Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **21** (2021) 041301 (800-804) AKU J. Sci. Eng. **21** (2021) 041301 (800-804)

DOI: 10.35414/akufemubid.946228

Araştırma Makalesi / Research Article

Güçlü $s-\eta$-Konveks Fonksiyonlar için Bazı Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Hasan ÖĞÜNMEZ[1*], Nurila TOIGOMBAEVA[2]

[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Afyonkarahisar.*

[2] *Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik (YL) Bölümü, Afyonkarahisar.*

Sorumlu yazar e-posta: hogunmez@aku.edu.tr ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-2018-317X

nurila.toigomabaeva@gmail.com ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-8278-8230

Geliş Tarihi: 01.06.2021 Kabul Tarihi: 18.08.2021

Anahtar Kelimeler

Güçlü s-Konveks;

Güçlü η-Konveks;

Güçlü $s-\eta$-Konveks;

Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Öz

Bu makalede genelleştirilmiş konveks fonksiyonlardan biri olan $s-\eta$-konveks fonksiyonunun güçlendirilmiş hali olan, güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonlar kavramı tanıtılmaktadır. Güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilmektedir. Ayrıca bu tür fonksiyonlar yardımıyla türevlenebilir dönüşümler için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinde orta ve sağ terimler arasındaki fark tahmin edilerek, Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlik elde edilir. Bu çalışmada bu eşitsizlik için yeni sonuçlar gösterilmektedir.

Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for Strongly $s-\eta$-Convex Functions

Keywords

Strongly s-Convex;

Strongly η-Convex;

Strongly $s-\eta$-Convex;

Hermite-Hadamard Type İnequalities.

Abstract

In this article, the concept of strongly $s-\eta$-convex functions, which is a strengthened version of the $s-\eta$-convex function, which is one of the generalized convex functions, is introduced. For strongly $s-\eta$-convex functions, Hermite-Hadamard-type inequalities are obtained. In addition, with the help of such functions, the difference between the middle and right terms in the Hermite-Hadamard-Fejer inequality for differentiable maps is estimated, and the Hermite-Hadamard-Fejer type inequality is obtained. This article shows new results for this inequality.

1. Giriş

Matematik alanında en önemli konulardan biri konveks fonksiyonlardır. Günümüzde konveks fonksiyonların özellikleri ve çeşitleri hala araştırılmaktadır. Bu tür fonksiyonlar uygulamalı matematikte, matematik modelleme ve optimizasyon teorisinde önemli yer almaktadır. Konveks fonksiyonların genellemesi olarak s-konveks (Hudzuki and Maligarha 1994), η-konveks (Gordji et al. 2015), $s-\eta$-konveks (Rangel-Oliveros et al. 2018) vb. kavramlar verilebilir. Ama son yıllarda bu tür genelleştirilmiş konveks fonksiyonların güçlendirilmesi ilgi çekmektedir. Bu nedenle güçlü genelleştirilmiş fonksiyonlar üzerinde yeni makaleler elde edilmekte diyebiliriz. Örneğin güçlü η-konveks (Gordji. et al. 2016, Awan et al. 2017), güçlü s-konveks (Erdem ve ark. 2017) vb. Biz bu çalışmada güçlü s-konveks ve güçlü η-konveks fonksiyonlarının birleşiminden oluşan güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonlar kavramını tanıtacağız ve güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonu için yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri sunuyoruz.

Teorem 1 (Pecaric et al.1992) $f: I \to R$ fonksiyonu $[p,q] \in I$ ve $p<q$ olmak üzere, $[p,q]$ aralığında konveks fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) \le \frac{1}{q-p}\int_p^q f(x)dx \le \frac{f(p)+f(q)}{2} \quad (1)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliği diye adlandırılır.

Teorem 2. (Arrow et al.1961) $f:[p,q]\to R$ konveks fonksiyon ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)\int_p^q g(x)dx \le \int_p^q f(x)g(x)dx \le \frac{f(p)+f(q)}{2}\int_p^q g(x)dx \qquad (2)$$

Burada $g:[p,q]\to R^+$ sürekli ve $\frac{p+q}{2}$ ye göre simetrik fonksiyondur. Bu eşitsizlik literatürde Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği diye adlandırılır.

Eğer (2)' de $g\equiv 1$ olursa, o zaman eşitsizlik Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenir.

