Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi - Mersin University Journal of the Faculty of Education

"Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 2021; 17(3): 433-461"
Araştırma Makalesi / DOI: 10.17860/mersinefd.949263

Erken Orantısal Akıl Yürütmeye Yönelik Öğrenme Rotasının Geliştirilmesi: Bir Tasarı Araştırması

Development of a Learning Trajectory for Early Proportional Reasoning: A Design Research

Rukiye AYAN CİVAK**, Mine IŞIKSAL BOSTAN***, Seçil YEMEN KARPUZCU****

Öz: Orantısal akıl yürütme birçok matematiksel kavramın öğrenilmesi için önem taşır. Orantısal akıl yürütmenin temeli tekrarlı toplamadan ziyade birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerilerine dayanmaktadır. Bu becerilere dayanan süreç gruplama yoluyla birleşik birimlerin oluşturulması, bu birleşik birimlerin bağlanması ve bağlı birleşik birimlerin yinelenmesini içerir. Bu çalışmada bu beceriler erken orantısal akıl yürütme becerileri olarak adlandırılmaktadır. Üç yıllık bir tasarı araştırması kapsamında orantısal akıl yürütmenin gelişimi için varsayıma dayalı öğrenme rotası geliştirilmiş, test edilmiş ve düzenlenmiştir. Bu amaç için, Gerçekçi Matematik Eğitimi Teorisi'ne dayanan bir öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin geliştirilmesine yönelik bir sınıf içi tasarı araştırması yürütülmüştür. Bu öğrenme rotası, orantısal akıl yürütmeye yönelik anahtar öğrenmeleri, bu anahtar öğrenmeler için kullanılacak araç ve imgeler ile muhtemel sınıf içi söylemler ve jest kullanımlarını içermektedir. Mevcut çalışmada, bu öğrenme rotasının başlangıç kısmını oluşturan erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesinin hedeflendiği kısmı sınıf içi uygulama örnekleriyle sunulmuştur. Çalışmanın verilerini Ankara'da bir devlet okulundaki sınıf içi öğretimin video kayıtları ve öğretmen/öğrenci ve tasarı ekibi görüşmelerinin sesli kayıtları oluşturmaktadır. Sınıf içi öğretim, öğrencilerin anlamlı öğrenmelerinin ölçülmesi amacıyla argümantasyon şemaları oluşturularak analiz edilmiştir. Çalışmanın bulgularına göre hedeflenen anahtar öğrenmelere yönelik geliştirilen öğrenme rotasının erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesi için önemli bir potansiyele sahip olduğu görülmektedir.
Anahtar Kelimeler: erken orantısal akıl yürütme, varsayıma dayalı öğrenme rotaları, tasarı araştırması, gerçekçi matematik eğitimi.

Abstract: Proportional reasoning is essential for the learning of numerous mathematical concepts. Proportional reasoning is based on linking composite units and iterating linked composites, rather than repeated addition. Those skills are referred to as early proportional reasoning skills in this study. In a three-year-long design research project, a hypothetical learning trajectory for proportional reasoning was developed, tested, and revised. To this purpose, a classroom design research study aimed at developing a hypothetical learning trajectory and related instructional sequence was conducted. This trajectory includes the big ideas of proportional reasoning, the tools and imageries to support those ideas, and possible mathematical discourse and gesture use. In this particular study we present the first phase of this trajectory, which is related to the development of early proportional reasoning. The data of this study consist of video recordings of classroom sessions conducted in a public school in Ankara and audio recordings of student/teacher and design team meetings. The classroom sessions were analyzed by constructing related argumentation schemes to evaluate meaningful learning of students. The findings of the study showed that the learning trajectory developed to support the big ideas of early proportional reasoning has substantial potential for the development of early proportional reasoning.
Keywords: early proportional reasoning, hypothetical learning trajectories, design research, realistic mathematics education.

Giriş

Oran ve orantı konusunda başarı ve yetkinlik göstermek için en önemli ve kapsamlı beceri orantısal akıl yürütme becerisidir. Özellikle ilkokul ve ortaokul matematik öğretim

*Bu çalışma, 217K430 kodlu Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) projesinden üretilmiştir.
***Sorumlu yazar,* Dr. Öğr. Üyesi, İzmir Demokrasi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İzmir-Türkiye, ORCID: 0000-0002-1278-025, e-posta: rukiye.ayancivak@idu.edu.tr
***Prof. Dr., Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ankara-Türkiye, ORCID: 0000-0001-7619-1390, e-posta: misiksal@metu.edu.tr
**** Dr. Öğr. Üyesi, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Kütahya-Türkiye, ORCID: 0000-0002-2150-000X, e-posta: secil.karpuzcu@dpu.edu.tr

