



Padé approximation for time delay systems and a new design method for the fractional-order PI controller

Münevver Mine Özyetkin*¹, Dorukhan Astekin²

Department of Electrical and Electronics Engineering, Faculty of Engineering, Aydın Adnan Menderes University, 09010, Aydın, Turkey

Highlights:

- This article demonstrates a new design method for a fractional-order PI controller
- The proposed method introduces a new concept called the centroid of the convex stability region
- A distinct advantage lies with using Padé approximation instead of time delay term

Keywords:

- Fractional-order PI controller
- Time delay
- Stability
- Tuning
- Padé approximation

Article Info:

Research Article

Received: 06.06.2021

Accepted: 13.03.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.948709

Correspondence:

Author: Münevver Mine

Özyetkin

e-mail:

m.ozyetkin@adu.edu.tr

phone: +90 506 886 9611

Graphical/Tabular Abstract

In this study, it is aimed to design fractional-order PI (FO-PI) controller for time delay systems. For this purpose, firstly, the system equations are converted into a linear form by using Padé approximations instead of the time delay term. Some examples are given to show the effect of the Padé approximations in obtaining the stability region. Stability regions are obtained using the stability boundary locus method. As can be seen in Figure A, it is seen that the second order Padé approximation gives very close results with the stability region of the original system. After obtaining the stability region of FO-PI controller, the convex stability region is determined. Finally, the controller parameters providing the stability are calculated by the method known as the centroid of the convex stability region. Comparative examples show that the proposed method provides good results.

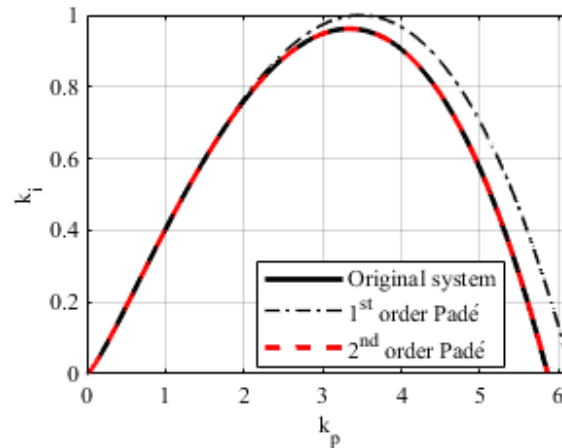


Figure A. Stability regions of first order, second order Padé approximations and original system for Example 2 ($\lambda = 1$)

Purpose:

The aim of this study is to design FO-PI controller for time delay systems using the centroid of the convex stability region method based on the stability boundary locus. The equations to obtain the stability region are obtained using Padé approximations instead of the time delay term.

Theory and Methods:

Padé approximations are used instead of time delay term in the transfer functions. A practical tuning method called the centroid of the convex stability region is presented for the FO-PI controller tuning.

Results:

The results show that the second order Padé approximation is quite successful in obtaining the original system response. In addition, the proposed method provides very satisfactory results for the design of FO-PI controllers.

Conclusion:

In this paper, a practical tuning method of FO-PI controller for time delay systems using the centroid of the convex stability region with Padé approximations is presented. The proposed method has some significant advantages in terms of calculating the controller parameters without using complex graphical methods and ensuring the stability of the closed-loop system.



Zaman gecikmeli sistemler için Padé yaklaşımı ve kesirli dereceli PI kontrolör için yeni bir tasarım metodu

Münevver Mine Özyetkin*^{ID}, Dorukhan Astekin^{ID}

Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 09010, Aydın, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Bu makale, kesirli dereceli PI kontrolör için yeni bir tasarım metodu göstermektedir
- Önerilen yöntem, dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi adlı yeni bir kavram sunmaktadır
- Zaman gecikmesi yerine Padé yaklaşımının kullanılması önemli bir avantaj getirmektedir

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 06.06.2021

Kabul: 13.03.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.948709

Anahtar Kelimeler:

Kesirli dereceli PI kontrolör,
zaman gecikmesi,
kararlılık,
ayarlama,
Padé yaklaşımı

ÖZ

Kesirli dereceli PI kontrolörler, günden güne getirdiği kolaylıklar sayesinde birçok makalenin araştırma konusu olmuştur. Bu tür bir kontrolör tam sayı dereceli PI ile karşılaştırıldığında çok daha faydalı sonuçlar sunar. Fakat işlemleri daha karmaşık bir hale getirir. Bu çalışmada kararlılık sınır eğrisi metodu kullanılarak geliştirilmiş olan dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezine dayalı basit bir kesirli dereceli PI kontrolör tasarımı önerilmiştir. Bunun için önce kesirli dereceli PI kontrolörün parametre düzleminde tüm kararlı kontrolörleri sağlayan kararlılık bölgesi elde edilir. Daha sonra bu kararlılık bölgesinin köşe ve tepe noktaları belirlenerek dışbükey kararlılık bölgesi elde edilir. Son olarak elde edilen dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi bulunarak kontrolör parametreleri hesaplanır. Kullanılan yöntem, kontrolör parametrelerinin karmaşık grafiksel yöntemler kullanılmadan hesaplanması, kapalı döngü sisteminin kararlılığını sağlaması ve hesaplama yükünü oldukça azaltması bakımından önemli avantajlar sağlamaktadır. Ayrıca, bu çalışmada kararlılık bölgesinin elde edilmesinde kullanılan denklemler için literatürdeki çalışmalardan farklı olarak zaman gecikmesi terimi yerine Padé yaklaşımlarının kullanılması tercih edilmiştir. Özellikle ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılarak elde edilen sonuçların neredeyse orijinal sistemle birebir örtüştüğü görülmektedir. Önerilen yöntemin etkinliğini ve basitliğini göstermek için bazı sayısal örnekler verilmiştir.

Padé approximation for time delay systems and a new design method for the fractional-order PI controller

H I G H L I G H T S

- This article demonstrates a new design method for a fractional-order PI controller
- The proposed method introduces a new concept called the centroid of the convex stability region
- A distinct advantage lies with using Padé approximation instead of time delay

Article Info

Research Article

Received: 06.06.2021

Accepted: 13.03.2022

DOI:

10.17341/gazimmfd.948709

Keywords:

Fractional-order PI
controller,
time delay,
stability,
tuning,
Padé approximation

ABSTRACT

Fractional-order PI controllers have been the research topic of many articles thanks to the convenience they bring day by day. This type of controller offers much more useful results compared to integer-order PI. But it makes mathematical operations more complicated. In this study, a simple fractional-order PI controller design method based on the centroid of the convex stability region, which was developed using the stability boundary locus method, is proposed. For this, first, the stability region, which provides all stable controllers, is obtained in the parameter plane of the fractional-order PI controller. Then, by determining the corner and cusp points of this stability region, the convex stability region is obtained. Finally, the centroid of the obtained convex stability region is found, and the controller parameters are calculated. The method used provides significant advantages in terms of calculating the controller parameters without using complex graphical methods, ensuring the stability of the closed-loop system and reducing the computational load considerably. In addition, for the equations used in obtaining the stability region in this study, unlike the studies in the literature, Padé approximations are preferred instead of the time delay term. Especially, it is seen that the results obtained using the second order Padé approximation almost exactly match the original system. Some numerical examples are given to demonstrate the effectiveness and simplicity of the proposed method.

1. Giriş (Introduction)

Zaman gecikmesine dayalı analiz çok eski ama günümüzde de ilgi görmekte olan bir konudur. Her geçen gün zaman gecikmeli sistemler üzerine yapılan araştırmalar genişletilip daha popüler olmaktadır. Bu konudaki araştırmalar, konferanslarda ve seminerlerde tartışma konusu olup kontrol ve sistem dergilerindeki özel sayılarda ve kitaplarda yayınlanmıştır [1, 2]. Bu alandaki yayınlar ileride özellikle matematik, mühendislik gibi pek çok alanda çok sayıda sorunun cevabı olacaktır. Böyle sistemlerin kararlılık, birim adım yanıtı gibi kontrol kriterlerini incelemek kolay olmamaktadır. Bu tür bir zorluğun üstesinden gelmek için en yaygın olarak önerilen çözümlerden biri, zaman gecikmesi operatörünü seçilen yöntemle rasyonelleştirmek ve ortaya çıkan yaklaşık sistemi analiz etmektir [3].