2018'de Rangel-Oliveros ve ark. tarafından $s-\eta$-konveks fonksiyonlar kavramı tanıtıldı ve temel sonuçlar ile beraber yeni integral eşitsizlikleri elde edildi.

Tanım 1. $s\in(0,1]$ ve $\eta:R\times R\to R$ bifonksiyon olduğuna göre,

$f:I\subset R\to R$ fonksiyonu her $x,y\in I$ *ve* $t\in[0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y)\le f(y)+t^s\eta\big(f(x),f(y)\big) \qquad (3)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $s-\eta$-konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Rangel-Oliveros et al. 2018).

Teorem 3. (Vivas-Cortez et al. 2020) $f:[p,q]\to R$ diferansiyellenebilir fonksiyon, $g:[p,q]\to R^+$ sürekli ve $\frac{p+q}{2}$ ye göre simetrik, $|f'|$ $s-\eta$-konveks fonksiyon ve η, $[p,q]$ üzerinde üstten sınırlı olsun. Bu durumda,

$$\left|\frac{f(p)+f(q)}{2}\int_p^q g(x)dx-\int_p^q f(x)g(x)dx\right| \le \frac{q-p}{4}[2|f'(q)| + N|\eta(f'(p),f'(q))|]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q} g(u)dudt \qquad (4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $N=max_{t\in[0,1]}\left|\left(\frac{1+t}{2}\right)^s+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right|$.

Lemma 1. (Gordji et al. 2015) $f:[p,q]\to R$ diferansiyellenebilir, $g:[p,q]\to R^+$ sürekli ve $\frac{p+q}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon ve f' $[p,q]$ üzerinde integrallenebilirse,

$$\frac{f(p)+f(q)}{2}\int_p^q g(x)dx-\int_p^q f(x)g(x)dx = \frac{q-p}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q} g(u)\left\{f'\left(\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q\right)+f'\left(\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q\right)\right\}dudt \quad (5)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. Materyal ve Metod

Tanım 2. $f:I\to R$ fonksiyonu her $x,y\in I$ ve

$t\in[0,1]$ için,

$$f(tx+(1-t)y) \le f(y)+t^s\eta\big(f(x),f(y)\big) - \mu t(1-t)(y-x)^2 \qquad (6)$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mu>0$ modülüne göre güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Burada $\eta:R\times R\to R$ bifonksiyondur.

Önerme 1. Eğer (6) eşitsizliğinde $s=1$ olursa, o zaman eşitsizlik güçlü η-konveks fonksiyona indirgenir.

Eğer (6) eşitsizliğinde $\eta(x,y)=x-y$ olursa, yukarıdaki eşitsizlik güçlü s-konveks fonksiyona indirgenir.

Eğer (6) eşitsizliğinde $s=1$ ve $\eta(x,y)=x-y$ olursa, o zaman eşitsizlik klasik güçlü konveks fonksiyona indirgenir.

Güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 4. $f:I\to R$ fonksiyonu güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olsun. O zaman her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)-\frac{1}{2^{s+1}}K_\eta+\frac{\mu}{12}(q-p)^2 \leq \frac{1}{q-p}\int_p^q f(x)dx$$

$$\leq f(q)+\frac{1}{s+1}\eta\big(f(p),f(q)\big)-\frac{\mu}{6}(q-p)^2 \quad (7)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $K_\eta=\eta(f(p),f(q))+\eta(f(q),f(p))$

İspat: f fonksiyonu I aralığında güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(tp+(1-t)q) \leq f(q)+t^s\eta\big(f(p),f(q)\big) -\mu t(1-t)(q-p)^2 \quad (8)$$

bulunur. (8) eşitsizliğinin her iki tarafı $[0,1]$ aralığında, t'ye göre integral alınırsa,

$$\frac{1}{q-p}\int_p^q f(x)dx=\int_p^q f(tp+(1-t)q)dt$$

$$\leq \int_0^1 \Big(f(q)+t^s\eta\big(f(p),f(q)\big) -\mu t(1-t)(q-p)^2\Big)dt$$

$$= \left(f(q)+\frac{t^{s+1}}{s+1}\eta\big(f(p),f(q)\big) -\mu(q-p)^2\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\right)\Bigg|_0^1$$

$$=f(q)+\frac{1}{s+1}\eta\big(f(p),f(q)\big)-\frac{\mu}{6}(q-p)^2 \quad (9)$$

Böylece verilen eşitsizliğin sağ tarafını elde ettik. Sol tarafı için (8)'den,

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right)\leq f(q)+\frac{1}{2^s}\,\eta\big(f(p),f(q)\big) -\frac{\mu}{4}(q-p)^2 \quad (10)$$

