönyenin yer değiştirmesi, görüntünün yönünü değiştirmez. Gerçekten şurası açıktır ki gönye bir miktar döndürülse bile çift yansıma tabii ışınlar, devamlı olarak yine birbirine dik kalacaklardır.»

Prévot'nun çok değerli iki ciltlik Topographie adlı eserinin Instruments adlı birinci cildinde, bir kaç kelime değişikliği ile, hemen hemen aynı cümleler yer almıştır (sahife 199). Diğer ölçme bilgisi kitabınının büyük çoğunluğunda ise bu hususlara hiç yer verilmemiştir.

Elin ufak hareketleri neticesinde görüntülerin hareket miktarları (tabii hareket ettikleri takdirde) çok küçüktür. Yukarda sözü geçen yazarların görüntülerin yönlerinin değişmediklerini söylemeleri, büyük bir olasılıkla, bu özellikden ileri gelmektedir. Biz dahi öğretim yaşamımızda öğrencilerimize çift yansıma ile oluşan görüntülerin kımıldamadıklarını, kımıldayan görüntülerin tek yansıma ile oluşmuş görüntüler olduğunu ve gözlemlere elverişli olmadığını söylemekteyiz (özellikle ikizkenar üçgen şeklindeki prizmalarda). Işın derinliğine inmeyişişimizin nedeni (var oldukları hallerde) bu kımıldama miktarlarının çok küçük olmasıdır.

Ancak konu derinliğine incelenerek teorik gerçeklerin aydınlığa çıkarılmasında fayda vardır. Gerçekten, biraz aşağıda görüleceği gibi, gönyeye verilen harekete göre görüntü bazan kımıldamamakta, bazan ise kımıldamaktadır. Gönyenin sözkonusu olabilecek hareketleri şunlardır :

- A — Rotasyon (dönme)
- B — Translasyon (öteleme)
- C — Gelişigüzel hareket.

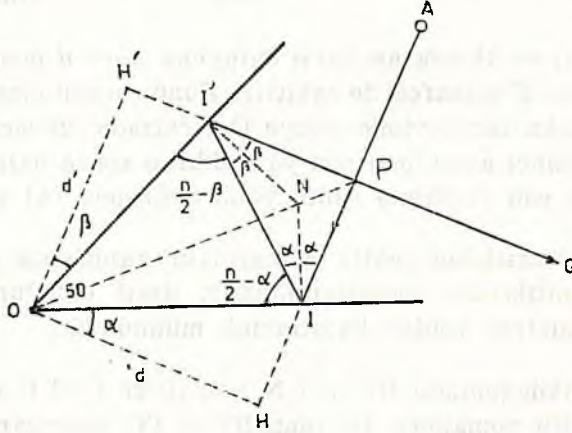
Şurasını hemen belirtelim ki bu hareketler esnasında gönyenin ayna yüzeylerinin düşey kaldığı varsayılmaktadır.

A — Rotasyon (Dönme)

Sözkonusu dönme, düşey bir eksen etrafında dönmedir. Burada özellikle ayna yüzeylerinin arakesiti etrafındaki dönme incelenecektir. Bu inceleme sonunda aydınlığa çıkarılan özellik şudur :

«Gönye, ayna yüzeylerinin arakesiti etrafında döndürüldüğü zaman ilk aynaya gelen belirli (durumu değişmeyen) bir ışın için son yansıyan ışın da sabittir, yani bu ışının da durumu değişmez.»

Birinci kanıtlama şekli : Gönyede ayna düzlemlerinin arakesiti O olsun (şekil 13). Sabit olduğunu kabul ettiğimiz AI ışını gözönüne



Şekil 13

alalım. Son yansıyan ışın I'G olsun. Bilindiği üzere bu ışın AI ya diktir. O noktasının AI ve IG ye mesafeleri $OH = d$ $OH' = d'$ olsun. $d = d'$ olduğunu kanıtlayalım.

Bir taraftan yansıma yasası, diğer taraftan çizim sonucu OHPH' şeklinin bir dikdörtgen olduğu gözönünde tutularak şekil 13 deki açıların değerlerini kolaylıkla hesaplamak mümkündür. Bu değerler şeklin üzerine yazılmıştır. OHI ve OH'I' diküçgenlerinde:

$$18) \quad d = OI \cdot \cos \alpha$$

$$19) \quad d' = OI' \cdot \cos \beta$$

dır. Bu eşitlikler taraf tarafa bölününce:

$$20) \quad \frac{d}{d'} = \frac{OI}{OI'} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

bulunur. Diğer taraftan OII' üçgeninde:

$$21) \quad \frac{OI}{OI'} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

dır. $\frac{OI}{OI'}$ nün değeri (20) içinde yerine konunca :

$$22) \quad \frac{d}{d'} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = 1 \quad \text{çıkar. O halde :}$$

$$23) \quad d = d' \quad \text{dür.}$$

AI ışını ve O noktası sabit olduğuna göre d mesafesi, dolayısıyla ona eşit olan d' mesafesi de sabittir. Bunu sonucu olarak OHPH' karesi sabittir. Başka bir deyimle gönye O etrafında dönerse belirli AI ışını birinci ve ikinci ayna üzerinde yansdıktan sonra daima P noktasından geçer ve bu son yansımış ışının yönü değişmez (AI ya dik).

İkinci kanıtlama şekli: Yukarıdaki kanıtlama şeklinde trigonometrik bağıntılardan yararlanılmıştır. $d = d'$ olduğunu daha basit bir şekilde geometrik yoldan kanıtlamak mümkündür.

