www.dergipark.gov.tr
ISSN:2148-3736
El-Cezerî Fen ve Mühendislik Dergisi
Cilt: 8, No: 2, 2021 (1565-1575)

El-Cezerî Journal of Science and Engineering
Vol: 8, No: 2, 2021 (1565-1575)
DOI : 10.31202/ecjse.940871

ECJSE

Makale / Research Paper

Yeni bir matematiksel model: Sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme

Orhan DALKILIÇ[a*]

[a]Mersin Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü. Mersin/TÜRKİYE
orhandlk952495@hotmail.com

Received/Geliş: 22.05.2021 **Accepted/Kabul:** 16.07.2021

Öz: Belirsizlik problemlerine yönelik [0,1] aralığında bir değeri doğru bir şekilde seçmek oldukça zor bir iştir. Ancak, karar vericiler tarafından ifade edilen veri kümeleri çoğu zaman [0,1] aralığındadır. Bu aralıkta ifade edilen verilere güvenerek bir karar verme sürecini yapılandırabilmek birçok hataya sebebiyet verebilir. Son zamanlarda bu duruma dikkat edebilen farklı matematiksel modeller geliştirilmiştir. Bu çalışmada bu amaca yönelik yeni bir matematiksel model olan sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisi tanıtılmıştır. Dahası alt küme, tümleyen, birleşim, kesişim gibi bazı temel küme işlemleri de verilmiştir. Ayrıca önerilen küme teorisi için bir karar verme algoritması önerilerek bir belirsizlik problemi üzerinde nasıl uygulanabileceği örneklendirilmiştir. Son olarak karar vericiler tarafından ifade edilen değerlerin önemini vurgulayan bir karşılaştırmalı analiz verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sezgisel bulanık parametreli esnek küme; Sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme; Karar verme.

A novel mathematical model: Virtual intuitionistic fuzzy parameterized soft set

Abstract: Choosing a value in the range [0,1] correctly for uncertainty problems is a very difficult task. However, the data sets expressed by decision makers are often in the range [0,1]. Structuring a decision-making process by relying on the data expressed in this range can cause many errors. Recently, different mathematical models have been developed that can pay attention to this situation. In this study, virtual intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory, which is a new mathematical model for this purpose, is introduced. Moreover, some basic set operations such as subset, complement, union, intersection are also given. In addition, a decision making algorithm is proposed for the proposed set theory and how it can be applied on an uncertainty problem is exemplified. Finally, a comparative analysis emphasizing the importance of values expressed by decision makers is given.

Keywords: Intuitionistic fuzzy parameterized soft set; Virtual intuitionistic fuzzy parameterized soft set; Decision making.

1. Giriş

Belirsizlik problemini en doğru bir şekilde ifade edebilmek ve bu sayede karar verme sürecini en iyi şekilde yapılandırabilmek en ideale yakın sonuçların elde edilebilmesi için oldukça önemlidir [1, 5]. Bu önemli işin üstesinden gelebilmek için birçok matematiksel model önerilmiş olmasına rağmen halen en ideal sonucu elde edip edemediğimiz konusundaki belirsizlikler süregelmektedir. Literatürü taradığımızda, belirsizliğe yönelik önerilen ilk teorinin Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılan bulanık kümeler olduğunu görüyoruz [6]. Bu ilk matematiksel model yardımıyla bir

Bu makaleye atıf yapmak için
Dalkılıç, O., *"Yeni bir matematiksel model: Sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme"* El-Cezerî Fen ve Mühendislik Dergisi 2021, 8(2); 1565-1575.

How to cite this article
Dalkılıç, O., "*A novel mathematical model: Virtual intuitionistic fuzzy parametrized soft set* " El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2021, 8(2); 1565-1575.
ORCID ID: [a]0000-0003-3875-1398

kümeye bir elemanın aidiyetini $[0,1]$ aralığında bir değer olarak ifade edebiliriz. Bu sayede klasik matematiğin 0 ve 1 olarak,sırasıyla ait değil ve ait anlamı dışına çıkabilmemiz mümkün olmuştur. Daha sonraki yıllarda ise aidiyetlik derecesi yani üyelik derecesinin yanı sıra üye olmama derecesinin de ifade edilmesi, belirsizliğin daha iyi bir şekilde ifade edilebilmesi için bir araç olarak sunuldu ve sezgisel bulanık küme teorisi ortaya atıldı [7]. Belirsizliğe yönelik geliştirilen bu matematiksel modeller oldukça başarılı olmasına rağmen uygulamada pek pratik değillerdir. Molodsov bu durumun asıl nedeninin bir parametrizasyon aracı eksikliği olduğunu düşünmüştür ve 1999 yılında literatüre esnek küme teorisini tanıtmıştır [8]. Bu teori sayesinde belirsizlik problemleri oldukça kolay bir şekilde ifade edilebilmiştir ve bu sayede bu matematiksel yaklaşımla ilişkili birçok çalışma yapılmıştır [9, 20].

Belirsizlik problemlerini ifade ederken ne kadar çok veriye sahipsek o denli başarılı sonuçlara ulaşabilme ihtimalimiz yükselir. Bu nedenle bulanık kümeler, sezgisel bulanık kümeler ve esnek kümelerin birlikte ele alındığı birçok hibrit küme tipi önerilmiştir [21, 31]. Burada bu üç küme tipinin farklı kombinasyonlarıyla oluşturulmuş küme tiplerinin, çalışmamızla ilgili olanlarını aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz:

Bulanık esnek kümeler [32],
Sezgisel bulanık esnek kümeler [25],
Bulanık parametreli esnek kümeler [33],
Sanal bulanık parametreli esnek kümeler [34],
Sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler [35],
Sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler (Bu çalışmada önerilen)

Bu çalışmanın amacı belirsizlik problemlerini en ideale yakın şekilde ifade edebilmek için karar vericiler tarafından ifade edilen verilerin en doğru şekilde belirtilebilmesini sağlayan bir matematiksel model inşa edebilmektir. Bunun için sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisine sanal alt ve üst yaklaşım fonksiyonları eklenerek geliştirilmiştir ve bu sayede sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler önerilmiştir. Bu matematiksel modelin en önemli avantajları aşağıdaki gibidir:

(i) Karar vericiler tarafından ifade edilen üyelik derecesini ve üye olmama derecesini $[0,1]$ aralığında ifade edebilmek oldukça zor bir iş olduğundan bu konuda alt ve üst yaklaşımlar sayesinde olası hata miktarını belirleyebilmek
(ii) Belirsizlik durumlarını ifade eden karar vericiye güveni arttırabilmek
(iii) Karar vericiler tarafından ifade edilmek istenen değerlerin değişkenliğe kolaylıkla uyum sağlayabilmesi sayesinde üç farklı durumun farklı kombinasyonlarını göz ardı etmemek

Bu çalışma daha önceden çalışılan küme teorilerinden farklı olarak karar vericiler tarafından sağlanan veri kümesindeki olası hata miktarlarına odaklanmıştır. Bu sayede belirsizliğe yönelik karar verme sürecinin daha iyi bir şekilde yapılandırılabilmesi amaçlanmıştır. Dahası bu çalışmada önerilen matematiksel yaklaşım için tümleyen, alt küme, birleşim, kesişim gibi temel küme işlemleri bazı ilişkili özellikleriyle birlikte verilmiştir. Ayrıca belirsizlik problemlerine yönelik bir karar verme algoritması önerilmiştir. Son olarak karar vericiler tarafından sağlanan veri kümesinin elde edilen sonuçları ne denli değiştirebileceğini vurgulayan bir karşılaştırmalı analiz verilmiştir.