(10) eşitsizliğinden,

$$f(q)\geq f\left(\frac{p+q}{2}\right)-\frac{1}{2^s}\,\eta\big(f(p),f(q)\big) +\frac{\mu}{4}(q-p)^2 \quad (11)$$

$$f(p)\geq f\left(\frac{p+q}{2}\right)-\frac{1}{2^s}\,\eta\big(f(q),f(p)\big) +\frac{\mu}{4}(q-p)^2 \quad (12)$$

(11) ve (12) eşitsizliklerin aritmetik ortalamasını alırsak,

$$\frac{f(p)+f(q)}{2}\geq f\left(\frac{p+q}{2}\right)-\frac{1}{2^{s+1}}K_\eta +\frac{\mu}{4}(q-p)^2 \quad (13)$$

Burada $p_t=\frac{p+q-t(q-p)}{2}$ ve $q_t=\frac{p+q+t(q-p)}{2}$

değişkenlerin kullanırsak,

$$\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{p+q-t(q-p)}{2}\right)+f\left(\frac{p+q+t(q-b)}{2}\right)\right)$$

$$\geq f\left(\frac{p+q-t(q-p)+p+q+t(q-p)}{4}\right) -\frac{1}{2^{s+1}}K_\eta$$

$$+\frac{\mu}{4}\left(\frac{p+q+t(q-p)}{2}-\frac{p+q-t(q-p)}{2}\right)^2$$

$$= f\left(\frac{p+q}{2}\right)-\frac{1}{2^{s+1}}K_\eta +\frac{\mu}{4}t^2(q-p)^2 \quad (14)$$

bulunur. (14) eşitsizliğinde t'ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınırsa,

$$\frac{1}{q-p}\int_p^q f(x)dx$$

$$=\frac{1}{q-p}\left[\int_p^{\frac{p+q}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{p+q}{2}}^q f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(f\left(\frac{p+q-t(q-p)}{2}\right)+f\left(\frac{p+q+t(q-p)}{2}\right)\right)dt$$

$$\leq f\left(\frac{p+q}{2}\right)-\frac{1}{2^{s+1}}K_\eta+\frac{\mu}{12}(q-p)^2 \qquad (15)$$

bulunur. (9) ve (15) eşitsizliklerinden, (7)'de istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonraki teorem ise güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizşliğinin orta ve sağ terimlerinin arasındaki farkı gösterir.

Teorem 5. $f:[p,q]\to R$ diferansiyellenebilir, $|f'|$ güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon, $g:[p,q]\to R^+$ sürekli ve $\frac{p+q}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon ve η, $[a,b]$ üzerinde üstten sınırlı ise,

$$\left|\frac{f(p)+f(q)}{2}\int_p^q g(x)dx-\int_p^q f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{q-p}{4}\Big[2|f'(q)|+N|\eta(f'(p),f'(q)|-\frac{\mu}{3}(q-p)^2\Big]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q}g(u)dudt \qquad (16)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $N=max_{t\in[0,1]}\left|\left(\frac{1+t}{2}\right)^s+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right|$

İspat: Lemma 1 de (5)'in her iki tarafının mutlak değerini alırsak ve $|f'|$ güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyon olduğundan,

$$\left|\frac{f(p)+f(q)}{2}\int_p^q g(x)dx-\int_p^q f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{q-p}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q}g(u)\left[\left|f'\left(\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q\right)\right|+\left|f'\left(\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q\right)\right|\right]$$

$$\leq\frac{q-p}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q}g(u)[|f'(q)|+\left(\frac{1+t}{2}\right)^s\eta(|f'(p)|,|f'(q)|)-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(q-p)^2$$

$$+|f'(q)|+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s\eta(|f'(p)|,|f'(q)|)-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(q-p)^2\Big]dudt$$

$$=\frac{q-p}{4}\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q}g(u)[2|f'(q)|+\left(\left(\frac{1+t}{2}\right)^s+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s\right)\eta(|f'(p)|,|f'(q)|)-\frac{\mu(1-t^2)}{4}(q-p)^2\Big]$$

$$=\frac{q-p}{4}\Big[2|f'(q)|+N|\eta(f'(p),f'(q)|-\frac{\mu}{3}(q-p)^2\Big]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q}g(u)dudt \qquad (16)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Burada güçlü $s-\eta$ -konveks fonksiyonu için,

$$\left|f'\left(\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q\right)\right|\leq|f'(q)|+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s\eta(|f'(p)|,|f'(q)|)-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(q-p)^2 \qquad (17)$$