Gönderi Tarihi: 07.06.2021 - Kabul Tarihi: 29.11.2021

programlarında bulunan birçok konu başta olmak üzere çok sayıda matematiksel kavram ve durumun temelinde orantısal akıl yürütme yatmaktadır. Orantısal akıl yürütmenin temelini oluşturduğu başlıca matematik konuları yüzde, harita ölçeklendirmeleri, kesirler, trigonometri, benzerlik (Beswick, 2011); olasılık ve istatistik (Greenes ve Fendell, 2000); grafikler ve fonksiyonlar (Fuson ve Abrahamson, 2005) olarak sıralanabilir. Bunun yanı sıra, fen alanında ve günlük hayattaki birçok durumların temelinde de orantısal akıl yürütme vardır (Cramer ve Post, 1993; Spinillo ve Bryant, 1999). Örneğin, sıcaklık, yoğunluk, hız, karışımlar ve bileşikler orantısal akıl yürütmeyi gerektiren fen konularıdır (Karplus, Pulos ve Stage, 1983). Buna ek olarak, orantısal akıl yürütme günlük hayatta en hesaplı alışveriş seçeneğine karar verme, kişisel finans yönetimi, ilaç doz ayarlamaları, ekonomik ve sosyolojik tahminlerde bulunma ile ilgili alanlarda karşımıza çıkmaktadır (Spinillo ve Bryant, 1999). Bu sebeplerden dolayı orantısal akıl yürütmenin diğer kavramların gelişiminde mühim olan kapsamlı ve birleştirici bir beceri olduğu açıktır.

Bu derece önemli ve kapsamlı bir beceri olmasına rağmen, ulusal ve uluslararası birçok çalışmanın sonucunda her seviyeden öğrencilerin orantısal akıl yürütme becerilerinin zayıf olduğu ve bu konuda birçok kavram yanılgısına sahip oldukları ortaya konmuştur (Çelik ve Yetkin Özdemir, 2011; Duatepe, Akkuş-Çıkla ve Kayhan, 2005; Kaplan, İşleyen ve Öztürk, 2011; Misailadou ve Williams, 2003; Resnick ve Singer, 1993; Toluk-Uçar ve Bozkuş, 2016; Tourniaire ve Pulos, 1985). Alanyazında orantısal akıl yürütme ile ilgili en sık bahsedilen kavram yanılgısı toplamsal düşünmedir (Hart, 1988; Kaput ve West, 1994; Karplus vd., 1983; Misailadou ve Williams, 2003; Resnick ve Singer, 1993; Tourniaire, 1986; van Dooren, De Bock ve Verschaffel, 2010). Toplamsal düşünme biçimi oranı oluşturan çokluklardan ikisinin arasındaki farkın diğer ikiliye uygulanmasıdır (Tourniaire ve Pulos, 1985). Halbuki orantısal akıl yürütme çarpımsal düşünme becerisi gerektirmektedir.

Öğrenciler ilkokulun ilk yıllarından itibaren ilk olarak toplama ve çıkarma işlemlerini öğrenirler. Bu düzeyde öğrencilerin uğraştıkları soru tipleri "A ve B'nin toplamı ne olur?" veya "A, B'den ne kadar fazladır?" gibi sorulardır. Sonraki yıllarda ise tekrarlı toplamanın kısa yolu olarak çarpma işlemini öğrenirler. Bu sebepten dolayı, bazı araştırmacılar (ör. Fischbein, Deri, Nello ve Marino, 1985) çarpımsal düşünmenin toplamsal düşünmeye dayalı olduğunu savunmuştur. Öğrencilerin çarpımsal düşünme gerektiren problemler için sıklıkla toplamsal stratejiler kullanmalarının temelinde de bu durum yatmaktadır. Ancak daha sonraki çalışmalarda bu bakış açısının eksik ve yüzeysel olduğundan söz edilmektedir (Park ve Nunes, 2001; van Dooren vd., 2010). Park ve Nunes (2001) yaptıkları çalışmada tekrarlı toplamanın yalnızca çarpma işlemi gerektiren problemler için kullanılan bir işlemsel strateji olduğunu belirtmiştir. Çarpımsal düşünmenin temelinin ise toplamsal düşünmeden ziyade birleşik birimleri bağlama (linking composite units) ve bağlı birleşik birimleri yenileme (iterating linked composites) becerilerine dayandığını savunulmaktadır (Battista ve Borrow, 1995; Park ve Nunes, 2001; Steffe, 1994). Bu beceriler öğrencilerin oran ve orantı öğretiminden önce sahip oldukları birimleme (unitizing) ve biçimlendirme (norming) ritmik sayma ve artırma (build-up) gibi sezgisel stratejilere dayanmaktadır (Battista ve Borrow, 1995; Kaput ve West, 1994; Lamon, 1994, 1995; Park ve Nunes, 2001; Steffe, 1994).

Öğrencilerin orantısal akıl yürütmeye yönelik yaşadıkları zorluklar ve sahip oldukları kavram yanılgılarının temel sebebi olarak sınıflarda ve kitaplarda bu becerinin kısıtlı ve yüzeysel olarak ele alınması gösterilmiştir (Lamon, 1995; Lesh, Post ve Behr, 1988). Öyle ki orantısal akıl yürütme geleneksel olarak $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ şeklinde gösterilebilecek ilişkilerdeki verilmeyen değişkeni bulma olarak tanımlanmaktadır (Lesh vd., 1988). Bu durum birçok kitapta oran ve orantı konularının öğretiminde de geçerlidir. Bu bağlamda, ulusal ve uluslararası ders kitaplarında ve sınıflarda bu beceriler yalnızca oran ve orantı konusu kapsamında ele alındığı ve konunun girişinin işlemsel ve sembolik bilginin verilmesi ile yapıldığı görülmektedir (Duatepe vd., 2005;

