Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 2(1) 43-52 2021
Recep Tayyip Erdogan University Journal of Science and Engineering, 2(1) 43-52 2021
ISSN: 2687-2315 / E-ISSN: 2757-7686

Yönlendirilmemiş Power Graflarda Hyper-Wiener, Harary, *SK*, *SK*$_1$ ve *SK*$_2$ İndeksleri

Volkan AŞKIN

Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye

Sorumlu Yazar/Corresponding Author
E-mail: volkan.askin@gazi.edu.tr
Orcid ID: 0000-0003-2990-4858

Araştırma makalesi/Research article
Geliş tarihi/Received:19.05.2021
Kabul tarihi/Accepted:18.06.2021

ÖZET

Sonlu bir Z_n grubunun yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafı, köşelerinin kümesi Z_n olan bağlantılı bir graftır ve burada iki köşe komşudur gerek ve yeter şart $u \neq v$ ve $< u > \subseteq < v >$ veya $< v > \subseteq < v >$ dir. $(Z_n, +)$ grubuna karşılık gelen Yönlendirilmemiş $G = P(Z_n)$ power grafının Hyper-Wiener, SK, SK_1, SK_2 ve Harary indeksleri sırasıyla, $\frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v) + \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d^2(u,v)$ $\frac{1}{2}\sum_{uv\in E(G)} d(u) + d(v)$, $\frac{1}{2}\sum_{uv\in E(G)} d(u).d(v)$, $\frac{1}{4}\sum_{uv\in E(G)}(d(u) + d(v))^2$ ve $\sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)}$ olarak tanımlandı. Bu makale de $P(Z_{p^k})$ ve $P(Z_{pq})$ power graflarının Hyper-Wiener, SK, SK_1, SK_2 ve Harary indekslerinin hesaplamaları üzerine odaklanıyoruz. Giriş bölümünde yönlendirilmemiş power grafın tanımı yapıldı. Aynı şekilde bu bölümde bizim için gerekli olan sonuçlar ve teoremler verildi. Bu makalede öncelikle, p ve q farklı asal sayılar olmak üzere p^k ve $p.q$ değerlerine karşılık gelen yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafının Hyper-Wiener indeksini bulup belirli koşullar altında bu power grafının Hamilton olduğunu gösteriyoruz. Daha sonra aynı değerlere karşılık gelen bu power grafın n veya $\phi(n)$ ile bağlantılı Harary indeksini hesaplıyoruz. Devamında, p ve q farklı asal sayılar olmak üzere, bu power grafın p, q veya $\phi(n)$ ile bağlantılı SK ve SK_1 indekslerini buluyoruz. Son olarakta, bu power grafın p, q, n, SK_1 veya $\phi(n)$ ile bağlantılı SK_2 indeksini hesaplıyoruz.

Anahtar Kelimeler: Hyper-Wiener İndeksi, SK İndeksi, SK_1 İndeksi, SK_2 İndeksi, Harary İndeksi, Yönlendirilmemiş Power Graf.

Hyper-Wiener, Harary, *SK*, *SK*$_1$ and *SK*$_2$ Indexes of an Undirected Power Graph

ABSTRACT

The undirected $P(Z_n)$ power graph of a finite group of Z_n is a connected graph whose set of vertices is Z_n, where the two vertices are neighbors, and the necessary and sufficient condition is $u \neq v$ and $< u > \subseteq < v >$ or $< v > \subseteq < v >$. $(Z_n, +)$ a group corresponding to the Undirected $G = P(Z_n)$ power of graphs with the Hyper-Wiener SK, SK_1, SK_2 and Harary indices, respectively, $\frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v) + \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d^2(u,v)$, $\frac{1}{2}\sum_{uv\in E(G)} d(u) + d(v)$, $\frac{1}{2}\sum_{uv\in E(G)} d(u).d(v)$, $\frac{1}{4}\sum_{uv\in E(G)}(d(u) + d(v))^2$ and $\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$ are defined as. This article also focuses on the calculations Hyper-Wiener, SK, SK_1, SK_2 and Harary indices of $P(Z_{p^k})$ and $P(Z_{pq})$ power graphs. In the introduction, the definition of an undirected power graph was made. In the same way, the results and theorems necessary for us were given in this section. In this article, we first find the Hyper-Wiener index of the undirected $P(Z_n)$ power graph corresponding to the values p^k and $p.q$, p and q being different primes, and show that under certain conditions, this power graph is Hamiltonian. Then we calculate the Harary index associated with n or $\phi(n)$ of this power graph corresponding to the same values. In the continuation, we find the indices SK and SK_1 linked to p, q or $\phi(n)$ of this power graph, with p and q being different primes. Finally, we calculate the SK_2 index of this power graph linked to p, q, n, SK_1 or $\phi(n)$.