2. Materyal ve Metod

Bu bölümde çalışmamızda önerilen matematiksel modelin inşasında yararlanılan bazı küme teorileri hakkında hatırlatmalar yapılmıştır. Çalışmamızın geri kalanında; U bir başlangıç evreni, P bir parametre kümesi ve 2^U, U'nun kuvvet kümesi olarak ifade edilmiştir. Ayrıca yazım kolaylığı açısından ondalık değerli sayılar $0.xyz\cdots$ şeklinde ifade etmek yerine $.xyz\cdots$ şeklinde ifade edilmiştir.

Tanım 2.1: [6] $\mu_B: U \to [0,1]$ bir fonksiyon olmak üzere $B = \{(u, \mu_B(u)): u \in U\}$ kümesine U üzerinde bir bulanık küme denir. Burada $\mu_B(u)$ değeri, u elemanının üyelik derecesini belirtir.

Tanım 2.2: [7] $\mu_I: \mathrm{U} \to [0,1]$ ve $\upsilon_I: \mathrm{U} \to [0,1]$ fonksiyonları her $u \in U$ için $0 \leq \mu_I(\mathrm{u}) + \upsilon_I(\mathrm{u}) \leq 1$ olmak üzere U üzerinde ifade edilen $I = \{(u, \mu_I(\mathrm{u}), \upsilon_I(\mathrm{u})): u \in U\}$ kümesine sezgisel bulanık küme denir. Burada μ_I ve υ_I fonksiyonlarına sırasıyla I'nın üyelik fonksiyonu ve üyelik olmama fonksiyonu denir. Ayrıca, $\mu_I(\mathrm{u})$ ve $\upsilon_I(\mathrm{u})$ değerlerine ise sırasıyla $u \in U$'nin üyelik derecesi ve üyelik olmama derecesi olarak ifade edilir.

Çalışma boyunca U üzerindeki tüm sezgisel bulanık kümelerinin ailesi SB(U) şeklinde ifade edilmiştir.

$I, I_1, I_2 \in SB(U)$ olmak üzere sezgisel bulanık kümeler için bazı temel kavramlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) Her $u \in U$ için $\mu_I(\mathrm{u}) = 0$ ve $\upsilon_I(\mathrm{u}) = 1$ ise I boş sezgisel bulanık küme olarak adlandırılır ve $I_\emptyset$ ile gösterilir.

(ii) Her $u \in U$ için $\mu_I(\mathrm{u}) = 1$ ve $\upsilon_I(\mathrm{u}) = 0$ ise I evrensel sezgisel bulanık küme olarak adlandırılır ve I_U ile gösterilir.

(iii) Her $u \in U$ için $\mu_{I_1}(\mathrm{u}) \leq \mu_{I_2}(\mathrm{u})$ ve $\upsilon_{I_2}(\mathrm{u}) \leq \upsilon_{I_1}(\mathrm{u})$ ise I_1, I_2'nin bir sezgisel bulanık alt kümesidir ve $I_1 \breve{\subseteq} I_2$ şeklinde gösterilir.

(iv) I'nın tümleyeni $I^c = \{(u, \upsilon_I(\mathrm{u}), \mu_I(\mathrm{u})): u \in U\}$ şeklindedir.

(v) I_1ve I_2'nin kesişimi $I_1 \breve{\cap} I_2 = \{(u, min\{\mu_{I_1}(\mathrm{u}), \mu_{I_2}(\mathrm{u})\}, max\{\upsilon_{I_1}(\mathrm{u}), \upsilon_{I_2}(\mathrm{u})\}): u \in U\}$ şeklindedir.

(vi) I_1ve I_2'nin birleşimi $I_1 \breve{\cup} I_2 = \{(u, max\{\mu_{I_1}(\mathrm{u}), \mu_{I_2}(\mathrm{u})\}, min\{\upsilon_{I_1}(\mathrm{u}), \upsilon_{I_2}(\mathrm{u})\}): u \in U\}$ şeklindedir.

Tanım 2.3: [8] $f_E: \mathrm{P} \to 2^U$ fonksiyonu için U üzerinde ifade edilen $E = \{(p, f_E(p)): p \in P\}$ kümesine esnek küme denir. Burada f_E, E esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır ve $f_E(p)$, $p \in P$'nin p-yaklaşım değeridir.

Dikkat edilmelidir ki; $f_E(p) = \emptyset$ ise $(p, f_E(p))$ elemanı E esnek kümesinde ifade edilmez.

Tanım 2.4: [35] I, P üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere U üzerinde bir sezgisel bulanık parametreli esnek küme

$$\Upsilon_\mathrm{I} = \left\{\left(\frac{p}{(\mu_I(\mathrm{p}), \upsilon_I(\mathrm{p}))}, f_I(\mathrm{p})\right):\ \mathrm{p} \in \mathrm{P};\ \mu_I(\mathrm{p}), \upsilon_I(\mathrm{p}) \in [0,1]; f_I(\mathrm{p}) \in 2^U\right\} \tag{1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mu_I: P \to [0,1]$, $\upsilon_I: P \to [0,1]$ ve $f_I: P \to 2^U$ dir. Ayrıca, μ_I ve υ_I sırasıyla Υ_I sezgisel bulanık parametreli esnek kümenin üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonudur. Dahası, $\mu_I(\mathrm{p}) = 0$ ve $\upsilon_I(\mathrm{p}) = 1$ ise $f_I(\mathrm{p}) = \emptyset$ dir.