Lamon, 1995). Bu süreçte öğrencilere orantısal problemlerde verilen bilgiyi bağlamdan kopararak birbirine eş iki oran olarak ifade etmeleri ve içler dışlar çarpımı algoritması ile çözümü bulmalarının öğretildiği göze çarpmaktadır (Karplus vd., 1983). Ancak, matematik eğitimi alanyazınında öğrencilerin içler dışlar çarpımı algoritmasını anlamlandıramadıkları, bu stratejinin öğrencilerde doğal olarak gelişmediği ve orantısal akıl yürütmenin gelişimini desteklemediği, aksine engel olduğuna vurgu yapılmaktadır (Hart, 1988; Lamon, 1995; Lesh vd., 1988). Bunun yanı sıra, bu tür işlemsel stratejilerin ancak kavramsal anlamadan sonra öğretilmesi gerekliliği vurgulanmaktadır.

Benzer şekilde, Türkiye'deki öğretim incelendiğinde çarpmanın çoğunlukla tekrarlı toplama üzerine kurulduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra, orantısal akıl yürütme kitaplarda ve sınıflarda sınırlı ve yüzeysel olarak ele alınmaktadır. Bu durum Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) da görülmektedir. Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nda orantısal akıl yürütme terimi kullanılmasa da bu beceri ile ilgili kazanımlar bulunmaktadır. Programa göre, öğrenciler oran kavramı ile altıncı sınıfta karşılaşmaktadır. Bu sınıf düzeyinde öğrencilerden parça-parça/parça-bütün, aynı/farklı birimli çoklukların oranlarını belirleme ve çoklukları karşılaştırmada oran kullanma ve oranı farklı biçimlerde göstermeleri beklenmektedir. Yedinci sınıfta ise birim oranı anlamlandırmaları, verilmeyeni bulma problemlerini çözmeleri ve ters ve doğru orantılı durumları incelemeleri ve ilgili problemleri çözmeleri beklenmektedir. Sekizinci sınıf düzeyinde oran ve orantı konuları olmasa da benzer şekillerin kenarları arasındaki oranları bulmaları ve genel olarak benzerlik oranını anlamlandırmaları beklenmektedir. Dolayısıyla, öğretim programında orantısal akıl yürütme, çarpımsal-toplamsal düşünme becerilerine değinilmezken oran ve orantı kavramları ile ilgili işlemsel becerilerin ön planda olduğu ve bu kavramların diğer konu ve kavramlardan bağımsız olarak ele alındığı görülmektedir. Bu konunun kitaplarda ve sınıf içerisinde öğretimi söz konusu olduğunda ise öğretimin içler-dışlar çarpımı gibi işlemsel algoritmalara yoğunlaştığı ve öğrencilerin farklı strateji kullanmalarının desteklenmediği ileri sürülebilir. Ancak matematik eğitimi alan yazınında bu tür işlemsel algoritmaların yalnızca cebirsel manipülasyon olduğu ve orantısal akıl yürütmenin göstergesi olamayacağına vurgu yapılmaktadır (Lesh ve diğerleri, 1988). Yukarıda belirtildiği gibi, bu tür işlemsel stratejilerin ancak kavramsal anlamadan sonra öğretilebileceği, öncelikli olarak öğrencilerin farklı bağlamlar içerisindeki orantısal durumları anlamlandırmaları ve kendi stratejilerini geliştirmelerinin sağlanmasının gerektiği belirtilmektedir (Lesh vd., 1988). Bu bağlamda özellikle orantısal akıl yürütmenin kavramsal temellerinin atılması için öğretimin geliştirilmesine yönelik ihtiyaç göze çapmaktadır.

Amerikan Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) orantısal akıl yürütme öğretiminin öğrencilerin sezgisel ve informel bilgilerinin üzerine inşa edilmesi gerekliliğini vurgulamıştır. Bu doğrultuda, öncelikli olarak öğrencilerin farklı bağlamlar içerisindeki orantısal durumları anlamlandırmaları ve kendi stratejilerini geliştirmelerinin sağlanması gerekliliği doğmaktadır. Bu amaçla bu çalışmada, Gerçekçi Matematik Eğitimi Teorisi'ne (GME) dayalı bir öğrenme rotasının ve ilgili etkinlik dizisinin geliştirilmesi yoluyla oran ve orantının temelinde yer alan becerilerin geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bu sayede oran ve orantı öğretiminin kalitesini arttırma potansiyeli olan ve öğretmenler tarafından sınıflarda hazır olarak kullanılabilecek bir varsayıma dayalı öğrenme rotasının ve ilgili yerel öğretim teorisinin ortaya konması amaçlanmaktadır. Böylelikle, oran ve orantı kavramları kullanılmadan ve tanımları verilmeden öğrencilerin erken orantısal akıl yürütmelerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir. Daha detaylı belirtmek gerekirse, bu çalışma kapsamında öğrencilerin tekrarlı toplamadan ziyade birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerilerinin gerçekçi bir bağlamda, sezgisel stratejiler (birimleme, biçimlendirme, ritmik sayma ve artırma vb.) ve informel araçlar (oran tabloları, gruplandırma için kapalı eğriler vb.) kullanılarak geliştirmesine yönelik bir varsayıma dayalı öğrenme rotası ve etkinlik dizisi sunulmaktadır. Bunun yanı sıra, bu etkinlik dizisi ve öğrenme rotasının erken orantısal yürütmenin temellerinin atılması için sahip olduğu potansiyelin göz önüne serilmesi için sınıf içi öğretimden örnek öğrenci düşünüşleri ve sınıf içi diyaloglar sunulmaktadır.