Keywords: Hyper-Wiener Index, *SK* Index, *SK*$_1$ Index, *SK*$_2$ Index, Harary Index, Undirected Power Graph.

Atıf için (Cite);
Aşkın, V. (2021). Yönlendirilmemiş Power Graflarda Hyper-Wiener, Harary, *SK*, *SK*$_1$ ve *SK*$_2$ İndeksleri. *Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi,* 2(1), 43-52.

1. Giriş

Bir G grup için yönlendirilmemiş $P(G)$ power grafını aşağıdaki gibi tanımlarız. $u \in G$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere $< u >$ tarafından üretilen devirli altgrubu $< u >= \{u^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim. $P(G)$, G köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. Burada $u, v \in G$ köşeleri komşudur gerek ve yeter şart $u \neq v$ ve $< u > \subseteq < v >$ veya $< v > \subseteq < v >$ olmasıdır. (buna denk olarak $u \neq v$ ve bazı m pozitif tamsayısı için $u^m = v$ veya $v^m = u$ olmasıdır.) (Chakrabarty vd., 2009). Bir G grafı için, $d\,(u)$ ve $d(u, v)$, sırasıyla $u \in V(G)$ köşesinin derecesini ve $u, v \in V(G)$ köşeleri arasındaki mesafeyi göstersin. n module göre toplamsal Z_n grubu için $P(Z_n)$ power grafını ele alıyoruz. n pozitif tamsayısı için n nin Euler fonksiyonunu $\phi(n)$ ile göstereceğiz. Shegahalli ve diğerleri tarafından (Shegahalli vd., 2016) de yeni topolojik indeksler tanıldı ve daha sonra bir G grafı için SK, SK_1ve SK_2 indeks formüllerini ortaya koydular. Aşağıda Shegehalli ve diğerleri derece tabanlı iki yeni topolojik indeksleri tanıttılar. (SK indeksler):

$$SK(G)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u) + d(v)$$

$$SK_1(G)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u).d(v)$$

$$SK_2(G) = \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v))^2$$

dir. $W\big(P(Z_n)\big) = \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u, v)$ Wiener indeksi uygulama ve teorik bakış açılarında en çok çalışılan topolojik indekstir (Dobrynin vd., 2001). Hyper-Wiener indeksi, yakın zamanda tanıtılan mesafeye dayalı moleküler yapı tanımlayıcılarından biridir (Gutman, 1997).

$$WW\big(P(Z_n)\big) = \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d(u, v) + \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} d^2(u, v).$$

Bağlantılı bir grafın Harary indeksi, kullanışlı bir topolojik indekstir. Bu Plavšić ve diğerleri (Plavšić vd., 1993) ve Ivanciuc ve diğerleri tarafından 1993 yılında (Ivanciuc vd., 1993) da tanıtıldı. Bir G grafının Harary indeksi

$$H(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u, v)}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 1. (Aşkin ve Büyükköse, 2021) p asal sayı ve k pozitif tamsayı olsun. O halde m kenarlı p^k mertebeden yönlendirilmemiş $P(Z_{p^k})$ power grafının Wiener indeksi

$$W\left(P(Z_{p^k})\right) = m = \binom{p^k}{2}$$

şeklindedir.

Sonuç 2. (Aşkin ve Büyükköse, 2021) p ve q farklı asallar olmak üzere $P(Z_n), n = pq$ köşeli ve m kenarlı yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde

$$W\left(P(Z_{pq})\right) = m + 2\,\phi(pq)$$

veya denk olarak

$$W\left(P(Z_{pq})\right) = \binom{pq}{2} + \phi(pq)$$

dir.