Tanım 2.5: [34] I, $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ üzerinde bir sezgisel bulanık küme olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq n$ değeri için her $0 \leq \underline{\alpha_i} < \mu_I(p_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine, bir alt sanal parametre kümesi denir ve $\underline{P} = \left\{p_{\overline{1}}^{\alpha_1}, p_{\overline{2}}^{\alpha_2}, \ldots, p_{\overline{n}}^{\alpha_n}\right\}$ şeklinde ifade edilir. Burada $p_{\overline{i}}^{\alpha_i}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "p_i parametresinin α_i sayısınca OLUMSUZ YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ". Benzer şekilde; $1 \leq i \leq n$ değeri için her $0 \leq \overline{\alpha_i} \leq 1 - \mu_I(p_i)$ değerine karşılık gelerek yazılabilecek parametre kümesine bir üst sanal parametre kümesi denir ve $\overline{P} = \left\{p_1^{\overline{\alpha_1}}, p_2^{\overline{\alpha_2}}, \dots, p_n^{\overline{\alpha_n}}\right\}$ şeklinde ifade edilir. Burada $p_i^{\overline{\alpha_i}}$ parametresi şu anlama gelmektedir: "p_i parametresinin α_i sayısınca OLUMLU YÖNDE GELİŞİM PARAMETRESİ".

3. Sanal Sezgisel Bulanık Parametreli Esnek Küme Teorisi

Bu bölümde sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisinin bir genellemesi olan sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler inşa edilmiştir. Ayrıca sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümelerin tümleyeni, alt kümesi, birleşimi ve kesişimi gibi temel küme işlemleri incelenmiştir.

Tanım 3.1: $\underline{\mathrm{I}}$ ve $\overline{\mathrm{I}}$ sırasıyla $\underline{\mathrm{P}}$ ve $\overline{\mathrm{P}}$ üzerinde iki sezgisel bulanık küme olmak üzere $\underline{\mathrm{P}} = \left\{\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}} : 0 \le \underline{\alpha^1} \le \mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{p}), 0 \le \underline{\alpha^2} \le 1 - \eta_{\mathrm{X}}(\mathrm{p})\right\}$ ve $\overline{\mathrm{P}} = \left\{\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}} : 0 \le \overline{\alpha^1} \le 1 - \mu_{\mathrm{X}}(\mathrm{p}), 0 \le \overline{\alpha^2} \le \eta_{\mathrm{X}}(\mathrm{p})\right\}$ kümeleri sırasıyla bir alt sanal parametre kümesi ve bir üst sanal parametre kümesi olsun. Bu durumda U üzerindeki bir Ψ_{I} sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme

$$\underline{\Upsilon_{\mathrm{I}}} = \left\{\left(\frac{p}{\left[\mu_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}\right), \upsilon_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}\right)\right]}, \underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)\right) : \begin{array}{c} \mathrm{p} \in \mathrm{P}, \\ \mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{\mathrm{P}} \\ 0 \le \underline{\alpha^1} \le \mu_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}) \\ 0 \le \underline{\alpha^2} \le 1 - \upsilon_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}) \end{array}, \underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) \in 2^U\right\} \quad (2)$$

$$\Upsilon_{\mathrm{I}} = \left\{\left(\frac{p}{[\mu_I(\mathrm{p}), \upsilon_I(\mathrm{p})]}, f_I(\mathrm{p})\right) : \ \mathrm{p} \in \mathrm{P};\ \mu_I(p), \upsilon_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}) \in [0,1]; f_I(p) \in 2^U\right\} \quad (3)$$

$$\overline{\Upsilon_{\mathrm{I}}} = \left\{\left(\frac{p}{\left[\mu_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right), \upsilon_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right)\right]}, \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)\right) : \begin{array}{c} \mathrm{p} \in \mathrm{P} \\ \mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{\mathrm{P}} \\ 0 \le \overline{\alpha^1} \le 1 - \mu_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}) \\ 0 \le \overline{\alpha^2} \le \upsilon_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}) \end{array}, \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \in 2^U\right\} \quad (4)$$

$$\Psi_{\mathrm{I}} = \underline{\Upsilon_{\mathrm{I}}} \cup \Upsilon_{\mathrm{I}} \cup \overline{\Upsilon_{\mathrm{I}}} \quad (5)$$

şeklinde ifade edilen (5) eşitliğidir ve (2), (3), (4) kümelerinin birleşimidir. Burada $\underline{f_I}: \underline{P} \to 2^U$, $f_I: P \to 2^U$ ve $\overline{f_I}: \overline{P} \to 2^U$ fonksiyonlarına sırasıyla Ψ_{I}'nın sanal alt yaklaşım fonksiyonu, Ψ_{I}'nın yaklaşım fonksiyonu ve Ψ_{I}'nın sanal üst yaklaşım fonksiyonu denir. Dahası; $\mu_{\underline{\mathrm{I}}}: \underline{\mathrm{P}} \to [0,1]$, $\upsilon_{\underline{\mathrm{I}}}: \underline{\mathrm{P}} \to [0,1]$ ve $\mu_{\overline{\mathrm{I}}}: \overline{\mathrm{P}} \to [0,1]$, $\upsilon_{\overline{\mathrm{I}}}: \overline{\mathrm{P}} \to [0,1]$ fonksiyonları için $\mu_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}\right) = \mu_I(\mathrm{p}) - \underline{\alpha^1}$, $\upsilon_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}\right) = \upsilon_I(\mathrm{p}) + \underline{\alpha^2}$ ve $\mu_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right) = \mu_I(\mathrm{p}) + \overline{\alpha^1}$, $\upsilon_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right) = \upsilon_I(\mathrm{p}) - \overline{\alpha^2}$ eşitlikleri geçerlidir.

Burada; $\mu_I(\mathrm{p}) = 0$ ve $\upsilon_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}) = 1$ ise $f_I(\mathrm{p}) = \emptyset$ dir. Benzer şekilde $\mu_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}\right) = 0$ ve $\upsilon_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}\right) = 1$ ise $\underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) = \emptyset$ ve dahası, $\mu_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right) = 0$ ve $\upsilon_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right) = 1$ ise $\overline{f_I}(\mathrm{p}^{\overline{\alpha}}) = \emptyset$ dir.

Burada yaklaşım fonksiyonlarındaki tanım kümesi için mevcut parametrelerin üyelik ve üye olmama değerlerinin değişkenliğini matematiksel olarak ifade edilebilmesi amacıyla $\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}} = p^{\left[\underline{\alpha^1}, \underline{\alpha^2}\right]}$ ve $\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}} = p^{\left[\overline{\alpha^1}, \overline{\alpha^2}\right]}$ gösterimleri tercih edilmiştir.

Çalışma boyunca U üzerindeki tüm sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümelerinin ailesi $SSBPEK(\mathrm{U})$ şeklinde ifade edilmiştir.