I'P diküçgeninde IN ve I'N nomalleri I ve I' içaçılarının açıortaylarıdır. Bu nomallere dik olan IO ve I'O doğruları I ve I' noktalarındaki dışaçıların açıortaylarıdır. Bunların kesim noktası O dur. Bilindiği üzere P noktasındaki içaçının açıortayı da aynı noktadan geçer. Başka bir deyimle OP doğrusu P noktasındaki içaçının açıortayıdır. O halde :

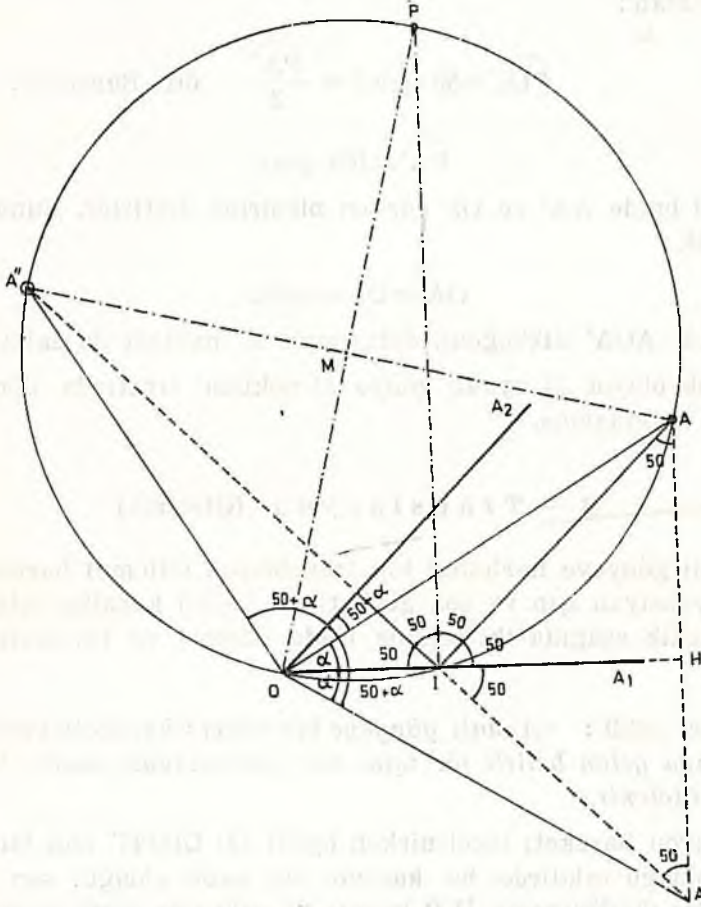
$$24) \quad d = d' \quad \text{dür.}$$

Üçüncü kanıtlama şekli: Bilindiği üzere A noktasından çıkan bütün ışınlar, son yansımalarını yaptıktan sonra, bunların uzantıları A" gibi bir noktadan geçer (çift yansıma görüntüsü). Aynalı gönye O noktası etrafına döndüğü zaman, son yansıyan ışınların durumları değişmediğine göre, çift yansıma görüntüsü A" de sabit kalır, kımıldamaz (şekil 13 ve 14).

Gönye O noktası etrafında döndüğü zaman son yansıyan ışınların sabit kalması özelliği ile, çift yansıma görüntüsü A" nün sabit kalması özelliği, eşdeğer özelliklerdir. Bunlar birbirinin sonuçlarıdır. Bu üçüncü şekilde doğrudan doğruya A" nün sabit kaldığı kanıtlanacaktır.

A' ve A" görüntüleri şekil 14 de görülmektedir. A' görüntüsü, A nın A₁ aynasına nazaran, A" ise A' nün A₂ aynasına nazaran simetridir. Bu simetriler dolayısıyla AI ve A'A" doğrularının oluşturduğu 50 şer gradlık açılar, şekil 14 de gösterilmiştir. Bu duruma göre AIA"

açısı bir dikağdır ve I noktası çapı AA'' olan M dairesinin üzerindedir. Yine bu simetri dolayısıyla O noktasındaki açıların almış olduğu değerler şekil üzerinde belirtilmiştir :



Şekil 14

$$25) \quad \widehat{A'OA_2} = \widehat{A''OA_2} = 50 + \alpha$$

$$26) \quad \widehat{AOA_2} = 50 - \alpha$$

dir. Buradan :

$$27) \quad \widehat{A''OA_2} + \widehat{A_2OA} = \widehat{A''OA} = (50 + \alpha) + (50 - \alpha) = 100 \text{ grad}$$

bulunur. $\widehat{AOA''}$ açısı bir dikaçı olduğuna göre O noktası da M dairesi üzerindedir. A_1 aynasına I noktasındaki IP nomali ile OMP doğrusu M dairesi üzerinde P noktasında kesişirler. Zira \widehat{OIP} bir dikaçıdır. Diğer taraftan :

$$28) \quad \widehat{PIA''} = 50 \text{ grad} = \frac{\widehat{PA''}}{2} \quad \text{dır. Buradan :}$$

$$29) \quad \widehat{PA''} = 100 \text{ grad}$$

bulunur. O halde AA'' ve OP çapları birbirine diktirler. Bunun bir sonucu olarak :

$$30) \quad OA'' = OA = \text{sabit}$$

dir. O halde AOA'' diküçgeni, dolayısıyla A'' noktası da sabittir.

Demek oluyor ki aynalı gönye O noktası etrafında dönerse, A'' görüntüsü kılmıdamaz.