Teorem 3. (Chakrabarty vd., 2009) n tamsayısı, $n \geq 3$ ise o halde $P(Z_n)$, hamiltondur.

Teorem 4. (Walikar vd., 2004) G, n köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir graf olsun. Eğer $diam(G) \leq 2$ ise o halde $W(G) = n(n-1) - m$ dir.

2. Esas Sonuçlar

Bu bölümde amacımız, p ve q nun farklı asal sayılar olduğu ve k nin negatif olmayan bir tamsayı olduğu $n = p^k$ veya $n = pq$ için yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafının Hyper-Wiener, SK, SK_1, SK_2ve Harary indeksleri üzerinde ana sonuçlarımızı vermektir.

Teorem 5. $P(Z_n)$ yönlendilmemiş power graf olsun. O halde

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u\sim v \\ 3, & u \nsim v \end{cases}$$

dir.

İspat. $\text{Ʀ} = \left\{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n)) \middle| \begin{array}{l} u\sim v \text{ gerek ve yeter şart } u \neq v, \\ < u > \subseteq < v > \text{ veya } < v > \subseteq < u >. \end{array}\right\}$ kümesini kullanarak $V(P(Z_n) = \text{Ʀ} \cup \text{Ʀ}^c$ şeklinde yazabiliriz. Hyper- Wiener İndeks tanımı kullanılacak olursa,

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq \text{Ʀ}\cup\text{Ʀ}^c} d(u,v)\,(1 + d(u,v))$$

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq \text{Ʀ}} d(u,v)\left(1 + d(u,v)\right) + \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq \text{Ʀ}^c} d(u,v)\,(1 + d(u,v))$$

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2}(\sum_{\{u,v\}\subseteq \text{Ʀ}} 2 + \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq \text{Ʀ}^c} 6)$$

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & \{u,v\} \subseteq \text{Ʀ} \\ 3, & \{u,v\} \nsubseteq \text{Ʀ} \end{cases}$$

Ʀ nin tanımından,

$$WW(P(Z_n)) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} \begin{cases} 1, & u\sim v \\ 3, & u \nsim v \end{cases}$$

yazarız ve dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 6. $p \neq q$ farklı asallar ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. n mertebeli m kenarlı yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafı için,

eğer $n = p^k$ ise

$$WW(P(Z_n)) = 2W(P(Z_n))$$

ve eğer $n = pq$ ise

$$WW(P(Z_n)) = 2\binom{n}{2} + 4\phi(n)$$

dir.

İspat. Sonuç 2. (Aşkin ve Büyükköse, 2021) gereğince;

$n = p^k$ için $m = \binom{n}{2}$ ve $n = pq$ için $W(P(Z_n)) = \binom{n}{2} + \phi(n) = 2\phi(n) + m$ olduğundan Hyper- Wiener indeks tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılarak

$n = p^k$ için;

$$WW(P(Z_n)) = \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} d(u,v) + \frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subseteq V(P(Z_n))} d^2(u,v)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d(u_i) + 2(n-1-d(u_i)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d(u_i) + 4(n-1-d(u_i))$$

$$= \frac{6n(n-1)}{2} - 2\sum_{i=1}^{n} d(u_i)$$

$$= 6\binom{n}{2} - 4m$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılacak olursa;

$$WW(P(Z_n)) = 2W(P(Z_n))$$

elde edilir.

Diğer taraftan $n = pq$ için;

$$WW(P(Z_n)) = 6\binom{n}{2} - 4m$$

$$= 6\binom{n}{2} - 4(\binom{n}{2} - \phi(n))$$

$$WW\big(P(Z_n)\big) = 2\binom{n}{2} + 4\phi(n)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 7. G devirli bir grup olsun. $e \in G$ birim eleman olmak üzere herhangi bir $e \neq a \in G$ alalım. Eğer $a \sim b$ olacak şekilde $e \neq b \in G$ varsa $\delta(P(G)) \geq 2$ dir.