Erken orantısal akıl yürütme

1990lı yıllardan önce yapılan çalışmalarda orantısal akıl yürütmenin somut işlemler dönemine kadar gelişmediği öne sürülse de son 30 yıl içerisinde yapılan çok sayıda çalışmada öğrencilerin oran ve orantıya yönelik aldıkları formel öğretim öncesinde orantısal akıl yürütme şemalarının oluşmaya başladığına dikkat çekilmiştir. Örneğin, Inhelder ve Piaget'e (1958) göre öğrencilerin orantısal akıl yürütmeye yönelik erken ve sezgisel bilgileri "iki çokluk birlikte ilerliyor" şeklinde basit bir nitel ilişkiye dayanmaktadır. Benzer şekilde, Lamon (2007) öğrencilerin sezgisel bilgilerinin "bir çokluk değiştiğinde diğeri de belirli bir şekilde değişiyor" şeklinde temel kovaryasyonel ilişkiye dayandığını belirtmiştir. Öğrencilerin orantısal akıl yürütmeye yönelik sezgisel ve informel bilgileri son yıllarda birçok çalışmanın (Boyer ve Levine, 2012; Gouet, Carvajal, Halberda ve Peña, 2020; Resnick ve Singer, 1993; Spinillo ve Bryant, 1999) konusu olmuştur. 1980li yıllarda yürütülen çalışmaların sonucu olarak yapılan orantısal akıl yürütmenin temelinin tekrarlı toplama olduğuna yönelik çıkarımların aksine sonraki yıllarda yürütülen çalışmalarda orantısal akıl yürütmenin temelinin birleşik birimleri yineleme becerisine dayandığı vurgulanmaktadır (Battista ve Borrow, 1995; Park ve Nunes, 2001; Steffe, 1994). Örneğin Steffe'nin (1994) çalışmasında çarpımsal (orantısal) ilişkilerin anlamlandırılması için birleşik birimleri yineleme becerisinin önemine değinilmektedir. Bu becerinin örneklendirilmesi için bir öğrencinin her bir sırada üç küpün olduğu dokuz sıradan oluşan dikdörtgensel yapıda bulunan küp sayısına yönelik olarak verdiği cevap kullanılabilir. Bu süreçte öğrencinin her bir sırada üç küpün olduğu dokuz sıralı yapıda parmaklarıyla üçer üçer saydığında(3, 6, 9, 12, 15, …) öğrencinin üç küpü yinelenecek bir birleşik birim (iterating unit) olarak oluşturması bir birleşik birim (composite unit) oluşturma sürecine örnek olarak verilebilir. Öğrenci bu birleşik birimi dokuz kez yinelediğinde ise bu süreç birleşik birimlerin yinelenmesine yönelik beceriye örnek teşkil etmiş olur.

Steffe'nin bu konudaki çalışmalarının devamında yapılan çalışmalarda da birleşik birimleri yineleme becerisi bir grubun sayılabilir bir birim alınarak bu birimin temelindeki elemanların yapıları değiştirilmeden tekrarlanması olarak tanımlanmıştır (Battista ve Borrow, 1995). Battista ve Borrow (1995) bu beceri kazanıldıktan sonra oran durumlarında da benzer becerilerin kullanılabilmesinin mümkün olduğunu savunmuştur. Bunu ölçmek için bir ikinci sınıf öğrencisine bazı problemler yönelterek birebir görüşme yapmışlardır. Görüşmeyi yapan araştırmacı ilk olarak 5 beyaz ve 3 kırmızı çubuktan oluşan bir grup çubuk göstermiş ve toplamda 10 beyaz çubuk olması için beyaz çubuklardan oluşan aynı gruptan kaç tane olması gerektiğini sormuştur. Öğrenci, "5, 10" diye tekrarlı sayarak 2 grup cevabını vermiştir. Dolayısıyla öğrenci burada 5 beyaz çubuktan oluşan bir grubu bir birim alarak 2 kez yinelemiştir. Daha sonra araştırmacı toplamda 12 kırmızı çubuk olması için kaç tane kırmızı çubuklardan oluşan aynı gruptan olması gerektiğini sormuş ve öğrenci "12 kırmızı olması için 4 gruba ihtiyacımız vardır ve bu 5, 10, 15, 20 beyaz çubuk olmasını gerektirir" cevabını vermiştir. Sonuç olarak, öğrenci üçlü ve beşli birleşik grupları yineleyerek doğru cevaba ulaşabilmiştir. Battista ve Borrow (1995) öğrencinin bu düşünme sürecini birerli sayma şeması ile üçerli sayma şemasını koordine etme becerisini genişleterek bağlı birleşik birimler sayma şemasını oluşturabildiğini ileri sürmüş ve bu süreci aşağıdaki gibi şemalandırmıştır. Öğrencinin sayma şeması ilk durumda aşağıda verilen Şekil 1'deki gibiyken görüşme sürecinde öğrencinin sayma şeması aşağıda verilen Şekil 2'deki duruma genişlemiştir:

1 grup	2 grup	3 grup	4 grup
3 nesne	6 nesne	9 nesne	12 nesne

Şekil 1. Birerli ve üçerli sayma şeması (Battista ve Borrow, 1995, s. 4)

1 grup	2 grup	3 grup	4 grup
3 K	6 K	9 K	12 K
5 B	10 B	15 B	20 B

Şekil 2. Bağlı birleşik birimler içeren sayma şeması (Battista ve Borrow, 1995, s. 4)

Battista ve Borrow (1995) bu süreçte öğrencinin 3 birleşik birim ile 5 birleşik birimi eşgüdümlü olarak yinelediğini ve bu sürecin ileriki yıllardaki formel oran ve orantı kavramlarının anlamlandırmasında ve özellikle artırma (build-up) stratejisinin kullanımında temel olduğunu savunmuşlardır. Bunun yanı sıra, tekli grupları yineleme ve birbirine bağlı çoklu grupları yineleme becerilerini oran ve orantı problemlerini çözmeden önce gelen erken stratejiler olarak nitelendirmişler ve bu yineleyici sürecin anlamlandırılması, çarpma ve bölme işlemleriyle ve diğer ön öğrenmelerle ilişkilendirilmesi sayesinde öğrencilerin oran ve orantı problemlerini çözebileceklerini belirtmişlerdir (Battista ve Borrow, 1995).

Benzer becerileri ifade etmek için Lamon (1994) *birimleme* ve *biçimlendirme* terimlerini kullanmıştır. Lamon'a göre, birimleme ve biçimlendirme referans olarak kullanılacak bir birim oluşturma ve başka bir durumu bu referans birimi üzerinden yorumlama becerileridir. Diğer bir deyişle, birimleme ve biçimlendirmedeki amaç verilen bir durumu başka bir durum üzerinden yorumlamaktır (Lamon, 1994). Bu becerilerin en yaygın olarak kullanıldığı durumlar aynı vasfa sahip çokluklar içerisinde görülen ölçek katsayısının belirlenmesidir. Bir öğrenci bu becerileri kullanarak "5 adet penye yapmak için 15 metre kumaş gerekiyor. Buna göre, 10 adet penye yapmak için kaç metre kumaş gerekir?" şeklindeki bir orantısal akıl yürütme problemine aşağıdaki gibi cevap verebilir:

		$\xrightarrow{\times 2}$	
1. Çokluk (penye sayısı, $Ç_1$)	5		10
2. Çokluk (kumaş miktarı, $Ç_2$)	15		?
		$\xrightarrow[\times 2]{}$	

Şekil 3. Birimleme ve biçimlendirme kullanılarak ölçek katsayısının bulunması

Şekil 3'teki gibi düşünen bir öğrenci 5 adet penyeyi bir birleşik birim olarak alıp (birimleme) 15 adet penyenin içerisinde bu birleşik birimden 3 tane olduğunu bularak ölçek katsayısını 3 olarak belirlemiştir. Bu öğrenci, bu ölçek katsayısını ikinci duruma da uygulayarak verilmeyen değeri bulabilir (Lamon, 1994). Diğer bir taraftan, bu öğrenci aynı becerileri kullanarak farklı vasıflara sahip çokluklar arasındaki fonksiyonel ilişkileri de kullanabilir (Lamon, 1994). Bu şekilde düşünen bir öğrenci aynı soru için aşağıdaki şekilde verilen biçimde bir akıl yürütme yapabilir.

1. Çokluk (penye sayısı, $Ç_1$)		5	10		
	×3 $\downarrow$			$\downarrow$ ×3	
2. Çokluk (kumaş miktarı, $Ç_2$)		15	?		

Şekil 4. Birimleme ve biçimlendirme kullanılarak fonksiyonel ilişkinin bulunması

Şekil 4'teki gibi düşünen bir öğrenci "5 adet penye için 15 metre kumaş gerekiyorsa, penye sayısı ile kumaş miktarı arasında nasıl bir ilişki vardır?" sorusuna cevap olarak penye sayısı ile kumaş miktarı arasındaki ilişkiyi "3 kat ilişkisi" olarak bulmuştur. Dolayısıyla, bir orantıyı oluşturan çokluklar birbirine bağlı çokluklar olarak bir tablo içerisine yerleştirildiğinde bu sayılar arasında yatay ve dikey ilişkiler ortaya çıkmaktadır. Matematik eğitimi alan yazınında bu ilişkiler aynı ölçüm uzayına (within measure space) ait çokluklar arasındaki ilişkiler ve farklı ölçüm uzayına (between measure spaces) ait çokluklar arasındaki ilişkiler olarak yer almaktadır (Freudenthal, 1973; Lamon, 1994; Vergnaud, 1994). Bazı araştırmacılar aynı ölçüm uzayına ait çokluklar arasındaki ilişkilerin farklı ölçüm uzayına ait çokluklar arasındaki ilişkilerden daha doğal olduğunu ve çocukların sezgisel ve informel olarak bu ilişkileri anlamlandırdığını savunmaktadır (Karplus vd., 1983; Vergnaud, 1980). Buna kanıt olarak, 14. yüzyıla kadar orantısal akıl yürütme ile ilgili kabul edilen tek düşünüş biçiminin aynı ölçüm uzayına ait çokluklar arasındaki ilişkilerden oluştuğunun da verilebileceği belirtilmiştir (Freudenthal, 1978; Karplus vd., 1983). Diğer bir yandan, farklı ölçüm uzayına ait çokluklar arasındaki ilişkilerin aynı ölçüm uzayına ait ilişkilerden matematiksel olarak daha üst düzey bir düşünme gerektirdiği ve fonksiyonel düşünme ile ilişkili olduğuna da vurgu yapılmıştır (Karplus vd., 1983). Sonuç olarak öğrencilerin kullandıkları stratejiler ne olursa olsun orantısal akıl yürütme süresince uygulanan stratejilerin altında bu iki ilişkiden birinin yattığı belirtilmektedir (Lamon, 1994). Dolayısıyla, orantısal akıl yürütmenin temelinde bu ilişkilerin anlamlandırılmasının yer aldığı sonucuna ulaşılmaktadır (Lamon, 1995). Bu sebepten dolayı, bu çalışma kapsamında birleşik birimleri bağlama ve yineleme süreçleri ya da diğer ifade ile birimleme ve biçimlendirme süreçleri ve bu süreçlere yönelik dikey ve yatay ilişkilerin anlamlandırılması erken orantısal akıl yürütme becerileri olarak adlandırılmaktadır.