Ayrıca son yıllarda bu tür analizlerde kesirli dereceli sistemlerin kullanılması kaçınılmazdır. Kesirli derece kavramının, 1695'ten beri klasik analizin gelişmesinde ön ayak olduğu bilinmektedir [4]. Ancak teorisi ve uygulamaları, mühendislik ve diğer bilim alanları için anlaşılması çok kolay olmayan ileri analiz tekniklerini gerektirdiğinden çoğunlukla önemli matematikçiler tarafından incelenen bir konu olarak kalmıştır [4, 5]. Buna rağmen birçok bilim insanı bu konuya farklı yorumlar getirerek bu konunun çok disiplinli bir alan olmasını sağlamıştır. Örneğin; kesirli dereceli modeller, dijital devrelerde [6], COVID-19 analizinde [7, 8], biyoloji alanında [9], tıp alanında [10], [11], akıllı kırımlarda titreşim kontrolü için kesirli dereceli kontrolör tasarımı [12], piezoelektrik yamalara sahip akıllı kırımların titreşimlerinin kesirli dereceli denetçi yardımıyla aktif denetiminde [13], hatta ekonomi ve finans alanında [14, 15] bile karşımıza çıkmaktadır. Zaman gecikmesine dayalı analizde, kesirli dereceli operatörü kullanmak işlemleri daha kompleks hale getirmektedir. Şu ana kadar literatürde kesirli dereceli sistemlerin rasyonel yaklaşımlarının elde edildiği birçok titiz çalışma yer almıştır [28]. Padé yaklaşımı ise zaman gecikmeli sistemler için en yaygın kullanılan yaklaşımlardan biridir. Bu çalışmadaki amaçlardan birisi zaman gecikmesi terimi yerine Padé yaklaşımının kullanılmasıdır. Yazarların bildiği kadarıyla zaman gecikmesi terimi yerine doğrusal yapıyı sağlayacak olan Padé yaklaşımlarına dayalı olarak kontrolör parametrelerinin elde edildiği denklemlerin yer aldığı bir çalışma bulunmamaktadır. Diğer bir amaç ise Onat tarafından tasarlanan ağırlıklı geometrik merkez (AGM) metodunun farklı bir yorumu olan dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi metodunu (bu metodun ilk uygulaması [16]'da PI-PD kontrolör tasarımı için kullanılmıştır) kullanarak zaman gecikmeli sistemler için sistemi kararlı yapacak kesirli dereceli PI kontrolörün parametrelerinin hesaplanmasıdır. Daha önce farklı kontrolör çeşitleriyle AGM yönteminin kullanıldığı tasarım metodunun yerini bu yayında dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi adlı yeni bir yöntem almıştır. AGM yöntemi de Onat'ın literatüre kazandırdığı bir yöntem olup konuya dair temel çalışmalar [17-20]'de görülebilir.

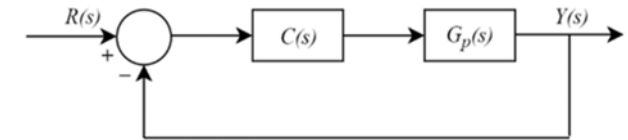
[17] ve [18]'de zaman gecikmeli sistemler için AGM metodu kullanılarak PI kontrolör tasarımı kullanılmıştır. [19]'da yoğunlaşmalı kazanlar için robust ve kazanç planlamalı PI kontrolör tasarımı sunulmuştur. [20]'de AGM metodu kullanılarak zaman gecikmeli ve ters cevaba sahip sistemler için PID tasarımı yapılmıştır. AGM metodunun kullanıldığı zaman gecikmeli sistemler için kesirli dereceli PI kontrolörün tasarımı çalışması ilk kez [21]'de yer almıştır. Bu yöntemin, kesirli dereceli PD kontrolör için uygulaması ise ilk kez [22]'de çalışılmıştır. Zaman gecikmeli sistemler için kesirli dereceli PI-PD kontrolör tasarımı AGM metodu ile ilk kez Özyetkin tarafından [23]'te sunulmuştur. Bu çalışma ayrıca kesirli dereceli PI-PD kontrolörün de ilk kez literatüre sunulduğu çalışmadır. AGM metodunun tam sayı dereceli PI-PD kontrolör tasarımı için kullanıldığı çalışma [24]'te görülebilir. Tüm bu çalışmalarda AGM metodunun oldukça iyi

sonuçlar verdiği ve kompleks metotlara göre basitliği ve robust olması gibi sebeplerle üstünlük sağladığı açıkça görülmektedir. Yöntem, tam sayı ve kesirli dereceli kontrol sistem tasarımı alanında literatüre önemli katkılar sağlamıştır. Bu yöntemin, herhangi bir karmaşık grafiksel yöntem kullanılmadan kontrolör parametrelerinin hesaplanması ve kapalı döngü sisteminin kararlılığını sağlaması açısından önemli avantajları vardır. AGM metodunun farklı bir yorumu olan dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi ise seçilen kararlı kontrolör parametrelerinin oluşturduğu eğri ile bu eğri sayesinde elde edilen ağırlık merkezi koordinatlarının hesaplanmasına dayanmaktadır. Bu nedenle önerilen prosedürün hesaplama yükü AGM yöntemine kıyasla çok düşüktür [16]. Dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezine dayalı çalışmalar [16, 25]'te görülebilir. [16]'da yeni metod ilk kez PI-PD kontrolör tasarımı için kullanılmıştır. [25]'te ise yeni konseptin kesirli dereceli PD kontrolör için uygulaması ilk kez denenmiştir. Yapılan bu sınırlı sayıdaki çalışmalarda görüldüğü üzere önerilen algoritma hem tam sayı hem de kesirli dereceli sistemler için oldukça iyi sonuçlar sağlamaktadır. Yeni metodun literatürdeki uygulaması şimdilik oldukça azdır ve diğer metotlarla kıyaslamaya ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca literatürde dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi metodu kullanılarak zaman gecikmeli sistemler için kesirli dereceli PI kontrolör tasarımı yapılmasına yönelik bir çalışma ise henüz bulunmamaktadır. Tüm bunlara ilaveten zaman gecikmesi terimi yerine Padé yaklaşımı kullanılarak kesirli dereceli kontrolör parametrelerinin denklemsel olarak elde edildiği bir çalışma yazarların bildiği kadarıyla henüz literatürde bulunmamaktadır. Ayrıca dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi metodu kullanılarak Padé yaklaşımlarına göre elde edilen denklemler üzerinden kontrolör tasarımı da bu yayının literatüre yaptığı diğer bir orijinal katkıdır. Dolayısıyla bu çalışma pek çok yönden literatür için katkı sağlamaktadır.

Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir: Kararlılık sınır eğrisi yöntemi kullanılarak kesirli dereceli PI kontrolörünün kararlılık bölgesinin elde edilmesi Bölüm 2.1'de gösterilmiştir. Bölüm 2.2'de dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi tanıtılmıştır. Ayrıca önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için Bölüm 3'te bazı sayısal örnekler verilmiştir. Son olarak, Bölüm 4'te sonuç kısmı verilmiştir.

2. Teorik Altyapı ve Deneysel Metot (Theoretical Background and Experimental Method)

2.1. Kesirli dereceli PI kontrolörün kararlılık bölgesi (Stability region of fractional-order PI controller)



Şekil 1. Tek giriş-tek çıkışlı bir kontrol sistemi (A single input-single output (SISO) control system)

Şekil 1'deki tek giriş-tek çıkışlı sistemi göz önünde bulunduralım. Burada $G_p(s)$ kontrol edilen sistemin transfer fonksiyonu olup Eş. 1'deki gibi ifade edilir:

$$G_p(s) = G(s)e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-\tau s} \quad (1)$$

$C(s)$ ise PI^λ kontrolörünün transfer fonksiyonu olup Eş. 2'deki gibi ifade edilmektedir:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s^2 + k_i}{s^2} \quad (2)$$

Burada k_p oransal kazanç sabitini, k_i ise integral kazanç sabitini göstermektedir.

Zaman gecikmesi terimi için Eş. 3'teki 2. derece Padé yaklaşımı kullanılmıştır:

$$e^{-\tau s} = \frac{2 - \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{6}}{2 + \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{6}} = \frac{12 - 6\tau s + \tau^2 s^2}{12 + 6\tau s + \tau^2 s^2} \quad (3)$$

Şekil 1'deki sistemin kapalı döngü karakteristik denklemi $\Delta(s) = 1 + C(s)G_p(s)$ olup bu sisteme göre karakteristik denklem Eş. 4'teki gibi elde edilir:

$$\Delta(s) = s^2 D(s) + (k_p s^2 + k_i) N(s) e^{-\tau s} \quad (4)$$

Eş. 1'deki $G(s)$ 'in pay ve payda polinomlarını $N(s)$ ve $D(s)$ olarak ayırıp bu polinomları çift (N_e, D_e) ve tek (N_o, D_o) kısımlarına ayırdıktan sonra $s = j\omega$ yazılırsa;

$$G(j\omega) = \frac{N_e(-\omega^2) + j\omega N_o(-\omega^2)}{D_e(-\omega^2) + j\omega D_o(-\omega^2)} \quad (5)$$