İspat. G devirli bir grup ve $e \in G$ birim eleman olsun. Yönlendirilmemiş $P(G)$ power grafının tanımı gereği $\forall u \in G$ için $u \sim e$ olduğundan $d(u, e) = 1$ olur. O halde δ derece olduğundan negatif olamaz. Ayrıca hipotezden kabul edelim ki herhangi bir $u \in G$ için $u \sim b$ olacak şekilde $e \neq b \in G$ olsun. Bu bize $u \in G$ nin hem $e \in G$ ile hem de $b \in G$ ile arasında farklı bir yollar olduğunu gösterir. Bu da $min\{u \in V(P(G)) \mid d(u)\} \geq 2$ olduğunu gösterir. O halde $\delta(P(G))$ nin tanımı gereği istenen elde edilmiş olur ve ispat biter.

Sonuç 8. $(Z_n, .)$ devirli grup olmak üzere, eğer $\delta(P(Z_n)) \geq 2$ ise yönlendirilmemiş $P(Z_n)$ power grafı Hamiltondur.

İspat. Kabul edelim ki $\delta(P(Z_n)) \geq 2$ olsun. O halde bu bize $n \geq 3$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan Teorem 3. (Chakrabarty vd., 2009) kullanılacak olursa $P(Z_n)$ power grafı Hamilton olur ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 9. $p \neq q$ farklı asal sayılar ve k pozitif bir tamsayı olsun. O halde n mertebeden ve m kenarlı $P(Z_n)$ power grafı için,

eğer $n = p^k$ ise

$$H\big(P(Z_n)\big) = 2\binom{n}{2}$$

ve eğer $n = pq$ ise

$$H\big(P(Z_n)\big) = 2\binom{n}{2} - \phi(n)$$

dir.

İspat . Harary indeks tanımı ve gerekli bilgiler kullanılacak olursa;

$$H\big(P(Z_n)\big) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(P(Z_n))} \frac{1}{d(u,v)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(d(u_i) + \frac{1}{2}\big(n - 1 - d(u_i)\big)\Big)$$

$$= \binom{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(u_i)$$

$$= \binom{n}{2} + m$$

elde edilir. Eğer $n = p^k$ ise sonuç 1. (Aşkin ve Büyükköse, 2021) gereğince $W\left(P\big(Z_{p^k}\big)\right) = \binom{p^k}{2}$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan teorem 4. (Walikar vd., 2004) gereğince $W\left(P\big(Z_{p^k}\big)\right) = p^k\big(p^k - 1\big) - m$ idi. Dolayısıyla $m = \binom{n}{2}$ olur. O halde bu bilgiler doğrultusunda düzenleme yapılacak olursa,

$$H\big(P(Z_n)\big) = 2\binom{n}{2}$$

elde edilmiş olur. Eğer $n = pq$ ise sonuç 2. (Aşkin ve Büyükköse, 2021) nin ispatından dolayı $m = \binom{n}{2} - \phi(n)$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$H\big(P(Z_n)\big) = 2\binom{n}{2} - \phi(n)$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 10. (Shegahalli vd., 2016, *SK* index). $G = (V, E)$ grafının *SK* indeksi

$$SK(G) = \frac{1}{2}\sum_{uv \in E(G)} d(u) + d(v)$$

olarak tanımlanır. Burada $d(u)$ ve $d(v)$ sırasıyla u ve v köşelerinin *G* deki dereceleridir.

Teorem 11. p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer yönlendirilmemiş $P(\mathbb{Z}_{p^k})$ power grafı $n = p^k$ mertebeli ise

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = n(n-1)^2$$

dir.

İspat. $n = p^k$ (p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$) olmak üzere ;

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\sum_{uv\in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u)+d(v)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} \big(d(0)+d(1)\big)+\big(d(0)+d(2)\big)+\big(d(0)+d(3)\big)+\cdots \\ +\big(d(0)+d(n-1)\big)+\big(d(1)+d(0)\big)+\big(d(1)+d(2)\big)+ \\ \big(d(1)+d(3)\big)+\cdots+\big(d(1)+d(n-1)\big)+\big(d(2)+\ d(0)\big) \\ +\big(d(2)+d(1)\big)+\big(d(2)+d(3)\big)+\cdots+\big(d(2)+d(n-1)\big) \\ +\cdots+\big(d(n-1)+d(0)\big)+\big(d(n-1)+d(1)\big)+ \\ +\big(d(n-1)+d(2)\big)+\cdots+\big(d(n-1)+d(n-2)\big) \end{array}\right\}$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\{2.\,d(0).\,(n-1)+2.\,d(1).\,(n-1)+\cdots+2.\,d(n-1).\,(n-1)\}$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = (n-1).(\,d(0)+d(1)+\cdots+d(n-1))$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = n.\,(n-1)^2$$

elde edilir.