Öğrencilerin erken orantısal akıl yürütmelerinin desteklenmesi için orantısal akıl yürütmenin gelişiminin incelenmesi de gereklidir. Orantısal akıl yürütmenin gelişimini ortaya koyan çalışmalar erken orantısal akıl yürütmenin bileşenleri ve gelişimsel süreci ile ilgili önemli bilgi verebilir. Orantısal akıl yürütmenin gelişimini açıkça ortaya koyan bir çalışma bulunmamasına karşın bazı araştırmacılar orantısal akıl yürütmenin gelişimindeki önemli basamaklardan bahsetmektedir. İlk olarak, Bryant (1974) orantısal akıl yürütme şemalarının az-çok ilişkileri gibi kıyaslamaya yönelik çıkarımlardan başlayarak kıyaslamaları sayısallaştırmaya doğru ilerleyen bir süreç boyunca oluşturulduğunu öne sürmüştür. Sonraki yıllarda Lesh ve diğerleri (1988) orantısal akıl yürütmenin gelişiminde önemli olan beş hiyerarşik basamaktan bahsetmiştir. Bu basamaklar şu şekilde özetlenebilir: (1) bazı bilgilerin ihmal edilerek kıyaslamalar yapılması (ör. bir orantıdaki değişkenlerden yalnızca birine göre kıyaslama yapılması), (2) orantı oluşturan dört değer arasındaki ilişkilerin nitel olarak (az-çok) fark edilmesi, (3) sabit farkların toplamsal biçimde fark edilmesi, (4) örüntülerin ve yinelemelerin artırma stratejisi kullanılarak fark edilmesi, (5) iki değer arasındaki çarpımsal ilişkinin fark edilmesi ve bu ilişkinin diğer değerlere uygulanması. Diğer bir çalışmada ise Kaput ve West (1994) orantısal akıl yürütmenin koordineli artırma stratejileri (eşgüdümlü ritmik sayma), çarpma ve bölme yoluyla kısaltılmış artırma stratejileri ve birim faktör yaklaşımları olmak üzere üç temel aşamada geliştiğini öne sürmüştür. Bu sonuçlara dayanarak orantısal akıl yürütmenin öncelikle nitel ve toplamaya dayalı kıyaslamalar ile başlayıp sayısal ve çarpımsal kıyaslamalara doğru ilerleyen bir süreç kapsamında geliştiği anlaşılmaktadır.

Yukarıda söz edilen gelişim basamaklarının yanı sıra bazı araştırmacılar orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotaları da ortaya koymuşlardır. İlk olarak, birbirinin devamı olan iki çalışmada Carpenter, Gomez, Rousseau, Steinthorsdottir, Valentine, Wagner ve diğerleri (1999) ve Steinthorsdottir ve Sriraman (2009) dört seviyeli bir öğrenme rotası önermişlerdir. Bu rotanın ilk seviyesi rastgele işlemler yapmak ya da toplamsal düşünme ile ilgilidir. İkinci seviyede öğrenciler birbirinin tam katı sayılar içeren oranı bir birim olarak algılamakta ve tekrarlı toplama veya çarpma yoluyla denk oranlar bulabilmektedir. Üçüncü seviyede tam katı sayılar içermeyen oranlarla da aynı işlemler yapılabilmektedir. Dördüncü seviyede ise öğrenciler oranı birimden öte algılayıp bu orandaki aynı ölçüm uzayına ve farklı ölçüm uzaylarına ait ilişkileri keşfedebilir. Diğer bir çalışmada ise Wright (2014) rasyonel sayılar için öne sürdüğü öğrenme rotasında oran ve orantının gelişimine yönelik dört aşamalı bir rotadan da bahsetmektedir. Bu rotanın ilk aşaması oranı oluşturan çokluklar arasında bulunan tek bir ilişkiye (ör. fark) odaklanmak ile ilgilidir. İkinci aşamada ise öğrencilerin birleşik bir birim oluşturdukları, bu birimi oran olarak algıladıkları ve tekrarlı toplama ile bu birleşik birimi yinelediklerinden bahsedilmiştir. Üçüncü aşamada bu birleşik birimin çarpma işlemleri ile yinelendiği öne sürülmüştür. Dördüncü aşamada ise oranın yinelenebilir bir birim olarak algılanması ve bu orandaki aynı ölçüm uzayına ve farklı ölçüm uzaylarına ait ilişkilerin tam sayı katı olmayan oranlarda bile esnek bir şekilde kullanıldığı belirtilmiştir.