Özellik 3.1: $\Psi_I \in SSBPEK(U)$ olsun. O halde; her $p \in P, p^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{P}, p^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{P}$ için $s\left(\overline{f_I}\left(p^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)\right) \leq s(f_I(p)) \leq s\left(\underline{f_I}\left(p^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)\right)$ eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: İlk olarak $0 \leq \underline{\alpha^1} \leq \mu_I(p)$ için $\mu_{\underline{I}}\left(p^{\underline{\alpha^1}}\right) = \mu_I(p) - \underline{\alpha^1}$ ve $0 \leq \underline{\alpha^2} \leq 1 - \upsilon_I(p)$ için $\upsilon_{\underline{I}}\left(p^{\underline{\alpha^2}}\right) = \upsilon_I(p) + \underline{\alpha^2}$ olduğundan $s(f_I(p)) \leq s\left(\underline{f_I}\left(p^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)\right)$ gerçeklenir. Benzer şekilde; $0 \leq \overline{\alpha^1} \leq 1 - \mu_I(p)$ için $\mu_{\overline{I}}\left(p^{\overline{\alpha^1}}\right) = \mu_I(p) + \overline{\alpha^1}$ ve $0 \leq \overline{\alpha^2} \leq \upsilon_I(p)$ için $\upsilon_{\overline{I}}\left(p^{\overline{\alpha^2}}\right) = \upsilon_I(p) - \overline{\alpha^2}$ olduğundan $s\left(\overline{f_I}\left(p^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)\right) \leq s(f_I(p))$ gerçeklenir. Dolayısıyla istenen eşitsizlik sağlanır.

Örnek 3.1: Nesnelerin kümesi ve parametrelerin kümesi sırasıyla $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ve $P = \{p_1, p_2\}$, $\underline{P} = \left\{p_1^{\underline{\alpha_1^{1,2}}}, p_2^{\underline{\alpha_2^{1,2}}}\right\}$, $\overline{P} = \left\{p_1^{\overline{\alpha_1^{1,2}}}, p_2^{\overline{\alpha_2^{1,2}}}\right\}$ şeklinde verilmiş olsun. Dahası; $\underline{P}$, P, $\overline{P}$ parametre kümeleri üzerindeki sezgisel bulanık kümeler sırasıyla $\underline{I} = \left\{\frac{p_1}{[.2,.8]}, \frac{p_2}{[.2,.7]}\right\}$, $I = \left\{\frac{p_1}{[.5,.5]}, \frac{p_2}{[.55,.3]}\right\}$, $\overline{I} = \left\{\frac{p_1}{[.6,.3]}, \frac{p_2}{[.7,.2]}\right\}$ olsun. Bu parametrelere dayanarak yaklaşım fonksiyonları ise aşağıdaki gibi verilsin:

$$\underline{f_I}\left(p_1^{[.3,.3]}\right) = \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}, \qquad \underline{f_I}\left(p_2^{[.35,.4]}\right) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$
$$f_I(p_1) = \{u_2, u_3, u_5, u_6\}, \qquad f_I(p_2) = \{u_2, u_3, u_4, u_5\},$$
$$\overline{f_I}\left(p_1^{[.1,.2]}\right) = \{u_3, u_5, u_6\}, \qquad \overline{f_I}\left(p_2^{[.15,.1]}\right) = \{u_2, u_3, u_4\}$$

Burada; seçilen değerler rastgele değildir. Örneğin, p_1 için $\underline{\alpha_1^{1,2}}$ ifadesi, $0 \leq \underline{\alpha_1^1} = .3 \leq .5$, $0 \leq \underline{\alpha_1^2} = .3 \leq .5$ ve $\overline{\alpha_1^{1,2}}$ ifadesi ise, $0 \leq \overline{\alpha_1^1} = .1 \leq .5$, $0 \leq \overline{\alpha_1^2} = .2 \leq .5$ aralığından seçilen değerlerdir. Bu durumda Υ_X sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Psi_I = \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{p_1}{[.2,.8]}, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{p_2}{[.2,.7]}, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}\right), \\ \left(\frac{p_1}{[.5,.5]}, \{u_2, u_3, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{p_2}{[.55,.3]}, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}\right), \\ \left(\frac{p_1}{[.6,.3]}, \{u_3, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{p_2}{[.7,.2]}, \{u_2, u_3, u_4\}\right) \end{array}\right\}.$$

Dikkat edilmelidir ki; Υ_X sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümesi üç tane sezgisel bulanık parametreli esnek kümenin birleşimiyle ifade edilmiştir;

$$\underline{\Upsilon_I} = \left\{\left(\frac{p_1}{[.2,.8]}, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{p_2}{[.2,.7]}, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}\right)\right\},$$
$$\Upsilon_I = \left\{\left(\frac{p_1}{[.5,.5]}, \{u_2, u_3, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{p_2}{[.55,.3]}, \{u_2, u_3, u_4, u_5\}\right)\right\},$$
$$\overline{\Upsilon_I} = \left\{\left(\frac{p_1}{[.6,.3]}, \{u_3, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{p_2}{[.7,.2]}, \{u_2, u_3, u_4\}\right)\right\}.$$

Tanım 3.2: $\Psi_I \in SSBPEK(U)$ olmak üzere

(i) her $p^{\overline{\alpha^1}}, p^{\overline{\alpha^2}} \in \overline{P}$ için $\mu_{\overline{I}}\left(p^{\overline{\alpha^1}}\right) = 0$, $\upsilon_{\overline{I}}\left(p^{\overline{\alpha^2}}\right) = 1$ ise Ψ_I'e, boş sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme denir ve $\Psi_\emptyset$ ile gösterilir.

(ii) her $p^{\underline{\alpha^1}}, p^{\underline{\alpha^2}} \in \underline{P}$ için $\mu_{\underline{I}}\left(p^{\underline{\alpha^1}}\right) = 1$, $\upsilon_{\underline{I}}\left(p^{\underline{\alpha^2}}\right) = 0$ iseΨ_I'e, evrensel sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme denir ve Ψ_P ile gösterilir.

Tanım 3.3: $\Psi_I, \Psi_L \in SSBPEK(U)$ için

i) her $\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{\mathrm{P}}$ için $\mu_{\underline{I}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}) \leq \mu_{\underline{L}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}})$, $\upsilon_{\underline{I}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}) \geq \upsilon_{\underline{L}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}})$ ve $\underline{f_I}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}) \subseteq \underline{f_L}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}})$

ii) her $p \in \mathrm{P}$ için $\mu_I(\mathrm{p}) \leq \mu_L(\mathrm{p})$, $\upsilon_I(\mathrm{p}) \geq \upsilon_L(\mathrm{p})$ ve $f_I(\mathrm{p}) \subseteq f_L(\mathrm{p})$

iii) her $\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{\mathrm{P}}$ için $\mu_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right) \leq \mu_{\overline{L}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right)$, $\upsilon_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right) \geq \upsilon_{\overline{L}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right)$ ve $\overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \subseteq \overline{f_L}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)$

olmak üzere Ψ_I, Ψ_L'nin sanal sezgisel bulanık parametreli esnek alt kümedir ve $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{L}$ şeklinde gösterilir. Eğer $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{L}$ ve $\Psi_\mathrm{L} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{I}$ ise Ψ_I ve Ψ_L sanal sezgisel bulanık parametreli esnek eşittir denir ve $\Psi_\mathrm{I} = \Psi_\mathrm{L}$ şeklinde gösterilir.