$(-\omega^2)$ gösterim kolaylığı sağlaması açısından daha sonraki denklemlerde ayrıca yazılmayacaktır. Eş. 6'daki özelliği kullanarak;

$$(j\omega)^\lambda = \omega^\lambda \left(\cos \frac{\pi}{2} \lambda + j \sin \frac{\pi}{2} \lambda \right) \quad (6)$$

Eş. 4'ün kapalı döngü karakteristik denklemi Eş. 7'deki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) = & 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) D_e + 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau D_e \\ & + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 D_e + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) D_o \\ & + 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau D_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 D_o \\ & + 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) k_p N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau k_p N_e \\ & + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 k_p N_e + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) k_p N_o \\ & - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau k_p N_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 k_p N_o \\ & + 12k_i N_e - \omega^2 \tau^2 k_i N_e + 6\omega^2 \tau k_i N_o + j[12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) D_e \\ & + 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau D_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 D_e \\ & + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) D_o + 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau D_o \\ & + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 D_o + 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) k_p N_e \\ & - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau k_p N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 k_p N_e \\ & + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) k_p N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau k_p N_o \\ & + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 k_p N_o - 6\omega \tau k_i N_e + 12\omega k_i N_o - \omega^3 \tau^2 k_i N_o] \quad (7) \end{aligned}$$

Eğer $\Delta(j\omega)$ 'nin gerçekte ve sanal kısımlarını sıfıra eşitlersek;

$$\Delta(j\omega) = \text{Re}_\Delta + j \text{Im}_\Delta = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k_p [& 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau N_e \\ & + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 N_e + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) N_o \\ & - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 N_o] \\ & + k_i [12N_e - \omega^2 \tau^2 N_e + 6\omega^2 \tau N_o] = -12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) D_e \\ & - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 D_e \\ & - 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau D_o \\ & - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 D_o \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_p [& 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau N_e \\ & + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 N_e + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) N_o \\ & - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 N_o] \\ & + k_i [-6\omega \tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3 \tau^2 N_o] = -12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) D_e \\ & - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 D_e \\ & - 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau D_o \\ & - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 D_o \quad (10) \end{aligned}$$

Eş. 8 ve Eş. 9 aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse;

$$k_p A_1(\omega) + k_i A_2(\omega) = A_3(\omega) \quad (11)$$

$$k_p B_1(\omega) + k_i B_2(\omega) = B_3(\omega) \quad (12)$$

Burada;

$$\begin{aligned} A_1(\omega) = & 12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau N_e \\ & + \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 N_e + 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) N_o \\ & - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 N_o \quad (13) \end{aligned}$$

$$A_2(\omega) = 12N_e - \omega^2 \tau^2 N_e + 6\omega^2 \tau N_o \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_3(\omega) = & -12\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) \tau D_e \\ & - \omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau^2 D_e - 12\omega^{(\lambda+1)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right) D_o \\ & - 6\omega^{(\lambda+2)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right) \tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right) \tau^2 D_o \quad (15) \end{aligned}$$

$$B_1(\omega) = 12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)N_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau N_e + \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 N_e + 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)N_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau N_o + \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 N_o \quad (16)$$

$$B_2(\omega) = -6\omega\tau N_e + 12\omega N_o - \omega^3\tau^2 N_o \quad (17)$$

$$B_3(\omega) = -12\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)D_e - 6\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)\tau D_e - \omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau^2 D_e - 12\omega^{(\lambda+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+1)\right)D_o - 6\omega^{(\lambda+2)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+2)\right)\tau D_o - \omega^{(\lambda+3)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+3)\right)\tau^2 D_o \quad (18)$$

Eş. 11 ve Eş. 12'den k_p ve k_i , (Eş. 13-Eş. 20) Eş. 19 ve Eş. 20'deki gibi yalnız bırakılabilir:

$$k_p = \frac{A_3(\omega)B_2(\omega) - B_3(\omega)A_2(\omega)}{A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega)} \quad (19)$$

$$k_i = \frac{A_1(\omega)B_3(\omega) - B_1(\omega)A_3(\omega)}{A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega)} \quad (20)$$

Elde edilen denklemler sayesinde kararlılık sınır eğrisi olan $l(k_p, k_i, \omega)$, $(A_1(\omega)B_2(\omega) - B_1(\omega)A_2(\omega) \neq 0$ olmak koşuluyla) (k_p, k_i) düzleminde çizilebilir. Kararlılık sınır eğrisi ve $k_i = 0$

çizgisi, (k_p, k_i) düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere bölebilir [26]. Bundan dolayı, her bölge içinde test noktaları seçilerek kararlı (k_p, k_i) parametrelerinin olup olmadığı belirlenmelidir [26].

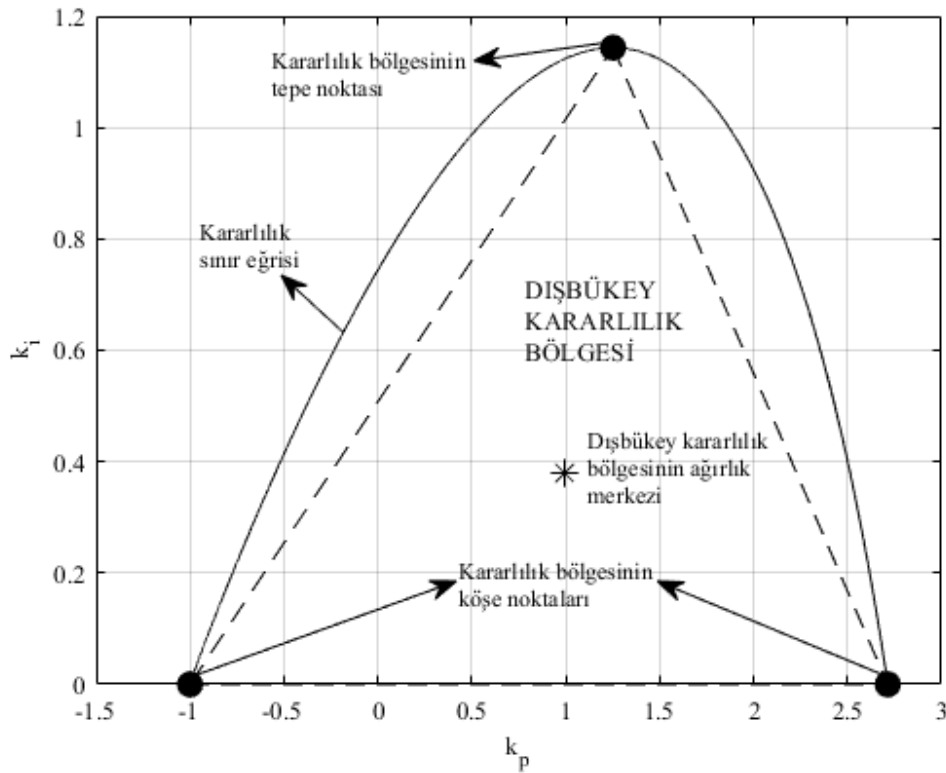
2.2. Dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi (Centroid of the convex stability region method)

Bu bölümde, dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemi olarak adlandırılan pratik bir ayarlama yöntemi, kesirli dereceli PI denetleyici için sunulmuştur. Yöntem, seçilen kontrolörün parametrelerinin oluşturduğu kararlılık sınır eğrisine [26, 27] ve bu parametrelere bağlı olan ağırlık merkezi koordinatlarının elde edilmesine dayanmaktadır [16]. Bu çalışma için dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi (k_p, k_i) düzleminde hesaplanmaktadır.

Şekil 1'de verilen sistemin transfer fonksiyonu $G_p(s)$ daha önce Eş.

1'deki gibi tanımlanmıştır. $C(s)$ ise PI^λ kontrolörün transfer fonksiyonu olup Eş. 2 ile ifade edilmiştir. Buna göre, Şekil 1'deki sistem için kararlılığı sağlayan kontrolör parametrelerinin oluşturduğu kararlılık sınır eğrisinin $\lambda = 0.99$ için aşağıdaki gibi elde edildiğini varsayalım. (Şekil 2)

Dışbükey kararlılık bölgesi, kontrolörün parametrelerinin oluşturduğu kararlılık sınır eğrisinin köşe ve tepe noktaları kullanılarak elde edilmektedir. (k_p, k_i) düzleminde köşe noktalarının $(k_{p1}, k_{i1}), (k_{p2}, k_{i2}), \dots, (k_{pn}, k_{in})$ ve tepe noktalarının ise $(k'_{p1}, k'_{i1}), (k'_{p2}, k'_{i2}), \dots, (k'_{pn}, k'_{in})$ olduğunu varsayalım. Dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi koordinatları Eş. 21 ve Eş. 22 ile elde edilir.