Yukarıda bahsedilen orantısal akıl yürütmenin basamakları ve bunlara yönelik öğrenme rotaları bireysel gelişime odaklanmıştır ve etkinliklerden bağımsız olarak ele alınmıştır. Bu sebepten dolayı, bu gelişim basamakları ve öğrenme rotaları hazır olarak öğretmenlerin sınıf içerisinde kullanımına uygun değildir (Daro, Mosher ve Corcoran, 2011). Diğer yandan, öğrencilerin akıl yürütmeleri onlara sunulan öğretime, bu öğretimde yer verilen soru ve etkinliklere ve sınıf içerisindeki sosyal etkileşimlere de bağlıdır. Ancak alan yazında sosyal etkileşimlerin olduğu ve bir sınıf içerisinde öğrencilerin hazırlanan etkinlik dizisi boyunca öğrenme rotalarını göz önüne süren çalışmalar az sayıdadır. Bu çalışma kapsamında sosyal bir öğrenme ortamı olan bir sınıf içerisindeki öğrencilerin ortaklaşa bir şekilde erken orantısal akıl yürütmelerinin gelişimi ve geliştirilen öğrenme rotası kapsamında bu gelişimin nasıl desteklenebileceğine yönelik fikirler sınıf içi uygulama örnekleriyle sunulmaktadır. Böylelikle öğretmen ve araştırmacıların hazır olarak kullanabilecekleri, geliştirilen etkinlikler boyunca ortaya çıkan bir sınıfa ait öğrenme rotası ve bu öğrenme rotasının desteklenmesi için ilgili prensipler ortaya konulmaktadır.

Varsayıma dayalı öğrenme rotaları

Alanyazın taramasından anlaşıldığı üzere orantısal akıl yürütme öğrencilerin zorlandıkları alanlardan birisidir. Bunun yanı sıra, çok sayıda araştırmacı öğretmenlerin de orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik temel anahtar öğrenmelerle ilgili zorluklar yaşadıkları, öğrencilerinin gelişimlerini desteklemek için etkili ve zengin öğrenme ortamları geliştirmekte yetersiz kaldıkları ve bu konu ile ilgili bilgilerinin yüzeysel, sınırlı ve işlemsel olduğunu belirtmiştir (Hilton ve Hilton, 2019; Kastberg, D'Ambrosio ve Lynch-Davis, 2012; Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder ve Thompson, 1998; Thompson ve Thompson, 1994, 1996; Weiland, Orrill, Nagar, Brown ve Burke, 2020).

Varsayıma dayalı öğrenme rotaları (hypothetical learning trajectories), Simon (1995) tarafından alan yazına kazandırılmış bir terim olmakla birlikte "öğrenmenin hangi rotada gerçekleşeceğine yönelik öngörüler" olarak tanımlanmıştır (s. 135). Bu kapsamda varsayıma dayalı öğrenme rotalarının öğrenmeye yönelik amaçlar, bu amalara ulaşmayı sağlayacak öğrenme etkinlikleri ve öğrencilerin bu etkinlik ile ilgilendikleri süreç zarfında deneyimleyecekleri düşünüşleri ve öğrenmeleri içerdiği belirtilmiştir (Clements ve Sarama, 2004; Simon, 1995). Sonraki yıllarda bu görüş devam ettirilerek öngörülen öğrenme rotasının desteklenmesi için öğrenme etkinliklerinin öğrenme rotasının önemli bir bileşeni olduğu vurgulanmıştır. Buna ek olarak, bu etkinliklerin varsayılan öğrenme rotası boyunca gelişimlerinin desteklenmesi için sıralanması gerektiğini savunulmuş ve bu sıralı etkinlikler "etkinlik dizisi" olarak adlandırılmıştır (Clements ve Sarama, 2004; Cobb, 1999). Varsayıma dayalı öğrenme rotaları ilk yıllarda bireysel rotalar olarak görülürken Stephan (2015) bireysel öğrenme rotalarının değişken olabileceğini öne sürerek bir sınıfa ait öğrenme rotaları (classroom learning tracjectories) üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bir sınıfa ait öğrenme rotaları öğretim esnasında öğrencilerin kendi arasında ve öğretmenle etkileşimleri süresince oluşan fikir paylaşımı, imge/araç kullanımı, muhtemel matematiksel söylemler ve muhtemel jest/mimik kullanımlarından oluşur (Stephan, 2015). Bu anlamda, öğrencilerin öngörülen öğrenme rotalarını izlemeleri için hazırlanacak etkinlik dizisi önem taşımaktadır (Stephan, 2015). Ayrıca, görüldüğü gibi basitten karmaşığa doğru bir fikir paylaşımının yanı sıra araç, model, jest ve mimik kullanımı bir sınıfa ait öğrenme rotalarının önemli bileşenleridir. Bu anlamda, bir sınıfa ait öğrenme rotaları ve bu öğrenme rotalarına yönelik etkinlik dizilerinin geliştirilmesinde Gerçekçi Matematik Eğitimi öğretimsel tasarım teorisi olarak kullanılabilir (Stephan, 2015). Bu çalışmada bir yedinci sınıftaki öğrencilerin erken orantısal akıl yürütme becerilerinin gelişimine yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi geliştirilmiş, test edilmiş ve düzenlenmiştir. Bu öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin geliştirilmesi ve uygulanmasında GME prensipleri temel alınmıştır.