B — T r a n s l a s y o n (Öteleme)

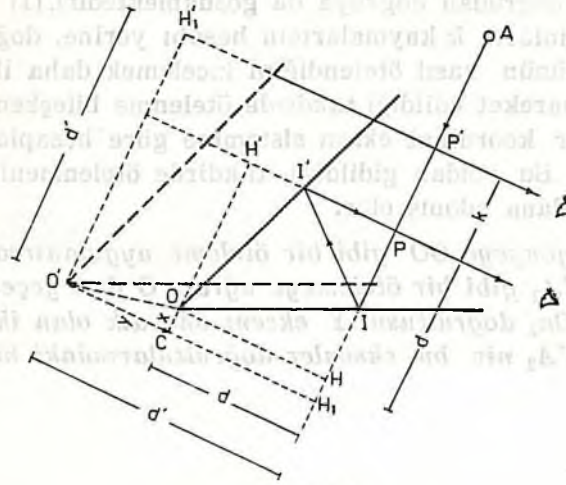
Aynalı gönyeye herhangi bir translasyon (ötleme) hareketi verilirse son yansıyan ışın ve son görüntü de belirli kurallar içinde ötelenir. Bu özellik aşağıda iki şekilde ifade edilmiş ve iki şekilde kanıtlanmıştır.

Birinci şekil : «Aynalı gönyeye bir ötleme hareketi verilirse, birinci aynaya gelen belirli bir ışın, son yansımadan sonra belirli bir miktarda ötelenir.»

Rotasyon hareketi incelenirken (şekil 13) OHPH' nün bir kare ve AI sabit olduğu takdirde bu karenin de sabit olduğu, son yansımış ışının ise bu dikdörtgenin H'P kenarı ile çakıştığı görülmüştü.

Aynalı gönyeye OO' ötleme hareketi verildiği zaman (şekil 15) AI ışını sabit kaldığı takdirde O'H₁P'H₁ karesi sabittir ve son yansımış ışın H₁P' ile çakışmaktadır. Bu demektir ki I'P ışını PP' = k kadar ötelenmiştir. O dan geçen birbirine dik iki eksen gözönüne alalım. X eksenini, değişmez olduğunu varsaydığımız AI doğrusuna paralel ve bu eksen üzerinde pozitif yön OH' olsun. Y eksenini X eksenine dik, üzerindeki pozitif yön CO' yönü olarak alınsın. O' noktasının bu eksenlere göre koordinatları x ve y ile gösterilirse :

31) $k = \overline{PP'} = \overline{PH} + \overline{HH_1} + \overline{H_1P'} = -d + x + d' = d' - d + x$



Şekil 15



Şekil 16

diğer taraftan :

32) $\overline{CO'} = \overline{CH_1} + \overline{H_1O'} = \overline{H_1O'} - \overline{H_1C} = d' - d = y$

dir. Bu değer (31) içinde yerine konunca :

33) $k = y + x$

bulunur. Demek oluyor ki öteleme miktarı, O' noktasının sözü geçen eksenlere nazaran koordinatlarının toplamına eşittir.

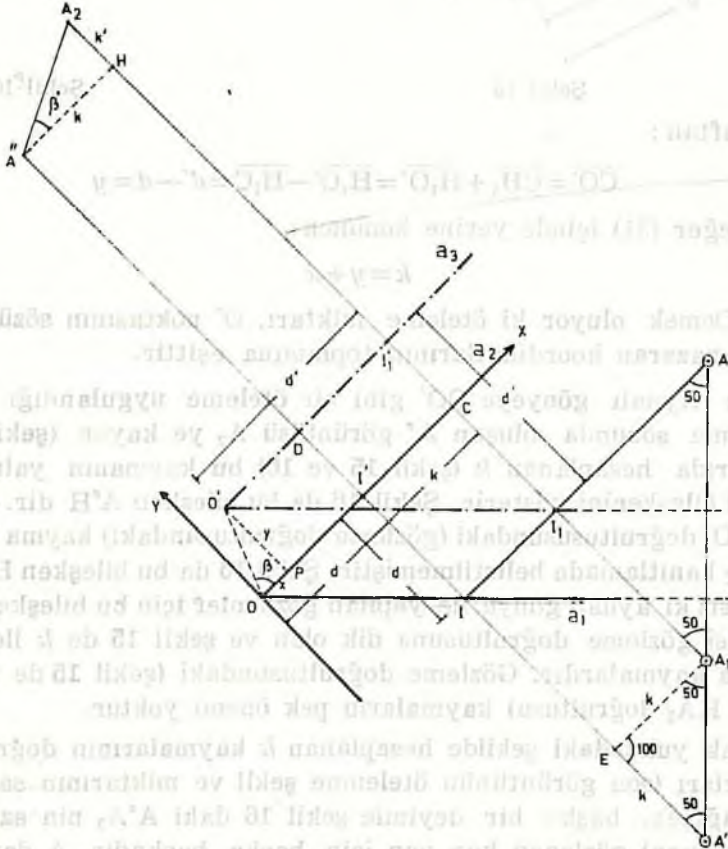
Not: Aynalı gönyeye OO' gibi bir öteleme uygulandığı zaman çift yansıma sonunda oluşan A' görüntüsü A₂ ye kayar (şekil 16 ve 17). Yukarıda hesaplanan k (şekil 15 ve 16) bu kaymanın yalnız OH' yönündeki bileşkenini gösterir. Şekil 16 da bu bileşken A'H dir. OH' ye dik olan CO' doğrultusundaki (gözleme doğrultusundaki) kayma bu açıklamada ve kanıtlamada belirtilmemiştir. Şekil 16 da bu bileşken HA₂ dir. Hiç şüphesiz ki aynalı gönye ile yapılan gözlemler için bu bileşkenlerden en önemlisi gözleme doğrultusuna dik olan ve şekil 15 de k ile gösterilen yana kaymalardır. Gözleme doğrultusundaki (şekil 15 de CO', şekil 16 da HA₂ doğrultusu) kaymaların pek önemi yoktur.