Şekil 2. $\lambda = 0.99$ için kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve bu bölgenin ağırlık merkezi (Calculated stability boundary locus, convex stability region and centroid of this region for $\lambda = 0.99$)

$$k_{pc} = \frac{\sum_{i=1}^m k_{pi} + \sum_{i=1}^n k'_{pi}}{m+n} \quad (21)$$

$$k_{ic} = \frac{\sum_{i=1}^m k_{ii} + \sum_{i=1}^n k'_{ii}}{m+n} \quad (22)$$

Burada (k_{pc}, k_{ic}) ağırlık merkezi denetleyici parametreleri olup aynı zamanda kesirli dereceli PI denetleyici parametreleridir. Ayrıca m ve n sırasıyla köşe ve tepe noktalarının sayısını ifade etmektedir. Böylece PI^λ kontrolör parametreleri hesaplanır.

Önerilen tasarım yöntemi aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Adım 1: Öncelikle kesirli dereceli PI kontrolörün derecesine karar verilir. Yapılan çalışmalar λ değerini genel olarak 0,5 ile 1,5 arasında tutmanın yararlı olacağını göstermektedir [23]. Ancak bu araştırmaya açık bir konudur.

Adım 2: Birinci adımda λ değeri belirlendikten sonra kesirli dereceli PI kontrolörün kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzleminde Eş. 19 ve Eş. 20 kullanılarak elde edilir.

Sonuç 1: Kararlılık sınır eğrisi ve $k_i = 0$ çizgisi, (k_p, k_i) düzlemini kararlı ve kararsız bölgelere bölebilir. Bu sebeple, her bölge içinde test noktaları seçilerek kararlı (k_p, k_i) parametrelerinin bulunup bulunmadığı kontrol edilmelidir.

Adım 3: Kesirli dereceli PI kontrolör için dışbükey kararlılık bölgesinin köşe ve tepe noktaları (k_p, k_i) düzleminde sırasıyla $(k_{p1}, k_{i1}), (k_{p2}, k_{i2}), \dots, (k_{pm}, k_{im})$ ve $(k'_{p1}, k'_{i1}), (k'_{p2}, k'_{i2}), \dots, (k'_{pn}, k'_{in})$ olarak ifade edilmektedir. Burada m ve n sırasıyla köşe ve tepe noktalarının sayısını göstermektedir. Bu değerler Adım 2’de elde edilen kararlılık sınır eğrisinden elde edilir. Böylece dışbükey kararlılık bölgesi belirlenir.

Adım 4: Adım 3’te elde edilen dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi $(k_{pc}, k_{ic}), (k_p, k_i)$ düzleminde Eş. 21 ve Eş. 22 kullanılarak hesaplanır.

Sonuç 2: Kullanılan metodun hesaplama yükü oldukça az olduğundan karmaşık grafiksel metotlara göre oldukça avantajlıdır. Bu yönüyle benzer bir metot olan AGM metoduna göre de kullanım kolaylığı sağlamaktadır. Üstelik kapalı çevrim kararlılığı da garantilemektedir.

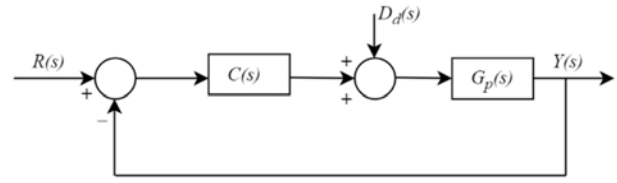
Yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnekler sunulmuştur.

3. Sonuçlar ve Tartışmalar (Results and Discussions)

3.1. Örnek 1 (Example 1)

Şekil 3’te verilen kesirli dereceli transfer fonksiyonuna sahip kontrol sistemini ele alalım. Burada $D_d(s)$ sisteme verilen bozulmayı temsil etmektedir. Kontrol edilen sistem Eş. 23 ile verilmiş olsun. Bu örnekte genlik=1 için $T = 50$ sn’de sisteme bozulma sinyali verelim.

$$G_p(s) = \frac{1}{s^{1.5} + 1} e^{-s} = \frac{1}{s(s^{0.5}) + 1} e^{-s} \quad (23)$$



Şekil 3. Bozulma eklenmiş olan birim geri beslemeli bir kontrol sistemi (A SISO control system with disturbance)

Bu örnekte amaç, verilen sistem için kararlılığı sağlayan tüm PI^λ kontrolör parametrelerini hesaplamak ve birim adım yanıtlarını incelemek için dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi noktalarını belirlemektir.

Bilindiği gibi kesirli dereceli sistemlerin frekans alanı analizi kolaylıkla elde edilebilirken zaman alanı analizi doğrudan araştırmaz. Zaman alanı analizini elde etmek oldukça zordur. Böylelikle sistemin birim adım yanıtlarının araştırılmasını kolaylaştırmak için tam sayı dereceli yaklaşımlar kullanılır. Bu amaca paralel olarak sürekli kesir açılımında (SKA) elde edilen $s^{0.5}$ terimi için 6. derece yaklaşım seçilmiştir [28]. Yaklaşımın derecesi arttığı takdirde orijinal cevaba o kadar yakın bir sonuç elde edilebileceği görülebilir.

$$s^{0.5} \approx \frac{13s^6 + 286s^5 + 1287s^4 + 1716s^3 + 715s^2 + 78s + 1}{s^6 + 78s^5 + 715s^4 + 1716s^3 + 1287s^2 + 286s + 13} \quad (24)$$

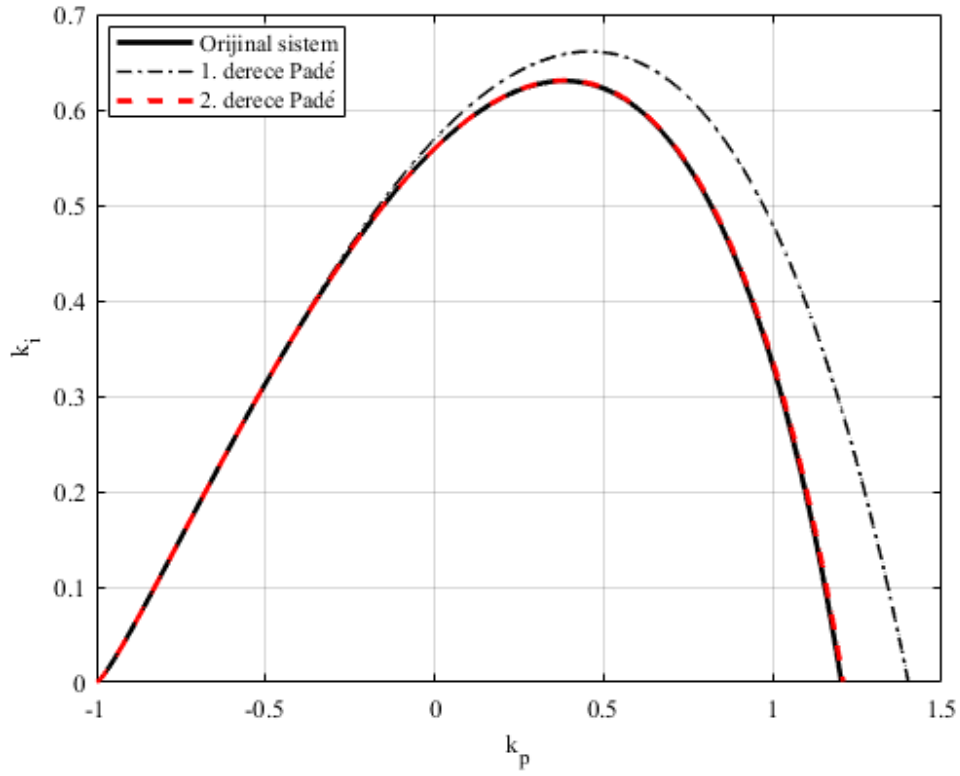
$N(s)$ ve $D(s)$ ’in çift ve tek ayrışmasını göz önünde bulundurursak;

$$\begin{aligned} N_e &= -\omega^6 + 715\omega^4 - 1287\omega^2 + 13 \\ N_o &= 78\omega^4 - 1716\omega^2 + 286 \\ D_e &= -287\omega^6 + 2431\omega^4 - 1365\omega^2 + 13 \\ D_o &= -13\omega^6 + 1365\omega^4 - 2431\omega^2 + 287 \end{aligned} \quad (25)$$