Teorem 12. p ve q farklı asal sayılar ve $P(Z_n), n = pq$ köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \left\{\begin{array}{c} (n-1)^2.\,(\phi(n)+1) \\ +\big(\phi(n)+\phi(p)\big)^2.\,\phi(p) \\ +\big(\phi(n)+\phi(q)\big)^2.\,\phi(q)) \end{array}\right\}$$

dir.

İspat. $n = p.q$ (p ve q farklı asal sayılar) olmak üzere tamsayılar iyi sıralı olduğundan $p < q$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca,

$$\phi(p.q) = (p-1)(q-1),$$

$$V\big(P(\mathbb{Z}_n)\big) = \{0\} \cup \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p.q)}\} \cup \{q, 2q, \dots, (p-1)q\} \cup \{p, 2p, \dots, (q-1)p\}$$

$V_0 = \{0\}$,

$V_1 = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p.q)}\}$,

$V_2 = \{q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q\}$,

$V_3 = \{p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p\}$,

$U_{\mathbb{Z}_n} = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p.q)}\}$

alabiliriz.

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\sum_{uv\in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u)+d(v)$$

$$= \left\{\begin{array}{c} ((pq-1)d(0)+(pq-1)d(1)+(pq-1)d(u_2) \\ +(pq-1)d(u_3)+\cdots+(pq-1)d\big(u_{\phi(pq)}\big) \\ \\ d(q).\big(\phi(pq)+1+(p-2)\big)+d(2q)\big(\phi(pq)+1+(p-2)\big) \\ +d(3q)\big(\phi(pq)+1+(p-2)\big) \\ +\cdots+d\big((p-1)q\big)\big(\phi(pq)+1+(p-2)\big)+ \\ (d(p)\big(\phi(pq)+1+(q-2)\big)+d(2p)\big(\phi(pq)+1+(q-2)\big) \\ \\ +d(3p)\big(\phi(pq)+1+(q-2)\big)+\cdots+ \\ \\ (d((q-1)p)\big(\phi(pq)+1+(q-2)\big) \end{array}\right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (pq-1)(pq-1)+(pq-1)(pq-1)+(pq-1)(pq-1) \\ +(pq-1)(pq-1)+\cdots+(pq-1)(pq-1) \\ +(\phi(pq)+p-1)(\phi(pq)+p-1)+(\phi(pq)+p-1)(\phi(pq)+p-1) \\ +(\phi(pq)+p-1)(\phi(pq)+p-1)+\cdots+(\phi(pq)+p-1)(\phi(pq)+p-1) \\ +((\phi(pq)+q-1)(\phi(pq)+q-1)+(\phi(pq)+q-1)(\phi(pq)+q-1) \\ +(\phi(pq)+q-1)(\phi(pq)+q-1)+\cdots+(\phi(pq)+q-1)(\phi(pq)+q-1)) \end{array} \right\}$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ \begin{array}{c} \big((pq-1)^2(\phi(pq)+1)\big) \\ +\big((\phi(pq)+p-1)^2(p-1)\big) \\ +((\phi(pq)+q-1)^2(q-1)) \end{array} \right\}$$

$$SK(P(\mathbb{Z}_n)) = \left\{ \begin{array}{c} (n-1)^2.(\phi(n)+1) \\ +\big(\phi(n)+\phi(p)\big)^2.\phi(p) \\ +(\phi(n)+\phi(q))^2.\phi(q)) \end{array} \right\}$$

elde edilir.

Tanım 13. (Shegahalli vd., 2016, SK_1 index). $G=(V,E)$ grafının SK_1 indeksi

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u).d(v)$$

olarak tanımlanır. Burada $d(u)$ ve $d(v)$ sırasıyla u ve v köşelerinin G deki dereceleridir.

Teorem 14. p asal sayı, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $P(\mathbb{Z}_{p^k})$, p^k mertebeden yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{n.(n-1)^3}{2}$$

dir.