Özellik 3.2: $\Psi_\mathrm{I}, \Psi_\mathrm{L}, \Psi_\mathrm{K} \in SSBPEK(\mathrm{U})$ için

i) $\Psi_\emptyset \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{I}$

ii) $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{I}$

iii) $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{L}$ ve $\Psi_\mathrm{L} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{K}$ ise $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{K}$

iv) $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{L}$ ve $\Psi_\mathrm{L} \mathrel{\hat{\sqsubseteq}} \Psi_\mathrm{I}$ ise $\Psi_\mathrm{I} = \Psi_\mathrm{L}$

Kanıt: Kanıt oldukça basittir.

Tanım 3.4: $\Psi_\mathrm{I} \in SSBPEK(\mathrm{U})$ olsun. Ψ_I'in tümleyeni Ψ_I^c olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlar:

i) $\underline{I}$, $\underline{I^c}$; P üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\underline{I^c}$, $\underline{I}$'nin sezgisel bulanık küme tümleyeni ve her $\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{\mathrm{P}}$ için $\underline{f_{I^c}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}) = U - \underline{f_I}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}})$.

ii) I, I^c; P üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere I^c, I'nin sezgisel küme tümleyeni ve her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ için $f_{I^c}(p) = U - f_I(p)$.

iii) $\overline{I}$, $\overline{I^c}$; P üzerinde bir sezgisel bulanık küme olmak üzere $\overline{I^c}$, $\overline{I}$'nin sezgisel bulanık küme tümleyeni ve her $\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{\mathrm{P}}$ için $\overline{f_{I^c}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) = U - \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)$.

Örnek 3.2: Örnek 3.1'i ele alalım. Bu durumda Ψ_I sanal sezgisel bulanık küme tümleyeni aşağıdaki gibidir:

$$\Psi_I^c = \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{\mathrm{p}_1}{[.8,.2]}, \{\mathrm{u}_1\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_2}{[.7,.2]}, \{\mathrm{u}_6\}\right), \\ \left(\frac{\mathrm{p}_1}{[.5,.5]}, \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_4\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_2}{[.3,.55]}, \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_6\}\right), \\ \left(\frac{\mathrm{p}_1}{[.3,.6]}, \{\mathrm{u}_1, u_2, u_4\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_2}{[.2,.7]}, \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_5, u_6\}\right) \end{array} \right\}.$$

Tanım 3.5: $\Psi_\mathrm{I}, \Psi_\mathrm{L} \in SSBPEK(\mathrm{U})$ olmak üzere Ψ_I, Ψ_L sanal sezgisel bulanık kümelerinin birleşimi

i) her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ ve $\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\beta^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\gamma^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\beta^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\gamma^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\underline{\beta^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\underline{\gamma^{1,2}}} \in \underline{\mathrm{P}}$ için $\mu_{\underline{\mathrm{IUL}}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\gamma^1}}\right) = \max\left\{\mu_{\underline{I}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}), \mu_{\underline{L}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\upsilon_{\underline{\mathrm{IUL}}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\gamma^2}}\right) = \min\left\{\upsilon_{\underline{I}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}), \upsilon_{\underline{L}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\underline{f_{I\cup L}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\gamma^{1,2}}}\right) = \underline{f_I}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}) \cup \underline{f_L}\left(\mathrm{p}^{\underline{\beta^{1,2}}}\right)$ fonksiyonları,

ii) her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ için $\mu_{\mathrm{IUL}}(\mathrm{p}) = \max\{\mu_\mathrm{I}(\mathrm{p}), \mu_\mathrm{L}(\mathrm{p})\}$, $\upsilon_{\mathrm{IUL}}(\mathrm{p}) = \min\{\upsilon_\mathrm{I}(\mathrm{p}), \upsilon_\mathrm{L}(\mathrm{p})\}$ ve $f_{I\cup L}(\mathrm{p}) = f_I(\mathrm{p}) \cup f_L(\mathrm{p})$ fonksiyonları,

iii) her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ ve $\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\beta^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\gamma^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\beta^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\gamma^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\overline{\beta^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\overline{\gamma^{1,2}}}, \in \overline{\mathrm{P}}$ için $\mu_{\overline{\mathrm{IUL}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\gamma^1}}\right) = \max\left\{\mu_{\overline{\mathrm{I}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right), \mu_{\overline{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\upsilon_{\overline{\mathrm{IUL}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\gamma^2}}\right) = \min\left\{\upsilon_{\overline{\mathrm{I}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right), \upsilon_{\overline{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\overline{f_{I\cup L}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\gamma^{1,2}}}\right) = \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \cup \overline{f_L}\left(\mathrm{p}^{\overline{\beta^{1,2}}}\right)$ fonksiyonları

koşullarının gerçeklenmesi ile elde edilir ve $\Psi_\mathrm{I} \mathrel{\hat{\sqcup}} \Psi_\mathrm{L}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca; Ψ_I, Ψ_L sanal sezgisel bulanık kümelerinin kesişimi benzer şekilde,

i) her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ ve $\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\beta^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\gamma^1}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\beta^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\gamma^2}}, \mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\underline{\beta^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\underline{\gamma^{1,2}}} \in \underline{\mathrm{P}}$ için $\mu_{\underline{\mathrm{I} \cap \mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\gamma^1}}\right) = \min\left\{\mu_{\underline{I}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}), \mu_{\underline{L}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\upsilon_{\underline{\mathrm{I} \cap \mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\gamma^2}}\right) = \max\left\{\upsilon_{\underline{I}}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}), \upsilon_{\underline{L}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\underline{f_{I \cap L}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\gamma^{1,2}}}\right) = \underline{f_I}(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}) \cap \underline{f_L}\left(\mathrm{p}^{\underline{\beta^{1,2}}}\right)$ fonksiyonları,

ii) her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ için $\mu_{\mathrm{I} \cap \mathrm{L}}(\mathrm{p}) = \min\{\mu_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}), \mu_{\mathrm{L}}(\mathrm{p})\}$, $\upsilon_{\mathrm{I} \cap \mathrm{L}}(\mathrm{p}) = \max\{\upsilon_{\mathrm{I}}(\mathrm{p}), \upsilon_{\mathrm{L}}(\mathrm{p})\}$ ve $f_{I \cap L}(\mathrm{p}) = f_I(\mathrm{p}) \cap f_L(\mathrm{p})$ fonksiyonları,

iii) her $\mathrm{p} \in \mathrm{P}$ ve $\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\beta^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\gamma^1}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\beta^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\gamma^2}}, \mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\overline{\beta^{1,2}}}, \mathrm{p}^{\overline{\gamma^{1,2}}}, \in \overline{\mathrm{P}}$ için $\mu_{\overline{\mathrm{I} \cap \mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\gamma^1}}\right) = \min\left\{\mu_{\overline{\mathrm{I}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right), \mu_{\overline{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\beta^1}}\right)\right\}$, $\upsilon_{\overline{\mathrm{I} \cap \mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\gamma^2}}\right) = \max\left\{\upsilon_{\overline{\mathrm{I}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right), \upsilon_{\overline{\mathrm{L}}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\beta^2}}\right)\right\}$ ve $\overline{f_{I \cap L}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\gamma^{1,2}}}\right) = \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \cap \overline{f_L}\left(\mathrm{p}^{\overline{\beta^{1,2}}}\right)$ fonksiyonları

olup $\Upsilon_{\mathrm{X}} \hat{\sqcap} \Upsilon_{\mathrm{Y}}$ şeklinde gösterilir.