Ancak yukardaki şekilde hesaplanan k kaymalarının doğrultuları ve miktarları (son görüntünün ötelenme şekli ve miktarının sabit kalmasına rağmen, başka bir deyimle şekil 16 daki A'A₂ nin sabit kalmasına rağmen) gözlenen her ışın için başka başkadır. A dan çıkan AI ışınlarının durumlarına göre C noktası çapı OO' olan, H noktası ise çapı A'A₂ olan bir daire üzerinde hareket eder. Bu hareket sonu-

cunda x ve y dolayısıyla $k=x+y$ miktarlarının da değişeceği tabiidir (şekil 16 da k nin değiştiği doğrudan doğruya da gözükmektedir). (1)

Bu şekilde münferit ışınların k kaymalarının hesabı yerine, doğrudan doğruya son görüntünün nasıl ötelendiğini incelemek daha ilginçtir. Ayrıca bu şekilde hareket edildiği takdirde ötelenme bileşkenlerini sabit sayılabilecek bir koordinat eksen sistemine göre hesaplamak mümkün olmaktadır. Bu yoldan gidildiği takdirde ötelenmenin ikinci şekildeki ifadesi meydana çıkmış olur.

İkinci şekil: Aynalı gönyeye OO' gibi bir öteleme uygulanırsa, çift yansıma görüntüsü, A^*A_2 gibi bir ötelemeye uğrar. O dan geçen ve X eksenini a_2 aynasının Oa_2 doğrultusu, Y eksenini ona dik olan iki eksen gözönüne alınırsa, A^*A_2 nin bu eksenler doğrultularındaki bileşkenleri:



Şekil 17

(1) Bu nedenledir ki şekil 16 daki $k=A^*H$, şekil 17 deki $k=A^*H$ değildir. Zira bu kaymalar başka başka AI ışınlarına tekabül eden ötelemelerdir.

$$k = y + x$$

$$k' = y - x$$

dir. x ve y değerleri O' noktasının sözü geçen eksenlere nazaran koordinatlarıdır.

Gerçekten varsayalım ki O aynalı gönyesine OO' gibi bir öteleme uygulanmıştır. A noktasına dikilmiş bir filamanın gönye içinde oluşan görüntüleri şekil 17 de gösterilmiştir:

O gönyesinde: A' görüntüsü, A nın OI düzlemine nazaran, A'' görüntüsü A' nün OI' düzlemine nazaran simetriğidir. O halde:

$$34) \quad A'I' = I'A'' \quad \text{dür.}$$

O' gönyesinde: A_1 görüntüsü A nın $O'I_1$ düzlemine nazaran, A_2 görüntüsü A_1 rin $O'I_1$ düzlemine nazaran simetriğidir. O halde:

$$35) \quad A_1I'_1 = I'_1A_2 \quad \text{dir.}$$

Şekilde oluşmuş 50 gradlık açılarının değerleri, açılarının aralıklarına yazılmıştır. Bu değerlerin kanıtlanmasına lüzum görülmemiştir. $A'A_1E$ ikizkenar diküçgeninde:

$$36) \quad A'E = A_1E = k \quad \text{dır.}$$

Başlangıç noktası O olmak üzere X eksenini OI' ile çakışan, Y eksenini ona dik ve her iki eksen üzerinde pozitif yönler oklarla gösterilmiş olan bir eksen sistemi ele alalım. O' noktasının bu eksenlere nazaran koordinatları x ve y olsun. Şekil 17 üzerinde kolaylıkla görülebileceği gibi:

$$37) \quad k = \overline{I'C} = \overline{I'O} + \overline{OP} + \overline{PC} = -d + x + d' = d' - d + x$$

veyahut $I_1I'_1$ doğrusu üzerinde:

$$38) \quad d' - d = y \quad \text{olduğuna göre:}$$

$$39) \quad k = y + x = \overline{A''H}$$

bulunur. Bu $A''A_2$ ötelenmesinin X eksenini doğrultusundaki bileşkenidir. Diğer taraftan:

$$40) \quad \overline{A_1C} = \overline{EI'} = \overline{A'I'} - \overline{A'E} = \overline{A'I'} - k$$

$$41) \quad \overline{I'_1A_2} = \overline{A_1I'_1} = \overline{A_1C} + \overline{CI'_1} = \overline{A_1C} + y = \overline{A'I'} - k + y$$

$$42) \quad \overline{DA''} = \overline{I'A''} - \overline{I'D} = \overline{A'I'} - y$$

$$43) \quad k' = \overline{HA_2} = \overline{I'_1A_2} - \overline{DA''} = (\overline{A'I'} - k + y) - (\overline{A'I'} - y) = 2y - k$$

ve nihayet (39) gözönünde tutulunca:

$$44) \quad k' = 2y - (y + x) = y - x$$

bulunur. k' değeri, $A''A_2$ ötelemesinin Y doğrultusundaki bileşkenidir. Bu suretle $A''A_2$ ötelemesinin, nasıl alındığı yukarıda belirtilmiş olan sabit iki eksen doğrultularındaki bileşkenleri, gönyeye uygulanan ötelemenin aynı eksnelere nazaran apsisi ve ordinatlarının bir fonksiyonu olarak hesaplanmış bulunmaktadır.

Çift yansıma görüntüsü ötelenmesinin mutlak değeri ve yönü: Yukarıda aynalı gönyenin OO' ötelenmesinden doğan çift yansıma görüntüsüne ait $A''A_2$ ötelemesinin bileşkenleri hesaplanmıştır. Fakat bu ötelemenin kendi değeri ve yönü de ilgi çekicidir.