İspat . $n = p^k$ *(* p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$*)* olmak üzere ;

$$\mathrm{SK}_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u).d(v)$$

$$\mathrm{SK}_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \big(d(0).d(1)\big)+\big(d(0).d(2)\big)+\cdots+\big(d(0).d(n-1)\big) \\ +\big(d(1).d(0)\big)+\big(d(1).d(2)\big)+\big(d(1).d(3)\big)+\cdots+ \\ \big(d(1).d(n-1)\big)+\big(d(2).d(0)\big)+\big(d(2).d(1)\big) \\ +\cdots+\big(d(2).d(n-1)\big)+\cdots+\big(d(n-1).d(0)\big) \\ +\big(d(n-1).d(1)\big)+\cdots+\big(d(n-1).d(n-2)\big) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 2.\big(d(0).d(1)\big)+2.\big(d(1).d(2)\big) \\ +\cdots+2.\big(d(n-2).d(n-1)\big) \end{array} \right\}$$

$$= (n-1)^2+(n-1)^2+\cdots+(n-1)^2$$

$$= m.(n-1)^2$$

$$= \frac{n.(n-1)^3}{2}$$

elde edilir.

Teorem 15. p ve q farklı asal sayılar ve $P(Z_n), n = pq$ köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \{(pq)^4 - 8.(pq)^3 - (p^2q)^2 + 10.p^3q^2 + 5.p^2q^3 \\ +4.(pq)^2 + p^4q - 5.p^3q - 11.p^2q - 14.pq^2 - p^3 \\ +19.pq + 9.p^2 + 3.q^2 - 3.q - 11.p + 2 \end{matrix}\right\}$$

dir.

İspat. $n = p.q$ (p ve q farklı asal sayılar) olmak üzere ;

tamsayılar iyi sıralı olduğundan $p < q$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca

$V(P(\mathbb{Z}_n)) = \{0\} \cup \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p.q)}\} \cup \{q, 2q, \dots, (p-1)q\} \cup \{p, 2p, \dots, (q-1)p\}$,

$V_0 = \{0\}$,

$V_1 = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p.q)}\}$,

$V_2 = \{q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q\}$,

$V_3 = \{p, 2p, 3p, \dots, (q-1)p\}$,

$U_{\mathbb{Z}_n} = \{1, u_2, u_3, \dots, u_{\phi(p.q)}\}$

alabiliriz. Buradan,

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} d(u).d(v)$$

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} d(0).\big(d(1)+d(2)+d(3)+\cdots+d(n-1)\big) \\ +d(1).\big(\big(d(0)+d(2)+d(3)+\cdots+d(n-1)\big) \\ +\cdots+d(u_2).\big(d(0)+d(1)+\cdots+d(n-1)\big) \\ +d(u_3).\big(d(0)+d(1)+d(2)+\cdots+d(n-1)\big) \\ +\cdots+d\big(u_{\phi(p.q)}\big).\big(d(0)+d(1)+\cdots+d(n-1)\big) \\ +d(q).\begin{pmatrix} d(0)+d(1)+d(u_2)+\cdots+d\big(u_{\phi(p.q)}\big) \\ +d(2q)+d(3q)+\cdots+d\big((p-1)q\big) \end{pmatrix} \\ +d(2q).\begin{pmatrix} d(0)+d(1)+d(u_2)+\cdots+d\big(u_{\phi(p.q)}\big) \\ +d(q)+d(3q)+\cdots+d\big((p-1)q\big) \end{pmatrix} \\ +\cdots+d\big((p-1)q\big).\begin{pmatrix} d(0)+d(1)+d(u_2)+\cdots+d(q)+ \\ d(2q)+d(3q)+\cdots+d\big((p-2)q\big) \end{pmatrix} \\ +d(p).\begin{pmatrix} d(0)+d(1)+d(u_2)+\cdots+d\big(u_{\phi(p.q)}\big) \\ +d(2p)+d(3p)+\cdots+d\big((q-1)p\big) \end{pmatrix} \\ +d(2p).\begin{pmatrix} d(0)+d(1)+d(u_2)+\cdots+d\big(u_{\phi(p.q)}\big) \\ +d(p)+d(3p)+\cdots+d\big((q-1)p\big) \end{pmatrix} \\ +\cdots+d\big((q-1)p\big).\begin{pmatrix} d(0)+d(1)+d(u_2)+\cdots+d(p) \\ +d(2p)+d(3p)+\cdots+d\big((q-2)p\big) \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} d(0).\sum_{u\in V-\{0\}} d(u) + d(1).\sum_{u\in V-\{1\}} d(u) \\ +d(u_2).\sum_{u\in V-\{u_2\}} d(u) + d(u_3).\sum_{u\in V-\{u_3\}} d(u) \\ +\cdots\ +d\big(u_{\phi(p.q)}\big).\sum_{u\in V-\{u_{\phi(p.q)}\}} d(u) \\ +d(q).\sum_{\substack{u\in V-\{V_3\} \\ u\neq q}} d(u) + d(2q).\sum_{\substack{u\in V-\{V_3\} \\ u\neq 2q}} d(u) \\ +\cdots+d\big((p-1)q\big)\big).\sum_{\substack{u\in V-\{V_3\} \\ u\neq (p-1)q}} d(u) \\ +d(p).\sum_{\substack{u\in V-\{V_2\} \\ u\neq p}} d(u) + d(2p).\sum_{\substack{u\in V-\{V_2\} \\ u\neq 2p}} d(u) \\ +\cdots+d\big((q-1)p\big)\big).\sum_{\substack{u\in V-\{V_2\} \\ u\neq (q-1)p}} d(u) \end{array}\right\}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $u, v, u', v' \in V(P(\mathbb{Z}_n))$ olmak üzere $u \neq v$, $u, v \in \{0\}$ veya $u, v \in V_1$ ise