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q\right)\right|\leq|f'(q)|+\left(\frac{1+t}{2}\right)^s\eta(|f'(p)|,|f'(q)|)-\mu\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)(q-p)^2 \qquad (18)$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Sonuç 1. *Eğer* Teorem 5' de $g \equiv 1$ ise,

$$\left|\frac{f(p)+f(q)}{2}-\int_p^q f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(q-p)^2}{8}\Big[2|f'(q)|+N\eta(|f'(p)|,|f'(q)|) -\frac{\mu}{3}(q-p)^2\Big] \qquad (19)$$

eşitsizliği güçlü $s-\eta$-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğin orta ve sağ teriminin farkını gösterir.

Sonuç 2. Eğer Teorem 5'de $s=1$ ise,

$$\left|\frac{f(p)+f(q)}{2}\int_p^q g(x)dx-\int_p^q f(x)g(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{q-p}{4}\Big[2|f'(q)|+\eta(|f'(p)|,|f'(q)|) -\frac{\mu}{3}(q-p)^2\Big]\int_0^1\int_{\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q}^{\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q} g(u)dudt \qquad (20)$$

o zaman (20) eşitsizliği, güçlü η-konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin orta ve sağ terimleri arasındaki farkı gösterir.

Sonuç 3. Eğer Sonuç1'de $s=1$ ve $\eta(x,y)=x-y$ seçersek,

$$\left|\frac{f(p)+f(q)}{2}-\int_p^q f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(q-p)^2}{8}\Big[|f'(p)|+|f'(q)|-\frac{\mu}{3}(q-p)^2\Big] \quad (21)$$

eşitsizliği türevlenebilir güçlü konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin orta ve sağ terimlerinin arasındaki farkı gösterir.

3. Kaynaklar

Awan, M.U., Noor, M.A., Noor, K.I., 2017. Safdar F, On strongly generalized convex functions, *Filomat,* **31**(18), 5783–5790.

Arrow, H.J., Enthowen, A.N.D., 1961. Quasi concave programming. *The Econometrica Society,* **29**(4), 779-800.

Erdem, Y., Öğünmez, H., Budak, H., 2017. On some Hermite-Hadamard type inequalities for strongly s-convex functions. *Biska, New Trends in mathematical sciences,* **5**(3), 154-161.

Gordji, M.E., Dragomir, S.S., Delavar, M.R., 2015. An inequality related to η-convex functions (II). *Analysis and Applications*, **(6)**2, 26-32.

Gordji, M.E., Delavar, M.R., Sen, M.D.L., 2016. On φ-convex functions. *Journal of mathematical inequalities,* **10(**1), 173-183.

Gordji, M.E., Delavar, M.R., Dragomir, S.S., 2015. Some inequalities related to η-convex functions. *RGMIA,* **18**(8), 1-14

Hudziki, H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematicae*. **48**, 100-111.

Merentes N, Nicodem K, 2010. Remarks on strongly convex functions, *Aequationes mathematicae*, **80**, 193-199.

Ozdemir, M.E., Yıldız, C., Akdemir, A. O., Set, E., 2013. On some inequalities for s-convex functions and applications, *Journal of Inequalities and Applications,* **2013**(333).

Pecaric, J.E., Proschan, F., Tong Y,L., 1992. Convex functions, partial orderings and statistical applications. *Academic Press, Boston,* **187**, 467.

Rangel-Oliveros, Y., Vivas-Cortez, M., 2018. Ostrowski type inequalities for functions whose second derivative are convex generalized. *Applied Mathematics and Information Sciences*, **12(**6), 1055-1064.

Vivas-Cortez, M., Rangel-Oliveros, Y., 2020. An inequality related to $s-\varphi$-convex functions. *Applied Mathematics Information Sciences*, **14(**1), 151-154.