a) $t' = A''A_2$ değerinin hesabı: $A''A_2H$ diküçgeninden (Şekil 17):

$$45) \quad t'^2 = \overline{A''A_2}^2 = \overline{A''H}^2 + \overline{HA_2}^2 = k^2 + k'^2 = (y+x)^2 + (y-x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$46) \quad t' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2}$$

elde edilir. $OO'P$ diküçgeninde ise:

$$47) \quad x^2 + y^2 = \overline{OO'}^2 = t^2$$

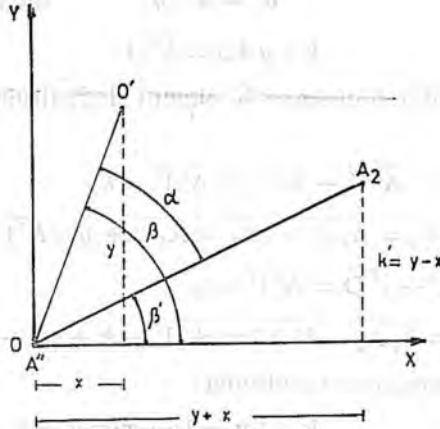
dir. Bu değer 46 içinde yerine konunca:

$$48) \quad t' = t\sqrt{2}$$

bulunur. Sonuç:

Çift yansıma görüntüsünün öteleme değeri, aynalı gönye ötelenmesinin $\sqrt{2}$ ile çarpımına eşittir.

b) $A''A_2$ yönünün araştırılması: Aslında k ve k' bileşkenleri, $A''A_2$ ötelemesinin seçilen eksnelere nazaran yönünü belirtmektedir. Fakat biz burada $A''A_2$ ötelemesinin X ve Y eksnelere nazaran değil, doğrudan doğruya OO' ötelenmesine nazaran yönünü saptamağa çalışacağız.



Şekil 18

Şekil 18 de A^*A_2 ve OO' ötelemelerinin (bir arada çizilmiş olarak) X ve Y eksenlerine nazaran durumları görülmektedir. Bu durumlar, yaklaşık olarak üç kat büyültülmek suretiyle şekil 17 den alınmıştır.

A^*A_2 ve OO' ötelemelerinin X eksenine ile yapmış olduğu β ve β' açıları, aşağıdaki eşitliklerle belirlenmiştir :

$$49) \quad \operatorname{tg} \beta' = \frac{y-x}{y+x}$$

$$50) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}$$

(50) eşitliğinden :

$$51) \quad \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{\operatorname{tg} \beta + 1} = \frac{y-x}{y+x}$$

veyahut (49) eşitliği de gözönünde tutulursa :

$$52) \quad \operatorname{tg} (\beta - 50) = \operatorname{tg} \beta'$$

bulunur. Bu denklem çözüldünce :

$$53) \quad \beta - 50 = \beta' \quad \text{veya :}$$

$$54) \quad \beta - \beta' = 50 \text{ grad}$$

elde edilir, A^*A_2 ile OO' arasındaki açı α ile gösterilirse :

$$55) \quad \alpha = \beta - \beta' \quad \text{dür. O halde :}$$

$$56) \quad \alpha = 50 \text{ grad} \quad \text{dır.}$$

Bu ilginç sonuçları şöyle özetliyebiliriz :

1 — Çift yansıma görüntüsünün öteleme değeri $A^*A_2 = t'$ ile gönyenin öteleme değeri $OO' = t$ arasında şu bağıntı vardır : $t' = t\sqrt{2}$

2 — A^*A_2 ile OO' arasındaki açı sabit ve 50 grada eşittir.

Öteleme konusunu kapatmadan önce bir noktaya daha değinmekte yarar vardır. Bir aynalı gönyenin aynaların arakesiti etrafında dönmesi sonucunda çift yansıma görüntüsünün sabit kalacağı önceden tahmin edilir bir özellik değildir. Bu özellik ancak bir kanıtlanma sonucu meydana çıkmaktadır. Fakat gönyenin ötelenmesi sonucu çift yansıma görüntüsünün öteleneceği, bir bakıma önceden tahmin edilebilen, kanıtlanmadan dahi düşünülebilen bir özelliktir. Bilindiği üzere, özellikle bir AB doğrusu dışında alınan M noktasından o doğruya bir dik indirilmesi problemi çözüldürken, aynalı gönyedeki görüntü ile M noktasındaki filamanın çakıştırılması, gönyenin AB doğrultusunda, az veya büyük ölçüde, yer değiştirmesiyle, ötelenmesiyle gerçekleşir. Bu ise gönyenin ötelenmesiyle birlikte görüntünün de ötelenmesiyle mümkündür.

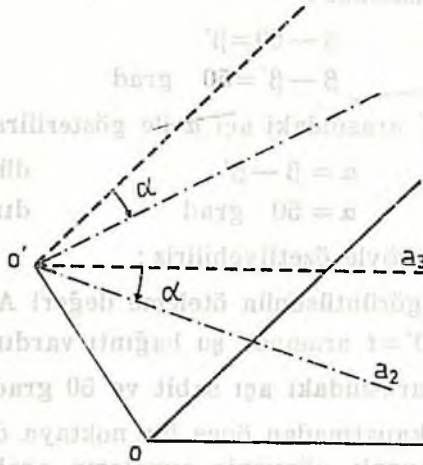
Görüntünün bu ötelenmesinin sınırı yoktur. Bu ötelenmenin doğrudan doğruya gönyenin ötelenmesine bağlı olduğu yukarıda kanıtlanmıştı. Gönye ötelenmesinin sınırı olmadığına göre görüntünün ötelenmesinin de sınırı olmayacağı açıktır.

C — Gelişigüzel yer değiştirme

Bir aynalı gönyenin gelişigüzel (serbest) bir hareketle a_1 durumundan a_2 durumuna geldiğini düşünelim. Bu durumda O noktası da O' noktasına gelmiştir. Bu yer değiştirme iki safhada gerçekleştirilebilir (şekil 19):

- 1— OO' ötelemesi,
- 2— O' noktasında α rotasyonu.