$$d(u).\sum_{u'\in V-\{u\}} d(u') = d(v).\sum_{v'\in V-\{v\}} d(v')$$

olur. Aynı şekilde $u, v, u', v' \in V(P(\mathbb{Z}_n))$ olmak üzere $u \neq v,\ u, v \in V_2$ ise

$$d(u).\sum_{\substack{u' \in V-V_3 \\ u' \neq u}} d(u') = d(v).\sum_{\substack{v' \in V-V_3 \\ v \neq v'}} d(v')$$

ve

$u, v, u', v' \in V(P(\mathbb{Z}_n))$ olmak üzere $u \neq v$, $u, v \in V_3$ ise

$$d(u).\sum_{\substack{u' \in V-V_2 \\ u' \neq u}} d(u') = d(v).\sum_{\substack{v' \in V-V_2 \\ v \neq v'}} d(v')$$

olacağından yukarıda ki son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} (\phi(pq)+1).d(1).\sum\limits_{u \in V(P(\mathbb{Z}_n))-\{1\}} d(u) \\ +d(q).\phi(p).\sum\limits_{\substack{u \in V-V_3 \\ u \neq q}} d(u) \\ +d(p).\phi(q).\sum\limits_{\substack{u \in V-V_2 \\ u \neq p}} d(u) \end{array}\right\}$$

elde edilir. Diğer taraftan ,

$$\sum_{u \in V(P(\mathbb{Z}_n))-\{1\}} d(u) = \phi(n).(n-1) + (n-q).(p-1) + (n-p).(q-1)$$

$$\sum_{\substack{u \in V-V_3 \\ u \neq q}} d(u) = (\phi(n)+1).(n-1) + (p-2).(n-q)$$

$$\sum_{\substack{u \in V-V_2 \\ u \neq p}} d(u) = (\phi(n)+1).(n-1) + (n-p).(q-2)$$

ve

$d(1) = (n-1)$,

$d(q) = (n-q)$,

$d(p) = (n-p)$

ifadeleri son eşitlikte yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} (pq)^4 - 8.(pq)^3 - (p^2q)^2 + 10.p^3q^2 + 5.p^2q^3 \\ +4.(pq)^2 + p^4q - 5.p^3q - 11.p^2q - 14.pq^2 \\ -p^3 + 19.pq + 9.p^2 + 3.q^2 - 3.q - 11.p + 2 \end{array}\right\}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Tanım 16. (Shegahalli vd., 2016, SK_2 index). $G = (V, E)$ grafının SK_2 indeksi

$$SK_2(G) = \frac{1}{4}\sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v))^2$$

olarak tanımlanır. Burada $d(u)$ ve $d(v)$ sırasıyla u ve v köşelerinin G deki dereceleridir.