Özellik 3.3: $\Psi_{\mathrm{I}}, \Psi_{\mathrm{L}}, \Psi_{\mathrm{K}} \in SSBPEK(\mathrm{U})$ olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir,

i) $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_{\mathrm{I}}$ ve $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_{\mathrm{I}}$
ii) $\Psi_{\emptyset} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_{\mathrm{I}}$ ve $\Psi_{\emptyset} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_{\emptyset}$
iii) $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\emptyset} = \Psi_{\mathrm{I}}$ ve $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\emptyset} = \Psi_{\emptyset}$
iv) $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{P}} = \Psi_{\mathrm{P}}$ ve $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{P}} = \Psi_{\mathrm{I}}$
v) $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{L}} = \Psi_{\mathrm{L}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{I}}$ ve $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{L}} = \Psi_{\mathrm{L}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{I}}$
vi) $(\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{L}}) \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{K}} = \Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} (\Psi_{\mathrm{L}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{K}})$ ve $(\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{L}}) \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{K}} = \Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} (\Psi_{\mathrm{L}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{K}})$

Kanıt: Tanım 3.5'ten açıktır.

Özellik 3.4: $\Psi_{\mathrm{I}}, \Psi_{\mathrm{L}} \in SSBPEK(\mathrm{U})$olmak üzere De Morgan kuralları gerçeklenir,
i) $(\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{c}} = \Psi_{\mathrm{I}}^{\mathrm{c}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{L}}^{\mathrm{c}}$
ii) $(\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{L}})^{\mathrm{c}} = \Psi_{\mathrm{I}}^{\mathrm{c}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{L}}^{\mathrm{c}}$

Kanıt: Tanım 3.4 ve 3.5'ten faydalanılarak kolayca gösterilebilir.

Özellik 3.5: $\Psi_{\mathrm{I}}, \Psi_{\mathrm{L}}, \Psi_{\mathrm{K}} \in SSBPEK(\mathrm{U})$ olmak üzere aşağıdakiler gerçeklenir,
i) $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} (\Psi_{\mathrm{L}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{K}}) = (\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{L}}) \hat{\sqcap} (\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{K}})$
ii) $\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} (\Psi_{\mathrm{L}} \hat{\sqcup} \Psi_{\mathrm{K}}) = (\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{L}}) \hat{\sqcup} (\Psi_{\mathrm{I}} \hat{\sqcap} \Psi_{\mathrm{K}})$

Kanıt: Özellik 3.3'ten açıktır.

4. Belirsizlik problemlerine yönelik bir karar verme yaklaşımı

Bu bölümde karar vericiler tarafından ifade edilen veri kümesinin daha doğru bir şekilde tespit edilebilmesini amaçlayan sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisine dayanan bir karar verme yaklaşımı önerilmiştir. Ayrıca, önerilen bu algoritmanın bir belirsizlik problemine nasıl uygulanabileceği de örneklendirilmiştir. Son olarak sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme ve sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorileri karşılaştırılarak karar vericilerin ifade ettiği veri kümesindeki olası hata paylarını dikkate almanın ne denli önemli olduğu vurgulanmıştır.

Sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler yardımıyla karar vericilerin olası hata paylarını da dikkate almayı amaçlayan karar verme algoritması aşağıdaki gibi inşa edilmiştir:

Algoritma:

Adım 1. Parametre kümeleri $\underline{P}, P, \overline{P}$; nesnelerin kümesi U ve $\underline{I}, I, \overline{I}$ sırasıyla $\underline{P}, P, \overline{P}$ parametre kümelerinin üzerinde bir sezgisel bulanık küme olarak gir.
Adım 2. Mevcut belirsizlik problemini karar verici tarafından ifade edilen veri kümesinden faydalanılarak bir Ψ_{I} sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme yardımıyla ifade et.

Adım 3. Her $u \in U$ için her bir nesnenin "NET" değerini aşağıdaki formülasyon yardımıyla hesapla:

$$\mathrm{N}_{\Psi_\mathrm{I}}(\mathrm{u}) = \frac{1}{3|\mathrm{P}|}\begin{bmatrix} \sum_{\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}} \in \underline{\mathrm{P}}}\left(\mu_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^1}}\right)\left[1-\upsilon_{\underline{I}}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^2}}\right)\right]\right)\chi_{\underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}(\mathrm{u}) + \\ \sum_{\mathrm{p}\in\mathrm{P}}\left(\mu_I(\mathrm{p})\left[1-\upsilon_I(\mathrm{p})\right]\right)\chi_{f_I(\mathrm{p})}(\mathrm{u}) + \\ \sum_{\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}} \in \overline{\mathrm{P}}}\left(\mu_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^1}}\right)\left[1-\upsilon_{\overline{I}}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^2}}\right)\right]\right)\chi_{\overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}(\mathrm{u}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Burada $|\mathrm{P}|$, P'nin kardinalitesini ifade etmektedir. Ayrıca

$$\chi_{\underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}(\mathrm{u}) = \begin{cases} 1, & u \in \underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) \\ 0, & u \notin \underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right) \end{cases}, \tag{7}$$

$$\chi_{f_I(\mathrm{p})}(\mathrm{u}) = \begin{cases} 1, & u \in f_I(\mathrm{p}) \\ 0, & u \notin f_I(\mathrm{p}) \end{cases}, \tag{8}$$

$$\chi_{\overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)} = \begin{cases} 1, & u \in \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \\ 0, & u \notin \overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right) \end{cases}, \tag{9}$$

Burada; (7), (8) ve (9) ile ifade edilen $\chi_{\underline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\underline{\alpha^{1,2}}}\right)}: U \to [0,1]$, $\chi_{f_I(\mathrm{p})}: U \to [0,1]$, $\chi_{\overline{f_I}\left(\mathrm{p}^{\overline{\alpha^{1,2}}}\right)}: U \to [0,1]$ fonksiyonları birer karakteristik fonksiyonlardır.