O' noktasındaki rotasyonda görüntünün hiç yer değiştirmedeği evvelce görülmüştü. O halde görüntünün yer değiştirmesi yalnız OO'



Şekil 19

ötelenmesinden doğan bir yer değiştirme olacaktır. Bunun ne şekilde olduğu bütün ayrıntıları ile görülmüştü. Sonuç şu şekilde formüle edilebilir:

«Bir aynalı gönye gelişigüzel bir hareketle Oa_1 pozisyonundan $O'a_2$ pozisyonuna gelirse çift yansıma görüntüsü, yalnız OO' ötelemesine karşıt olan görüntü ötelemesine uğrar».

Özel bir rotasyon : Aynalı gönyelerde sap genellikle ayna düzlemlerinin arakesit noktasına değil, P gibi bir noktaya konmaktadır (şekil 20). Bu P noktası genellikle gönye açısının açıortayı üzerinde bulunur. Bu böyle olunca gönye P noktası etrafında α açısı kadar döndüğü zaman O noktası yarıçapı $OP=R$ olan bir daire parçası üzerinde hareket ederek O' noktasına gelir. Gönyenin bu yer değiştirmesi, yukarıda sözügeçen gelişigüzel bir yer değiştirmeden başka bir şey değildir. Ve yine yukarıda belirtildiği gibi (çift yansıma görüntüsünün yer değiştirmesi bakımından) yer değiştirme OO' ötelemesine eşdeğerdir.

Şekil 20 deki değerler aşağıdaki eşitliklerle hesaplanabilir :

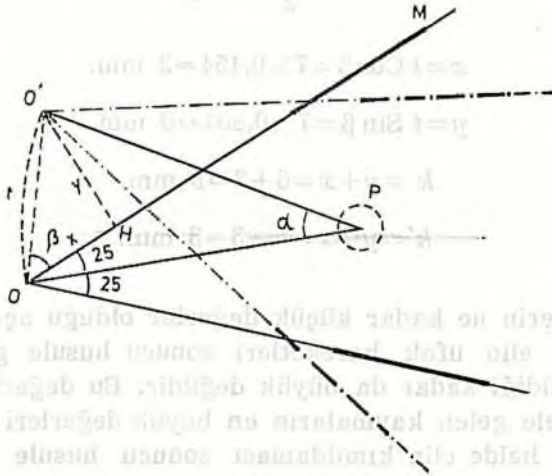
57) $t = OO' = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$

58) $\beta = 100 - \frac{\alpha}{2} - 25 = 75 - \frac{\alpha}{2}$ grad.

59) $x = t \cos \beta = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \beta$

60) $y = t \sin \beta = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \beta$

OO' ötelemesine karşıt olan çift yansıma görüntüsünün ötelenmesi de şu eşitliklerde ifadesini bulur :



Şekil 20

$$61) \quad t' = t \sqrt{2}$$

Bu öteleme, görüntünün kendi ötelemesidir. Biraz yukarıda kanıtlandığı gibi, doğrultusu, t doğrultusu ile 50 gradlık bir açı yapmaktadır.

$$62) \quad k = y + x$$

$$63) \quad k' = y - x$$

k , görüntünün OM doğrultusundaki, k' ise OM ye dik doğrultudaki öteleme bileşkenidir.

Bu ötelemelerin önem derecesini anlamak için evvelce örnek olarak ele alınmış olan aynalı gönyenin boyutlarına dayanarak bir uygulama yapalım. Bu gönyede $OP=4,5$ cm. dir. Gözlemeler esnasında elin ufak hareketleriyle meydana gelecek rotasyonların değeri bir kaç gradı geçmez. $\alpha=10$ grad kadar bir rotasyon oluştuğu düşünülse bile:

$$t = \overrightarrow{OO'} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \times 45 \times \sin 5 \text{ gr.} = 90 \times 0,0785 = 7 \text{ mm.}$$

$$t = 7 \text{ mm.}$$

$$t' = t \sqrt{2} = 7 \times 1,4 \approx 10 \text{ mm.}$$

$$\beta = 75 - \frac{\alpha}{2} = 70 \text{ grad}$$

$$x = t \cos \beta = 7 \times 0,454 \approx 3 \text{ mm.}$$

$$y = t \sin \beta = 7 \times 0,891 \approx 6 \text{ mm.}$$

$$k = y + x = 6 + 3 \approx 9 \text{ mm.}$$

$$k' = y - x = 6 - 3 \approx 3 \text{ mm.}$$

Bu değerlerin ne kadar küçük değerler olduğu açıkça görülmektedir. Aslında elin ufak hareketleri sonucu husule gelen rotasyon, örnekte gösterildiği kadar da büyük değildir. Bu değerlere elin kımıldaması ile husele gelen kaymaların en büyük değerleri olarak bakmak mümkündür. O halde elin kımıldaması sonucu husule gelen görüntü kaymalarının aynalı gönyelerle dikaçıların saptanmasında pratik önemi yoktur.

Ö Z E T

Buraya kadar yapılmış olan incelemelerin sonuçları aşağıdaki maddelerde özetlenmiştir :

1 — Gönye sapının gözlenen son yansımış ışın ile buna tekabül eden gelen ışının kesim noktasında bulunmaması arazi üzerinde dik-açuların saptanmasında pratik önem taşımamaktadır.

2 — Aynalı gönye ayna düzlemlerinin arakesiti etrafında döndüğü zaman çift yansıma görüntüsü sabit kalır.

3 — Gönyeye herhangi bir $OO' = t$ öteleme hareketi uygulanırsa, çift yansıma ile oluşan görüntü de ötelenir. Öteleme miktarı :

$$t' = t \sqrt{2}$$

dir. Ve ötelemenin doğrultusu OO' doğrultusu ile 50 grada eşit sabit bir açı yapar. Ayrıca bu ötelemenin bileşkenleri :

$$k = y + x$$

$$k' = y - x$$

dir. k bileşkeni gönyenin ikinci aynasının düzlemi doğrultusunda, k' se ona dik olan doğrultudadır. Bu eşitlikler içinde x ve y değerleri OO' ötelemesinin aynı doğrultulara göre bileşkenleridir (şekil 17).