Teorem 17. p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Eğer yönlendirilmemiş $P(\mathbb{Z}_{p^k})$ power grafı $n = p^k$ mertebeli ise

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = 2.SK_1(P(\mathbb{Z}_n)) = n.(n-1)^3$$

dir.

İspat. $n = p^k$ *(* p asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$*)* olmak üzere ;

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{4}\sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} \big(d(u) + d(v)\big)^2$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{uv \in E(P(\mathbb{Z}_n))} (d(u)^2 + d(v)^2) + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{c} 2.(n-1).d(0)^2 + 2.(n-1).d(1)^2 \\ + \cdots + 2.(n-1).d(n-1)^2 \end{array}\right\} + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)$$

$$= \frac{1}{2}\{(n-1).(d(0)^2 + d(1)^2 + \cdots + d(n-1)^2\} + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)$$

$$= \frac{n.(n-1)^3}{2} + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)$$
$$= 2.SK_1(P(\mathbb{Z}_n))$$
$$= n.(n-1)^3$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 18. p ve q farklı asal sayılar ve $P(Z_n), n = pq$ köşeli yönlendirilmemiş bir power graf olsun. O halde,

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = SK_1(P(\mathbb{Z}_n) + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}(n-1)^3.(\phi(n)+1) \\ +(n-q)^3.\phi(p) \\ +(n-p)^3.\phi(q)\end{matrix}\right\}$$

İspat. $n = p.q$ (p ve q farklı asal sayılar) olmak üzere ;

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = \frac{1}{4}\sum_{uv\in E(P(\mathbb{Z}_n))}\left(d(u)+d(v)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{uv\in E(P(\mathbb{Z}_n))}(d(u)^2 + d(v)^2) + SK_1(P(\mathbb{Z}_n)$$

$$SK_2(P(\mathbb{Z}_n)) = SK_1(P(\mathbb{Z}_n) + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}(n-1)^3.(\phi(n)+1) \\ +(n-q)^3.\phi(p) \\ +(n-p)^3.\phi(q)\end{matrix}\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3. Sonuç

$P\,(G)$ ile bir G grubunun yönlendirilmemiş power grafını göstereceğiz. Burada, p, q farklı asal sayılar ve k pozitif tamsayı olmak üzere $n = p^k$ ve $n = pq$ ya göre $(Z_n, +)$ grubun yönlendirilmemiş power grafı $P\,(Z_n)$ olarak ele alınır ve bu power graflarının Euler fonksiyonu yardımıyla Hyper- Wiener, Harary, SK ,SK_1 ve SK_2 indekslerinin hesaplamaları üzerine yeni teoremler ve sonuçlar elde edilir.

Teşekkür

Bu makale yazarın doktora tezinden türetilmiştir.

Referanslar

Aşkin, V., Büyükköse, Ş. (2021). The Wiener index of an undirected power graphs. *ALAMT*, 11(1), 21-29. DOI: 10.4236/alamt.2021.111003

Chakrabarty, I., Ghosh, S., Sen, M.K. (2009). Undirected power graphs of semigroups. *Semigroup Forum*, 78, 410-426. DOI: 10.1007/s00233-008-9132-y

Dobrynin, A.A., Entringer, R., Gutman, I. (2001). Wiener index of trees: theory and applica-tions. *Acta Applicandae Mathematica*, 66, 211-249. DOI: 10.1023/A:1010767517079

Gutman, I. (1997). A property of the Wiener number and its modifications. *Indian journal of chemistry*, 36A, 128-132.

Ivanciuc, O., Balaban, T.S., Balaban, A.T. (1993). Reciprocal distance matrix, related local vertex invariants and topological indices. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 309-318.

Plavšić, D., Nikolić, S., Trinajstić, N., Mihalić, Z. (1993). On the Harary index for the characterization of chemical graphs. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12, 235–250.

Shegahalli, V.S., Kanabur, R. (2016). Computation of new degree-based topological indices of graphene. *Journal of Mathematics*, 5: 4341919. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2016/4341919

Walikar, H.B., Shigehalli, V.S., Ramane, H.S. (2004). Bounds on the Wiener index of a graph. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 50, 117-132.