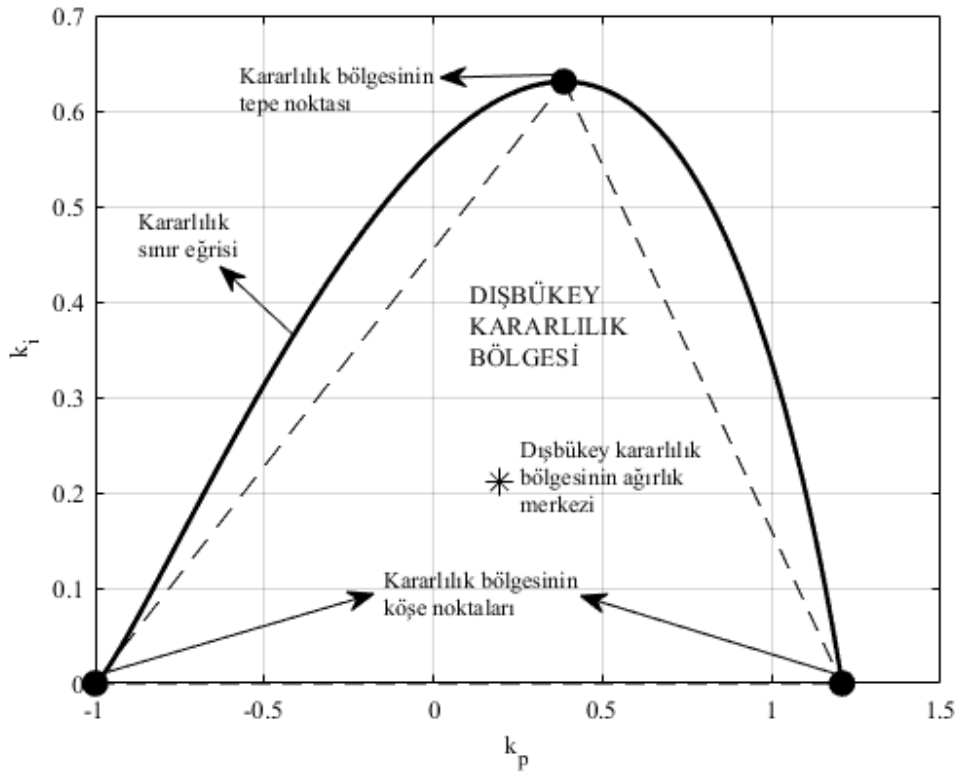
$\lambda = 1$ için 1. ve 2. derece Padé yaklaşımının orijinal sistemle karşılaştırıldığı kararlılık bölgesi Şekil 4’te görülebilir. Özellikle, ikinci derece Padé yaklaşımının kararlılık bölgesinin orijinal sistemle neredeyse birebir örtüştüğü görülmektedir. İlk olarak, sistemin kararlılık sınır eğrisi (k_p, k_i) düzleminde çizdirilir. Burada kararlılık sınır eğrisi, iki köşe noktasına ve bir tepe noktasına sahiptir. Dışbükey kararlılık bölgesi, kararlılık sınır eğrisinin k_p eksenine sınırladığı bölge olarak tanımlanmamaktadır.

Yani dışbükey kararlılık bölgesi bir üçgendir.

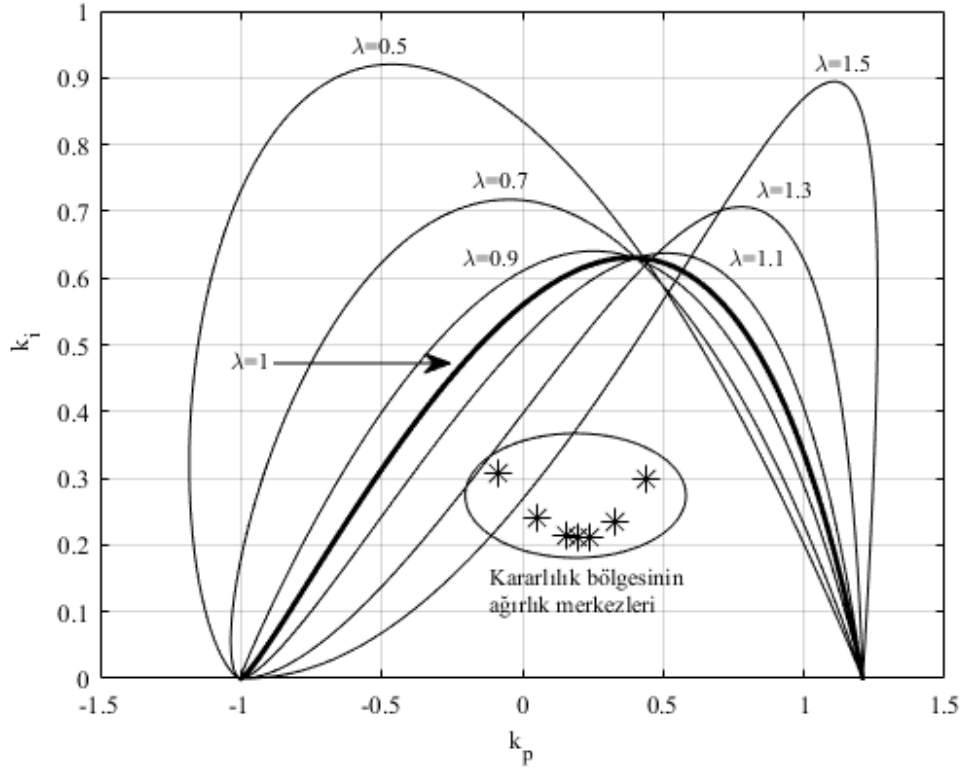
Bunun dışında, dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi Eş. 21 ve Eş. 22 kullanılarak $m=2$ ve $n=1$ için hesaplanabilir. Bu örnekte kesirli dereceli PI kontrolörünün ağırlık merkezi $\lambda = 1$ için $k_p = k_{pc} = 0.19789$ ve $k_i = k_{ic} = 0.21051$ şeklinde bulunmuştur. Şekil 5’te 2. derece Padé yaklaşımına göre hesaplanan kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve bu bölgenin ağırlık merkezi görülebilir. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri Şekil 6’da verilmiştir. Şekil 7’de ortak kararlılık bölgesi gösterilmiştir. Şekil 8’de farklı λ değerleri için ortak kararlılık bölgesinden farklı (k_p, k_i) çiftlerinin birim adım yanıtları görülebilir. Tablo 1’de $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için (k_p, k_i) değerleri incelenebilir. Şekil 9’da ise farklı λ değerleri için ağırlık merkez noktalarının ayar takip noktası ve bozulma yanıtları sunulmuştur.



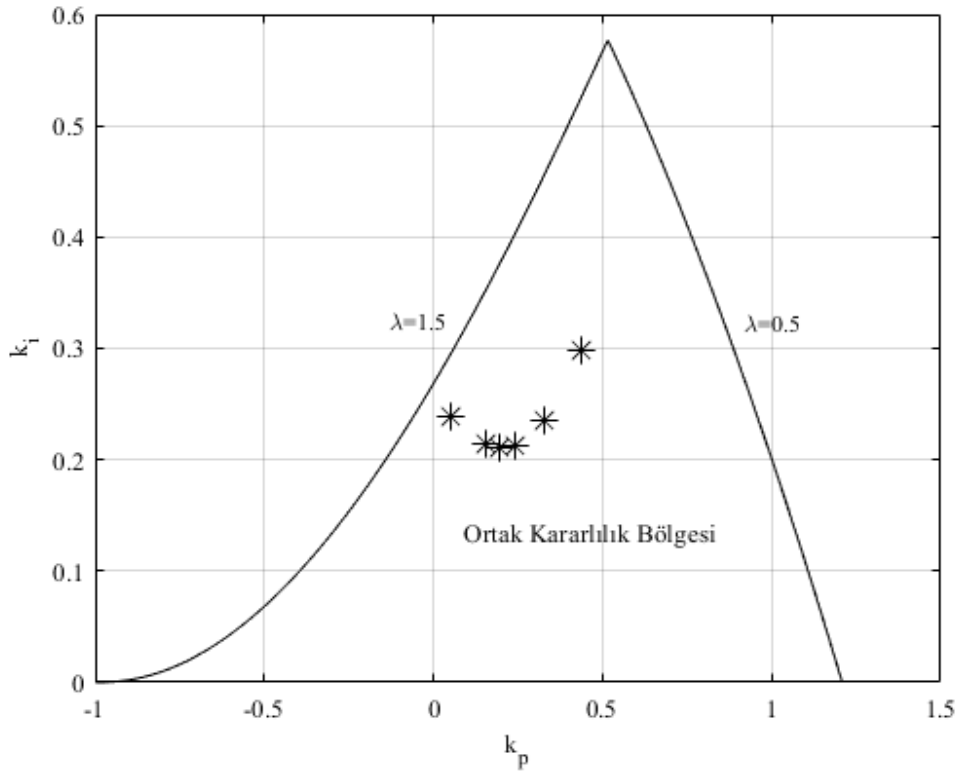
Şekil 4. $\lambda = 1$ için 1. ve 2. derece Padé yaklaşımının orijinal sistem ile karşılaştırıldığı kararlılık bölgesi (Stability regions of first and second order Padé approximations and original system for $\lambda = 1$)