4 — Gelişigüzel yer değiştirmede : Gönye O dan O' noktasına gelmiş ise (şekil 19) çift yansıma görüntüsü yalnız OO' ötelemesine karşıt olan görüntü ötelemesine uğrar.

5 — Aynalı gönyenin sapı etrafında dönmesi, gönyenin gelişigüzel yer değiştirmesine eşdeğerdir (Şekil 20). Bu dönemde çift yansıma görüntüsü OO' ötelemesine karşıt olan görüntü ötelemesine uğrar. Dönme açısı α ise :

$$OO' = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$R = OP \quad \text{dir. (Şekil 20).}$$

6 — Aynaların arakesiti etrafında dönmesi müstesna, gönyenin her türlü hareketinde çift yansıma görüntüsü de az veya çok hareket eder.

7 — Bu özelliklerin prizmalı gönyeler için de geçerli olduğu aşikârdır.

UNE ETUDE SUR LES EQUERRES A REFLEXION

Le principe de la double réflexion sur deux miroirs faisant entre eux un certain angle est connu de tout le monde. Il figure dans tous les ouvrages de physique élémentaire traitant optique. Son application dans les équerres, dites à réflexion, est également traitée dans presque tous les ouvrages de topographie.

Mais dans la plupart de ces ouvrages la question des équerres à réflexion est traitée superficiellement et la corrélation entre les mouvements (petits ou grands) de l'équerre et ceux de l'image résultant de la double réflexion, n'est même pas abordée. Dans d'autres, où le sujet se trouve à peine éffleuré, on rencontre des notions erronnées dont il sera question plus tard.

C'est dans le but d'élucider ce problème que cette étude a été entreprise.

Le commencement de cet article contient des connaissances sur le principe des équerres à réflexion, leur emploi en topographie pour fixer des angles droits sur le terrain, la précision obtenue et les efforts déployés pour obtenir avec ces équerres une exactitude rigoureuse, du moins théoriquement, quant à la fixation des angles droits sur le terrain.

Ce sont là des connaissances classiques qu'on rencontre, en partie, dans la plupart des ouvrages de topographie. Aussi nous contenterons-nous de citer seulement leur titre dans ce bref résumé, comme nous l'avons fait plus haut, et d'ajouter qu'elles sont exposées ici d'une façon un peu plus détaillée. Nous passerons donc directement au sujet qui constitue le but de cet article, c'est à dire :

La corrélation qui existe entre les mouvements de l'équerre et ceux de l'image résultant de la double réflexion

Pendant les observations l'équerre est toujours tenue à la main (elle n'est jamais installée sur un trépied). Dans ces conditions il est impossible que l'équerre reste immobile. Elle est exposée à des mouvements provenant de ceux de la main qui la tient.

Il est naturel de se demander si ces mouvements de l'équerre ont un effet sur la position de l'image formée à la suite de la double réflexion et, s'il en est ainsi, quelle est l'amplitude de cet effet.

A ce sujet certains ouvrages contiennent des connaissances qui ne pourraient être qualifiées d'exactes. Nous en donnerons deux exemples :

E. Thiéry, Instruments topographiques (page 172) : «Il est à remarquer, et c'est un point fort important, que les mouvements de la main qui pourraient amener la désorientation de l'équerre, ne changent pas la direction des images.»

Eugène Prévot, Topographie, Livre 1. (page 199) : «Les mouvements que la main communique à l'instrument pendant les observations ne modifient pas la direction des images.»

Comme nous l'avons déjà dit plus haut ces notions ne pourraient être acceptées comme exactes. En effet une étude un peu plus approfondie de la question nous montre que, suivant la nature du mouvement communiqué à l'équerre, l'image peut rester immobile ou bien subir un déplacement qui se produit d'ailleurs suivant certaines lois.

Les mouvements de l'équerre qui pourraient être en question peuvent être groupés en trois catégories :

- 1 — Rotation,
- 2 — Translation,
- 3 — Déplacement quelconque.

1 — Rotation

Il s'agit ici d'une rotation particulière de l'équerre, celle autour de l'intersection, supposée verticale, des plans des miroirs. La propriété résultant de cette rotation s'énonce de la façon suivante :

«Quand une équerre tourne autour de l'intersection des plans des miroirs, l'image formée à la suite de la double réflexion reste immobile (ne subit aucun déplacement) (Fig. 13).

Dans cet exposé on trouvera trois démonstrations de cette propriété.

La première démonstration : consiste à prouver que le rayon incident AI étant fixe le rayon doublement réfléchi I'P, perpendiculaire

à AI, est également fixe. Il suffit pour cela de démontrer que le point d'intersection P de ces rayons est fixe (fig. 13), ce qui a lieu si $d=d'$. Les relations trigonométriques de 18 à 23, montrent clairement comment on arrive à ce résultat.

La seconde démonstration : est purement géométrique. Le point O est l'intersection de IO et I'O qui sont les bissectrices extérieures du triangle II'P. Il se trouve donc sur la bissectrice intérieure de l'angle en P. De là : $d = d'$.

Dans la troisième démonstration : On démontre directement que l'image A'' formée par double réflexion reste fixe quand l'équerre tourne autour de l'axe O. Sans entrer dans le détail de la démonstration, nous nous contenterons de signaler que l'image A'' se trouve à l'extrémité de la droite OA'' perpendiculaire à OA et que $OA'' = OA$.

Le point A'' est donc un point fixe. L'examen de la Figure 14 suffit de voir les relations qui existent entre les angles. D'ailleurs on peut s'aider à cet effet des relations 25 à 30.