Adım 4. $\mathrm{N}_{\Psi_\mathrm{I}}(u_l) = \max\{\mathrm{N}_{\Psi_\mathrm{I}}(u_k): u_k \in \mathrm{U}\}$ hesapla.

Adım 5. Belirsizlik probleminde istenilen koşulları sağlayan en iyi nesne u_l'dir.

Şimdi, verilen algoritmanın bir belirsizlik problemi üzerinde nasıl uygulanabileceğini örnekleyelim:

Problem: Bir işyerinde bir poziyonun doldurulmak istendiğini varsayalım. Pozisyona başvuran adayların kümesi $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$'dir. İnsan kaynakları bölümünden bir karar verici tarafından belirlenen parametrelerin kümesi ise $P = \{p_1, p_2, p_3\}$'dir. Karar verici belirlediği parametrelerin hangi üyelik ve üye olmama derecelerinde olması gerektiği konusunda kararsız kalmıştır. Bir başka değişle işe alınacak adayın parametreleri ne denli sağlayıp sağlamaması konusunda ifade edeceği üyelik derecelerini belirlemek oldukça güçtür. Nitekim $[0,1]$ aralığında bu değerin tam olarak ifade edilebilmesi oldukça zor bir iştir. Bu nedenle her bir parametrenin bir alt değerini ve bir üst değerini de ifade etmiştir ve parametre kümeleri karar verici tarafından aşağıdaki gibi belirtilmiştir;

$$\underline{\mathrm{P}} = \left\{\frac{\mathrm{p}_1}{[.3, .65]}, \frac{\mathrm{p}_2}{[.26, .5]}, \frac{\mathrm{p}_3}{[.45, .5]}\right\},$$
$$\mathrm{P} = \left\{\frac{\mathrm{p}_1}{[.45, .5]}, \frac{\mathrm{p}_2}{[.4, .45]}, \frac{\mathrm{p}_3}{[.56, .4]}\right\},$$
$$\overline{\mathrm{P}} = \left\{\frac{\mathrm{p}_1}{[.74, .3]}, \frac{\mathrm{p}_2}{[.6, .35]}, \frac{\mathrm{p}_3}{[.7, .3]}\right\}$$

Şimdi karar verici tarafından belirtilen üyelik derecelerine ve üyelik olmama derecelerine göre yapılan değerlendirme sonuçlarını bir Ψ_I sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edelim:

$$\Psi_\mathrm{I} = \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{\mathrm{p}_1}{[.3, .65]}, \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_6, u_7\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_2}{[.26, .5]}, \{u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}\right), \\ \left(\frac{\mathrm{p}_3}{[.45, .5]}, \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_1}{[.45, .5]}, \{u_1, u_2, u_4, u_5, u_7\}\right), \\ \left(\frac{\mathrm{p}_2}{[.4, .45]}, \{u_2, u_3, u_5, u_6\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_3}{[.56, .4]}, \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_7\}\right), \\ \left(\frac{\mathrm{p}_1}{[.74, .3]}, \{u_1, u_2, u_5, u_7\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_2}{[.6, .35]}, \{u_2, u_3, u_5\}\right), \left(\frac{\mathrm{p}_3}{[.7, .3]}, \{u_1, u_3, u_5\}\right) \end{array}\right\}.$$

Belirsizlik problemini karar verici tarafından bize aktarılan verilere dayanarak Ψ_{I} sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümesi formunda yazabildik. Bu sayede her bir aday için "NET değerleri kolaylıkla elde edilebilir ve aşağıdaki değerlere ulaşılır:

$$\mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_1) = .211, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_2) = .2387, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_3) = .199, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_4) = .0512$$
$$\mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_5) = .2932, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_6) = .112 \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_7) = .146$$

Böylece $\max\{\mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_k) : u_k \in \mathrm{U}\} = .2932 = \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_5)$ elde edilir. Sonuç olarak u_5 adayı istenilen pozisyon için en uygun adaydır.

4.1. Bir karşılaştırmalı analiz

Burada, karar vericiler tarafından ifade edilen verilerin (yani $[0,1]$ aralığında ifade edilmesi gereken üyelik ve üye olmama dereceleri) olası hata payını dikkate almanın ne kadar önemli olabileceğine yönelik bir karşılaştırmalı analiz verilıştir. Bunun için sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme ve sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorileri ele alınmıştır.

Eşit şartlarda bir durumun oluşabilmesi için yukarıda verilen belirsizlik problemi her iki küme teorisi için de ele alınmıştır. Benzer şekilde önerilen karar verme algoritması sanal alt ve üst yaklaşım fonksiyonu çıkarılarak sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisi için düşünülmüştür. Bu durumda elde edilen her bir nesnenin "NET" değerleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_1) = .187, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_2) = .260, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_3) = .185, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_4) = .075$$
$$\mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_5) = .260, \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_6) = .185 \quad \mathrm{N}_{\Psi_{\mathrm{I}}}(u_7) = .187$$

Sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisi için hesaplanan "NET" değerlerinden de görüldüğü gibi birçok aday aynı değeri almıştır. Bu durumda en iyi adayın seçimi konusunda bir belirsizlik söz konusudur. Aslında Tanım 3.1.'den dolayı bu sonuçların elde edilmesi beklenen bir durumdur. Burada bu karşılaştırmayla biz aşağıdaki durumları vurgulamayı amaçladık:

(i) Karar vericilerin üyelik ve üye olmama derecelerini $[0,1]$ aralığında en doğru şekilde belirleyebilmesi oldukça zor bir iştir.
(ii) Karar vericiler tarafından ifade edilen veri kümesine doğrudan güvenmemeliyiz ve bu konuda karar vericilerden daha fazla veri almalıyız.
(iii) Belirsizlik problemlerini ifade edebilmede ne kadar fazla veri kümesine sahip olabilirsek hiç şüphesiz elde edilen sonuçlar ideale daha fazla yakın olur.

5. Tartışma ve Sonuçlar

Bu çalışmada belirsizlik problemlerine yönelik karar verme sürecini daha iyi bir şekilde yapılandırabilmek için yeni bir hibrit küme tipi olan sanal sezgisel bulanık parametreli esnek küme teorisi önerilmiştir. Bu matematiksel modelin en önemli avantajı karar vericinin ifade ettiği veri kümesindeki olası hata payını dikkate almasıdır. Bu sayede karar verme sürecinde daha ideale yakın sonuçların elde edilebilmesi amaçlanmıştır. Dahası sanal sezgisel bulanık parametreli esnek kümeler için alt küme, tümleyen, birleşim, kesişim gibi temel küme işlemleri ve ilişkili bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu hibrit küme tipine odaklanan bir karar verme algoritması önerilmiştir. Algoritmanın bir belirsizlik problemi üzerinde nasıl uygulanabileceği de örneklendirilmiş olup bazı önemli noktalar vurgulanmıştır. Son olarak bir karşılaştırmalı analiz yapılmıştır. Özellikle karar vericinin ifade ettiği veri kümesindeki olası yanılmalara odaklanan bu hibrit küme tipinin belirsizliğe yönelik yapılan çalışmalar için bir motivasyon aracı olabileceği düşünülmektedir.