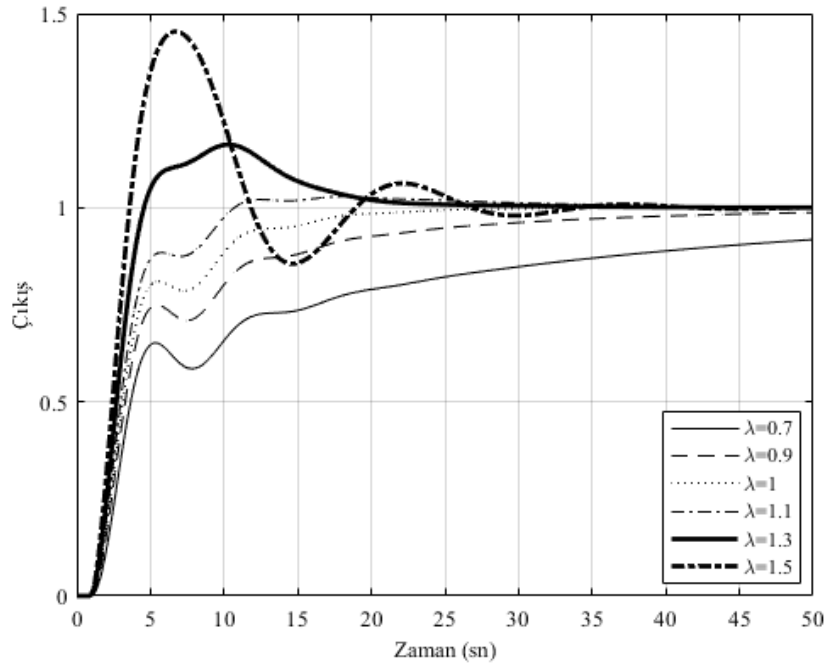
Şekil 5. Hesaplanan kararlılık sınır eğrisi, dışbükey kararlılık bölgesi ve bu bölgenin ağırlık merkezi (Calculated stability boundary locus, convex stability region and centroid of this region)



Şekil 6. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri (Stability regions and centroid points for $\lambda \in [0.5, 1.5]$)



Şekil 7. Ortak kararlılık bölgesi (Common stability region)



Şekil 8. Ortak kararlılık bölgesinden farklı λ değerleri için birim adım yanıtları
(Unit step responses for different λ values from the common stability region)

Tablo 1. $\lambda \in [0.5, 1.5]$ için (k_p, k_i) değerleri ((k_p, k_i) values for $\lambda \in [0.5, 1.5]$)

λ	Orijinal sistem		1. derece Padé yaklaşımı		2. derece Padé yaklaşımı	
	k_p	k_i	k_p	k_i	k_p	k_i
0,5	-0,088017	0,30738	-0,003667	0,31321	-0,085425	0,30714
0,7	0,050932	0,23969	0,13861	0,24669	0,053464	0,23952
0,9	0,15104	0,21392	0,24147	0,22257	0,15352	0,21379
1	0,19544	0,21063	0,28643	0,2204	0,19789	0,21051
1,1	0,23859	0,21288	0,32977	0,22406	0,24061	0,21277
1,3	0,32643	0,236	0,41896	0,25146	0,32881	0,23591
1,5	0,43703	0,29872	0,52907	0,32238	0,43905	0,29865

3.2. Örnek 2 (Example 2)

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^{0.5} + 1)^2} e^{-0.5s} = \frac{1}{s^2 + 2s^{1.5} + s} e^{-0.5s} \quad (26)$$

Şekil 3'teki kontrol sistemi için Eş. 26'daki kesirli dereceli transfer fonksiyonunu ele alalım. Bu örnekte de genlik=1 için $T = 50$ sn'de sisteme bozulma sinyali verelim. Eğer Örnek 1'deki prosedür, Örnek 2 için de uygulanırsa;

$$\begin{aligned} N_e &= -\omega^6 + 715\omega^4 - 1287\omega^2 + 13 \\ N_o &= 78\omega^4 - 1716\omega^2 + 286 \\ D_e &= \omega^8 - 1365\omega^6 + 6435\omega^4 - 455\omega^2 \\ D_o &= -105\omega^6 + 5005\omega^4 - 3003\omega^2 + 15 \end{aligned} \quad (27)$$

Şekil A'da $\lambda = 1$ için 1. ve 2. derece Padé yaklaşımının orijinal sistem ile karşılaştırıldığı kararlılık bölgesi görülebilir. $\lambda = 0.7$, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 1.3$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri Şekil 10'da incelenebilir. Farklı λ değerleri için ağırlık merkez noktalarının birim adım değişimi ve bozulma yanıtları Şekil 11'de gösterilmiştir. Tablo 2'de ise $\lambda \in [0.7, 1.3]$ için (k_p, k_i) değerleri gösterilmiştir.

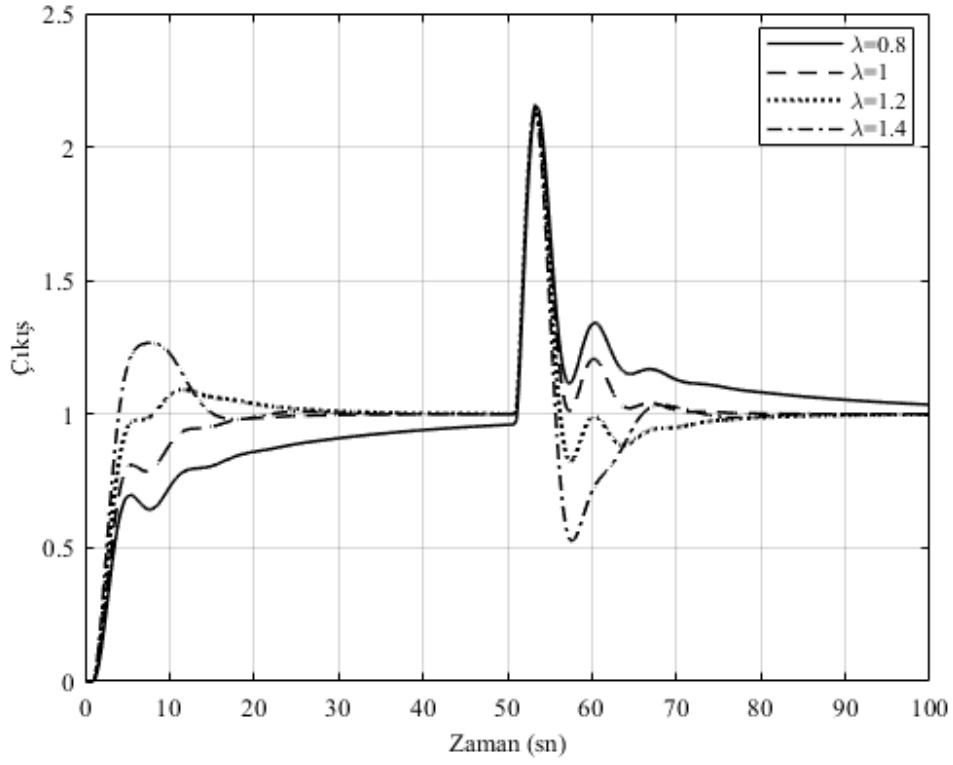
3.3. Örnek 3 (Example 3)

$$G_p(s) = \frac{1}{s^{0.5} + 1} e^{-0.5s} \quad (28)$$

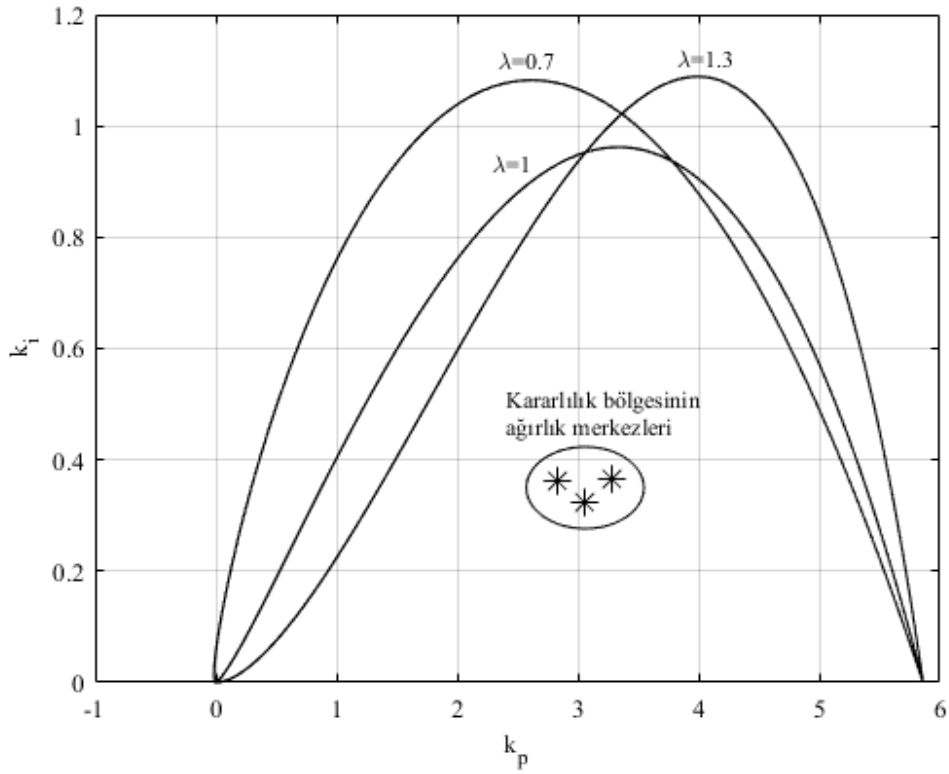
Şekil 3'teki kontrol sistemi için Eş. 28'deki kesirli dereceli transfer fonksiyonunu [21] ele alalım. Bu örnek için de genlik=1 için $T = 50$ sn'de sisteme bozulma sinyali verelim. Eğer $N(s)$ ve $D(s)$ 'in çift ve tek ayrışmasını ele alırsak;