2 — Translation

Le résultat d'une translation OO' communiquée à une équerre peut être énoncé sous deux formes :

Premier énoncé : « Quand on communique une translation OO' à une équerre, le rayon I'P provenant de la double réflexion du rayon incident (supposé fixe) subit également une translation égale à :

$$PP' = k = x + y$$

x et y étant les coordonnées de O' par rapport à deux axes rectangulaires passant par O, l'axe des x étant parallèle à la direction fixe IA, les directions positives des axes étant $\overline{OH'}$ et \overline{HO} (fig. 15). »

Sans entrer dans le détail de la démonstration de cette propriété nous nous contenterons de renvoyer les lecteurs à l'examen des relations 31, 32, 33, et de la figure 15.

Remarque : Quand l'équerre subit une translation OO' l'image A'' formée à la suite de la double réflexion subit également un déplacement A''A₂ (fig 16). La valeur de k trouvée plus haut constitue la composante $\overrightarrow{A''H}$ du vecteur $\overrightarrow{A''A_2}$, dans la direction IA du rayon incident. La composante $\overrightarrow{HA_2}$ dans la direction perpendiculaire à la première

n'est pas prise en considération dans cette démonstration. D'ailleurs il est presque évident que de ces deux composantes la plus importante est $\vec{A''H}$, c'est à dire celle perpendiculaire à la direction de la vissée.

Cependant la valeur et la direction de cette composante varient avec le rayon incident AI considéré, tandis que le déplacement $A''A_2$ reste invariable. C'est pourquoi il est plus intéressant d'étudier directement le déplacement de l'image A'' elle-même, ce qui nous conduit au second énoncé qui est le suivant :

Deuxième énoncé : Quand on communique à l'équerre une translation OO' , l'image A'' formée après double réflexion subit également une translation telle que $\vec{A''A_2}$ dont les composantes $k = \vec{A''H}$ et $k' = \vec{HA_2}$ parallèles à deux axes rectangulaires passant par O sont données par les relations :

$$k = y + x$$

$$k' = y - x$$

l'axe des x étant la direction Oa_2 du plan du second miroir, x et y étant les coordonnées du point O' par rapport à ces axes qui ont une position fixe. (fig. 17)

La direction et la longueur du déplacement $\vec{A''A_2}$

1 — La longueur du déplacement : Dans le triangle rectangle $A''A_2H$ on a :

$$t'^2 = \overline{A''H_2}^2 = \overline{A''H}^2 + \overline{HA_2}^2 = k^2 + k'^2 = (y+x)^2 + (y-x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Dans le triangle rectangle $OO'P$ on a :

$$t^2 = \overline{OO'}^2 = x^2 + y^2$$

En remplaçant $x^2 + y^2$ par sa valeur il vient :

$$t'^2 = 2t^2 \quad \text{d'où :}$$

$$t' = t\sqrt{2}$$

Donc : la longueur t' du déplacement de l'image A'' est égale au produit par $\sqrt{2}$ du déplacement $\overline{OO'} = t$ de l'équerre.

2 — La direction du déplacement $\overrightarrow{A^*A_2}$: La direction de $\overrightarrow{A^*A_2}$ est déjà définie par ses composantes k et k' par rapport aux axes de coordonnées OX et OY . Mais il est intéressant de la définir par rapport à la direction $\overrightarrow{OO'}$ du déplacement de l'équerre.

La figure 18 montre la position des déplacements $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{A^*A_2}$ par rapport aux axes OX et OY . Les angles β et β' sont définis par les relations :

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{y-x}{y+x}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x}$$

Par une simple transformation de cette dernière on obtient :

$$\frac{y-x}{y+x} = \frac{\operatorname{tg} \beta - 1}{\operatorname{tg} \beta + 1} = \operatorname{tg} (\beta - 50)$$

Ou en tenant compte de la première égalité

$$\operatorname{tg} \beta' = \operatorname{tg} (\beta - 50)$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \beta - \beta' = 50 \text{ grades}$$

Donc : L'Angle α entre les directions $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{A^*A_2}$ est constant et égal à 50 grades.

3 — Déplacement quelconque

Considérons une équerre qui, à la suite d'un mouvement quelconque, se déplace de O en O' . Ce mouvement peut être décomposé en deux (fig. 17) :

- 1) La translation $\overrightarrow{OO'}$ qui amène Oa_2 en Oa_3 ,
- 2) La rotation α autour de O' à la suite de laquelle l'équerre coïncide avec sa position finale.

Or, comme on l'a déjà vu, pendant la rotation autour de O' l'image formée par les rayons doublement réfléchis reste immobile. Donc le déplacement de l'image correspondra à celui produit par la translation $\overrightarrow{OO'}$ seule. On peut formuler cette propriété de la façon suivante :

«Un mouvement Quelconque qui amène une équerre de O en O' équivaut à la translation $\vec{OO'}$ au point de vue du déplacement de l'image.

Une rotation particulière

La manche d'une équerre n'est généralement pas fixée au point d'intersection O des plans des miroirs. Elle est placée en un point P qui se trouve généralement sur la bissectrice de l'angle de l'équerre (fig. 20). Quand l'équerre subit une rotation autour de la manche le point O vient en O' en se déplaçant sur un arc de cercle de centre P et de rayon PO . Ce déplacement de l'équerre n'est autre chose qu'un déplacement quelconque. Au point de vue du déplacement de l'image cette rotation équivaut à la translation $\vec{OO'}$. Les éléments de cette translation et ceux du déplacement de l'image peuvent être calculés par les formules 57—63.

Un exemple numérique nous montre que le déplacement de l'image est de l'ordre de 10 mm. pour une rotation de 10 grades. Les petits mouvements communiqués à l'équerre par ceux de la main produisent donc un déplacement négligeable de l'image. Mais il n'est pas exacte de formuler cette tolérance en avançant que l'image reste immobile.