Yazar(lar)ın Katkıları

Bu çalışma tek isimlidir ve tüm teorik hesaplamalar Orhan Dalkılıç tarafından yapılmıştır. Çalışmada önerilen matematiksel model ve karar verme algoritması Orhan Dalkılıç tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Yazar makalenin son halini okudu ve onayladı.

Çıkar Çatışması

Yazarlar, çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar

[1]. Keskenler, M. F., Keskenler, E. F., Solution And Performance Analysis Of Subset Sum Problem With A New Metaheuristic Approach, El-Cezeri Journal of Science and Engineering, 2020, 7 (2): 503-512.
[2]. Erdoğmuş, P., Çolak, B., Durdağ, Z., K-Means Algoritması İle Otomatik Kümeleme, El-Cezeri Journal of Science and Engineering, 2016, 3 (2): 315-323.
[3]. Göztok, K. K., Uçurum, M., Özdemir, A., Bulanık İstatistiksel Proses Kontrol Tekniği İle 19x39x19 cm Bims Hafif Yapı Malzemesi Üretiminin Analizi, El-Cezeri Journal of Science and Engineering, 2020, 7 (1): 43-56.
[4]. Akkaş, Ö. P., Ertugrul, C. A. M., Optimal Operation of a Virtual Power Plant in a Day Ahead Market Considering Uncertainties of Renewable Generation and Risk Evaluation, El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2020, 7 (2): 448-460.
[5]. Hasıloğlu, A., Altay, S. Y., Ertaş, U. The Use of Spatio-Temporal Data Mining for Detection and Interpretation of Trajectory Outliers in Health Care Services, El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2017, 4 (3): 411-428.
[6]. Zadeh, L.A., Fuzzy sets, Information and Control, 1965, 8: 338-353.
[7]. Atanassov, K.T., Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1): 87–96.
[8]. Molodtsov, D.A., Soft Set Theory–First Results, Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37 (4–5): 19–31.
[9]. Selvakumari, K., Solving Game Problem Using Weighted Soft Sets, Journal of Computer and Mathematical Sciences, 2018, 9 (10): 1307-1311.
[10]. Saeed, M., Ahmad, M.R., Saqlain, M., Riaz, M., Rudiments N-framed soft sets, Punjab University Journal of Mathematics, 2020, 52 (5): 15-30.
[11]. Demirtaş, N., Dalkılıç, O., An application in the diagnosis of prostate cancer with the help of bipolar soft rough sets, on Mathematics and Mathematics Education, 2019, 283.
[12]. Deli, I., Çağman, N., Application of soft sets in decision making based on game theory, Ann Fuzzy Math Inform, 2016, 11 (3): 425-438.
[13]. Demirtaş, N., Hussaın, S., Dalkılıç, O., New approaches of inverse soft rough sets and their applications in a decision making problem, Journal of applied mathematics and informatics, 2020, 38 (3-4): 335-349.
[14]. Zou, Y., Xiao, Z., Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, Knowl. Base. Sys., 2008, 21: 941–945.
[15]. Dalkılıç, O., Relations on neutrosophic soft set and their application in decision making, Journal of Applied Mathematics and Computing, 2021, 1-17.

[16]. Dalkılıç, O., A novel approach to soft set theory in decision-making under uncertainty, International Journal of Computer Mathematics, 2021, 1-11, https://doi.org/10.1080/00207160.2020.1868445.
[17]. Enginoğlu, S., Çağman, N., Karataş, S., Aydın, T., On soft topology, El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2015, 2 (3): 23-38.
[18]. Deli, I., Interval-valued neutrosophic soft sets and its decision making, International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2017, 8 (2): 665-676.
[19]. Deli, I., Eraslan, S., Çağman, N., ivnpiv-Neutrosophic soft sets and their decision making based on similarity measure, Neural Computing and applications, 2018, 29 (1): 187-203.
[20]. Deli, I., npn-Soft sets theory and their applications, Ann Fuzzy Math Inform, 2015, 10 (6): 847-862.
[21]. Cağman, N., Cıtak, F., Enginoğlu, S., Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Set Theory and Its Applications, Turkish Journal of Fuzzy Systems, 2010, 1 (1): 21–35.
[22]. Dalkılıç, O., An Application of VFPFSS's in Decision Making Problems, Journal of Polytechnic, 2021, https://doi.org/10.2339/politeknik.758474.
[23]. Sulukan, E., Çağman, N., Aydın, T., Fuzzy parameterized intuitionistic fuzzy soft sets and their application to a performance-based value assignment problem, Journal of New Theory, 2019, (29): 79-88.
[24]. El-Yagubi, E., Salleh, A.R., Intuitionistic fuzzy parameterised fuzzy soft set, Journal of Quality Measurement and Analysis, 2013, 9 (2): 73-81.
[25]. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Intuitionistic Fuzzy Soft Sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9 (3): 677–692.
[26]. Enginoğlu, S., Memiş, S., Çağman, N., A Generalization of Fuzzy Soft Max-Min Decision-Making Method and Its Application to a Performance-Based Value Assignment in Image Denoising, El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2019, 6 (3): 466-481.
[27]. Çağman, N., İrfan, D., Products of FP-soft sets and their applications, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2012, 41 (3): 365-374.
[28]. Çağman, N., İrfan, D., Means of FP-soft sets and their applications, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 2012, 41 (5): 615-625.
[29]. Deli, I., Karataş, S., Interval valued intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2016, 30 (4): 2073-2082.
[30]. Deli, I., Çağman, N., Relations on FP-soft sets applied to decision making problems, Journal of New Theory, 2015, (3): 98-107.
[31]. Deli, I., Çağman, N., Similarity measure of IFS-sets and its application in medical diagnosis, Ann Fuzzy Math Inform, 2016, 11 (5): 841-854.
[32]. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Fuzzy Soft Sets, Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9 (3): 589–602.
[33]. Cağman, N., Cıtak, F., Enginoğlu, S., FP-Soft Set Theory and Its Applications, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 2011, 2 (2): 219–226.
[34]. Dalkılıç, O., Demirtas, N., VFP-Soft Sets and Its Application on Decision Making Problems, Journal of Polytechnic, 2021, https://doi.org/10.2339/politeknik.685634.
[35]. Deli, I., Çağman, N., Intuitionistic fuzzy parameterized soft set theory and its decision making, Applied Soft Computing, 2015, 28: 109-113.