Şekil 12'de $\lambda = 0.8$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1.2$ ve $\lambda = 1.4$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri gösterilmiştir. Şekil 13'te $\lambda = 1$ için önerilen yöntemin ağırlıklı geometrik merkez (AGM) yöntemi ile karşılaştırılması elde edilmiştir. Tablo 3'te ise $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin farklı yöntemlere göre karşılaştırılması belirtilmiştir.

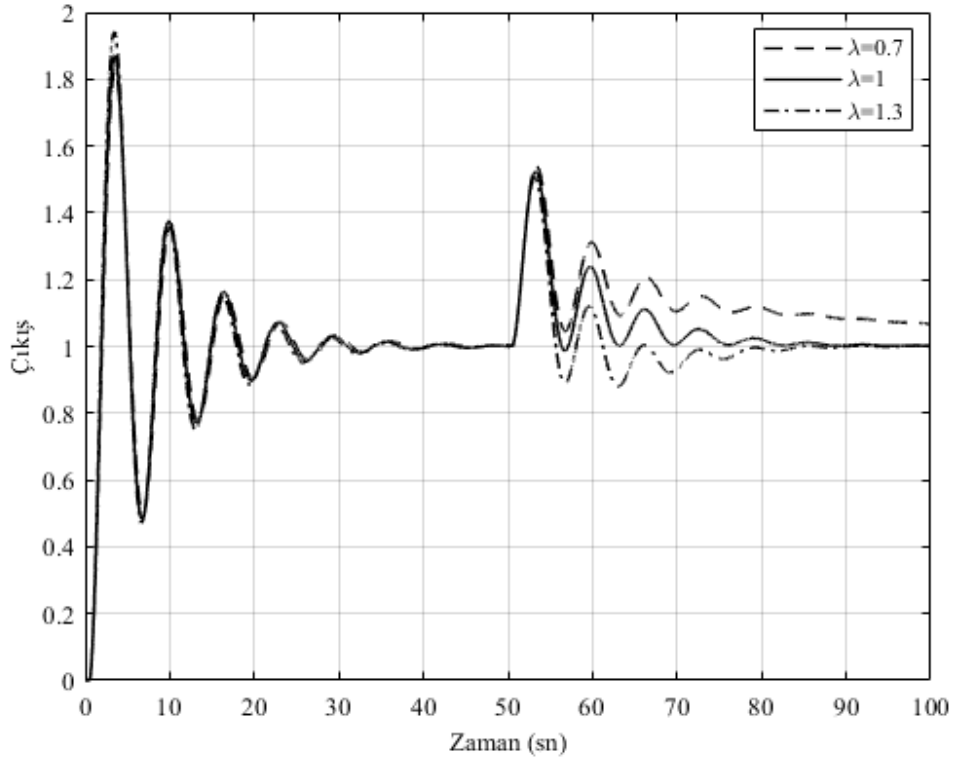
$$\begin{aligned} N_e &= -\omega^6 + 715\omega^4 - 1287\omega^2 + 13 \\ N_o &= 78\omega^4 - 1716\omega^2 + 286 \\ D_e &= -14\omega^6 + 2002\omega^4 - 2002\omega^2 + 14 \\ D_o &= 364\omega^4 - 3432\omega^2 + 364 \end{aligned} \quad (29)$$



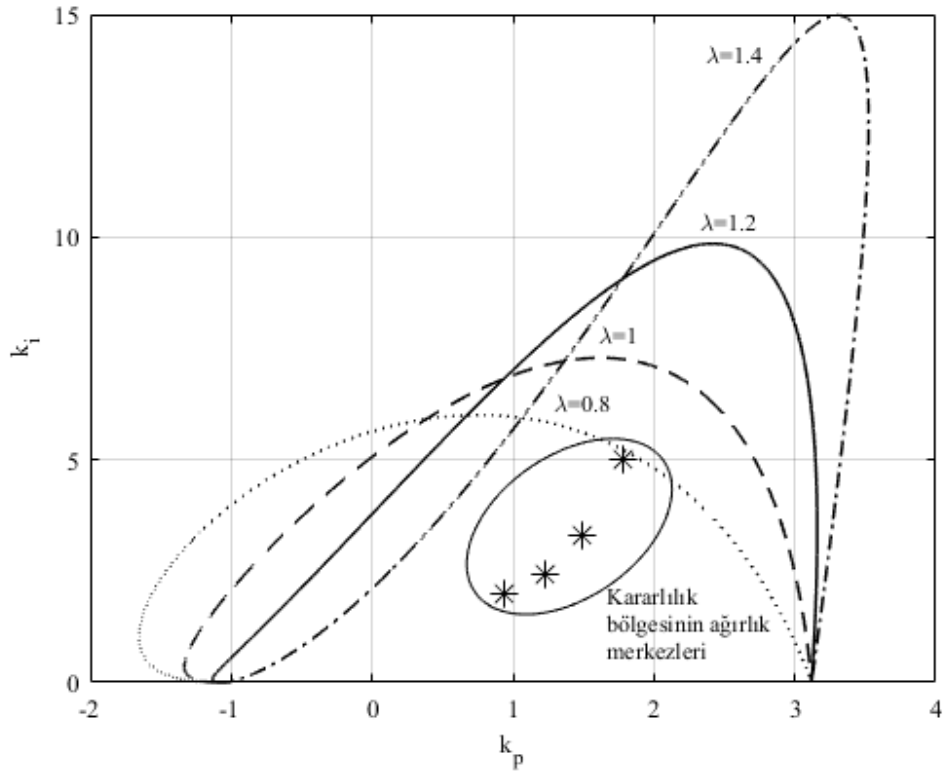
Şekil 9. Farklı λ değerleri için ağırlık merkez noktalarının ayar takip noktası ve bozulma yanıtları (Set point tracking and disturbance responses of centroid points for different values of λ)



Şekil 10. $\lambda = 0.7$, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 1.3$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri (Stability regions and centroid points for $\lambda = 0.7$, $\lambda = 1$ and $\lambda = 1.3$)



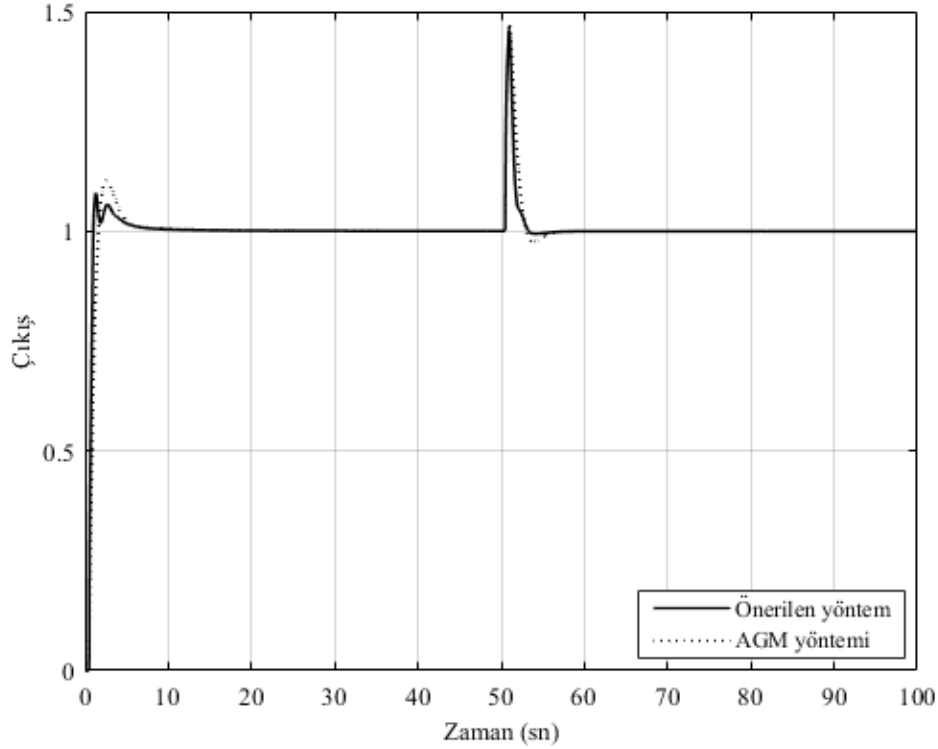
Şekil 11. Farklı λ değerleri için ağırlık merkez noktalarının birim adım değişimi ve bozulma yanıtları
(Unit step change and disturbance responses of centroid points for different values of λ)



Şekil 12. $\lambda = 0.8$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1.2$ ve $\lambda = 1.4$ için kararlılık bölgeleri ve ağırlık merkezleri
(Stability regions and centroid points for $\lambda = 0.8$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1.2$ and $\lambda = 1.4$)

Tablo 2. $\lambda = 0.7$, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 1.3$ için (k_p, k_i) değerleri ((k_p, k_i) values for $\lambda = 0.7$, $\lambda = 1$ and $\lambda = 1.3$)

λ	Orijinal sistem		1. derece Padé yaklaşımı		2. derece Padé yaklaşımı	
	k_p	k_i	k_p	k_i	k_p	k_i
0,7	2,8224	0,36181	2,9661	0,37303	2,824	0,36254
1	3,0643	0,32169	3,2148	0,33422	3,0643	0,32243
1,3	3,2826	0,3642	3,4396	0,3814	3,2851	0,36512



Şekil 13. $\lambda = 1$ için önerilen yöntemin ağırlıklı geometrik merkez yöntemi ile karşılaştırılması
(Comparison of the proposed method with the weighted geometrical center method for $\lambda = 1$)

Tablo 3. $\lambda = 1$ için (k_p, k_i) çiftlerinin farklı yöntemlere göre karşılaştırılması

(Comparison of (k_p, k_i) pairs for $\lambda = 1$ by different methods)

	k_p	k_i
Önerilen yöntem	1,2216	2,4312
AGM yöntemi	0,6538	1,9483

4. Sonuçlar (Conclusions)

Bu yayında Padé yaklaşımı ile dışbükey kararlılık bölgesinin ağırlık merkezi yöntemini kullanarak kesirli dereceli zaman gecikmeli sistemler için pratik bir ayarlama yöntemi sunulmuştur. Yöntem, seçilen kontrolör parametrelerinin oluşturduğu düzlemde çizilen kararlılık bölgesine ve bu bölgedeki ağırlık merkezi parametrelerinin hesaplanmasına dayanır. Bunun dışında ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılarak elde edilen kararlılık bölgelerinin orijinal sistemle neredeyse aynı sonucu verdiği görülmektedir.

Önerilen yöntemin, herhangi bir kompleks grafiksel yöntem kullanılmadan kontrolör parametrelerinin hesaplanması ve kapalı döngü sisteminin kararlılığının sağlanması açısından AGM metodu

kadar önemli avantajları vardır. Ayrıca, hesaplama yükünün oldukça az olması sebebiyle AGM metoduna göre önemli bir avantaj sağlamaktadır. Önerilen yöntem, ağırlıklı geometrik merkez yöntemi kadar birim adım yanıtında ve bozulma yanıtında oldukça güvenilir sonuçlar vermektedir. İleride yapılacak çalışmalarda bu yöntem, $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ve PD^{μ} kontrolörleri gibi diğer kesirli dereceli kontrolör türleri için de araştırılacaktır.

Kaynaklar (References)

1. Chiasson J. ve Loiseau J.J., Applications of Time Delay Systems, Springer, 2007.
2. Şenol B., Demiroğlu U., Matuş R., Analytical approach on the design of fractional order proportional-integral controller for second order plus time delay models, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 37 (1), 121-136, 2022.
3. Wei Y., Hu Y., Dai Y., Wang Y., A generalized Padé approximation of time delay operator, International Journal of Control, Automation and Systems, 14 (1), 181-187, 2016.
4. Hartley T.T., Lorenzo C.F., Qammer H.K., Chaos in a fractional order Chua's system, IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 42 (8), 485-490, 1995.
5. Podlubny I., Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ -controllers, IEEE Transactions on Automatic Control, 44 (1), 208-214, 1999.

6. Zambrano-Serrano E., Muñoz-Pacheco J.M., and Campos-Cantón E., Chaos generation in fractional-order switched systems and its digital implementation, *International Journal of Electronics and Communications (AEÜ)*, 79, 43-52, 2017.
7. Rajagopal K., Hasanzadeh N., Parastesh F., Hamarash I.I., Jafari S., Hussain I., A fractional-order model for the novel coronavirus (COVID-19) outbreak, *Nonlinear Dynamics*, 101 (1), 711-718, 2020.
8. Ahmad S., Ullah A., Al-Mdallal Q.M., Khan H., Shah K., Khan A., Fractional order mathematical modeling of COVID-19 transmission, *Chaos, Solitons and Fractals*, 139, 110256, 2020.
9. Boukhouima A., Hattaf K., Lotfi E.M., Mahrouf M., Torres D.F.M., Yousfi N., Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications, *Chaos, Solitons and Fractals*, 140, 110224, 2020.
10. Cardoso L.C., Dos Santos F.L.P., Camargo R.F., Analysis of fractional-order models for hepatitis B, *Computational and Applied Mathematics*, 37 (4), 4570-4586, 2018.
11. Farman M., Akgül A., Ahmad A., Imtiaz S., Analysis and dynamical behavior of fractional-order cancer model with vaccine strategy, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43 (7), 4871-4882, 2020.
12. Onat C., Şahin M., Yaman Y., Fractional controller design for suppressing smart beam vibrations, *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 84 (4), 203-212, 2012.
13. Onat C., Şahin M., Yaman Y., Piezoelektrik yamalara sahip akıllı bir kirişin titreşimlerinin kesir dereceli bir denetçi yardımıyla aktif denetimi, *Mühendis ve Makina*, 52 (613), 52-58, 2011.
14. Bukhari A.H., Raja M.A.Z., Sulaiman M., Islam S., Shoaib M., Kumam P., Fractional Neuro-Sequential ARFIMA-LSTM for Financial Market Forecasting, *IEEE Access*, 8, 71326-71338, 2020.
15. Tacha O.I., Munoz-Pacheco J.M., Zambrano-Serrano E., Stouboulos I.N., Pham V.-T., Determining the chaotic behavior in a fractional-order finance system with negative parameters, *Nonlinear Dynamics*, 94 (2), 1303-1317, 2018.
16. Onat C., A new design method for PI-PD control of unstable processes with dead time, *ISA Transactions*, 84, 69-81, 2018.
17. Onat C., Hamamci S.E., Obuz S., A practical PI tuning approach for time delay systems, *IFAC Proceedings Volumes*, 45 (14), 102-107, 2012.
18. Onat C., A New Concept on PI Design for Time Delay Systems: Weighted Geometrical Center, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 9 (4), 1539-1556, 2013.
19. Onat C., WGC based robust and gain scheduling PI controller design for condensing boilers, *Advances in Mechanical Engineering*, 2014, 2014.
20. Ozyetkin M.M., Onat C., Tan N., PID tuning method for integrating processes having time delay and inverse response, *IFAC-PapersOnLine*, 51 (4), 274-279, 2018.
21. Özyetkin M.M., Onat C., Tan N., Zaman Gecikmeli Sistemler için PI λ Denetçi Tasarımı, TOK 2012, Niğde-Türkiye, 11-13 Ekim, 2012.
22. Ozyetkin M.M., Tan N., Practical tuning algorithm of PD μ controller for processes with time delay, *IFAC-PapersOnLine*, 50 (1), 9230-9235, 2017.
23. Ozyetkin M.M., A simple tuning method of fractional order PI λ -PD μ controllers for time delay systems, *ISA Transactions*, 74, 77-87, 2018.
24. Ozyetkin M.M., Onat C., Tan N., PI-PD controller design for time delay systems via the weighted geometrical center method, *Asian Journal of Control*, 22 (5), 1811-1826, 2020.
25. Ozyetkin M.M., Bekiroglu K., Srinivasan S., A parameter tuning method for fractional order PD controllers, 16th IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2020, 2020.
26. Tan N., Kaya I., Yeroğlu C., Atherton D.P., Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus, *Energy Conversion and Management*, 47 (18), 3045-3058, 2006.
27. Tan N., Computation of stabilizing PI and PID controllers for processes with time delay, *ISA Transactions*, 44, 213-223, 2005.
28. Astekin D., Özyetkin M.M., Sürekli Kesir Açılımı Yöntemi Üzerine Genişletilmiş Bir Çalışma, TOK 2021 Otomatik Kontrol Ulusal Kongresi, Van-Türkiye, 58-62, 2-4 Eylül, 2021.