Gerçekçi matematik eğitimi

Geleneksel olarak matematik derslerinde formel matematiksel bilginin öğrencilere hazır olarak başlangıçta verildiği bilinmektedir. Bu anti-didaktik yaklaşım öğrencilerin matematiği hazır kuralların ezberlenmesini gerektiren bir alan olarak görmesine neden olabilmektedir (Freudenthal, 1973). Gerçekçi Matematik Eğitimi teorisi bu anti-didaktik öğretim biçimine karşıt olarak matematiğin insan etkinliği olarak görülmesi ve matematiğin öğrenenlerin etkinliklerinde yeniden keşfedilme süreci ile yapılandırılmasını savunan bir teori olarak öne çıkmaktadır (Freudenthal, 1973, 1991). Bu teoriye göre öğrenciler gerçekçi durumlar içerisinde verilen problemleri inceler, somut ve informel çözüm stratejilerinden yola çıkarak öğrenmeleri gereken matematiksel bilgiyi matematik problem çözme sürecinde edinirler. Bu süreç sonunda formel matematiksel bilgiye ulaşma süreci ise *matematikleştirme* olarak isimlendirilmiştir. Bir sınıf ortamında matematikleştirme öğrenciler ve öğretmen arasında ortaklaşa gerçekleşen bir tartışma süreci boyunca ortaya konulan çıkarımların gererkçelendirilmesi ve çürütülmesi yoluyla ortak kanılara ulaşılması sürecini içerir. GME kapsamında bir sınıf içerisindeki matematikleştirme sürecinin desteklenmesi için gerçekçi durumlardan başlayan ve kademeli olarak formel bilgiye ulaşmayı sağlayacak bir etkinlik dizisinin geliştirilmesi kritik öneme sahiptir (Gravemeijer, Cobb, Bowers ve Whiteneck, 2000). Bu etkinlik dizisinin geliştirilmesi ve uygulanması sürecinin yönlendirilmesi ve öğrencilerin informel bilgilerden formel bilgilere ulaşmalarının hedeflendiği bir öğretimin sağlanması için GME belirli temel ilkeler çerçevesinde yapılandırılmıştır. Bu temel ilkeler yönlendirilmiş yeniden keşfetme (guided reinvention), öğretici olgu (didactical phenomenology) ve gelişen modeller (emergent models) olarak sıralanabilir (Gravemeijer, 1999). Yönlendirilmiş yeniden keşfetme ilkesi bir konunun/kavramın tarihsel gelişiminin ve o konu/kavram hakkındaki öğrencilerin informel bilgilerinin göz önüne alınmasıyla öğretimin tasarlanması için gerekli olan potansiyel olarak güçlü ve zorlayıcı durumların belirlenmesini öneren bir ilkedir. (Gravemeijer vd., 2000; Streefland, 1991). Öğretici olgu ise öğrencilerin informel düşünme biçimleriyle matematiksel bir kavramın kritik bileşenleri arasındaki ilişkilerin belirlenmesi ve öğrencilerin informel stratejilerinden yola çıkarak kademeli bir biçimde formel ve matematiksel bilgiye ulaşmalarını sağlayacak gerçekçi bağlamların tasarlanmasını önerir (Freudenthal, 1983; Gravemeijer vd., 2000; Lamon, 1995). Son olarak gelişen modeller ilkesi ise öğrencilerin informel model/araç kullanımlarının öngörülmesi ve bu informel araç/model kullanımının formel matematiksel araç/model kullanımına temel oluşturmasının sağlanmasında kılavuzluk eden bir ilkedir (Gravemeijer vd., 2000; Gravemeijer ve Stephan, 2002). Bu kapsamda, öğrencilerin farklı gösterimler ya da stratejiler için kullandıkları informel modeller (model of) süreç içerisinde geliştirilerek matematiksel kavram ve ilişkilerin sembolik gösterimleri için formel modellere (model for) dönüştürülerek bu sembolik gösterimler öğrencilere öğretmen tarafından süreç sonunda tanıtılmalıdır.

Sonuç olarak, alan yazında öğrencilerin orantısal akıl yürütmeye yönelik informel ve sezgisel bilgilerini ve bireysel olarak orantısal akıl yürütmelerinin gelişim basamaklarını ortaya koyan çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalar genellikle, kısa süreli mevcut durumu ortaya koymaya yönelik veri toplamaya dayalı çalışmalardır. Ancak, erken orantısal akıl yürütmenin sınıf içerisinde ortaklaşa gelişimini GME kapsamında uzun süreçte inceleyen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu nedenle, GME yaklaşımıyla bir sınıf içerisinde öğrencilerin bu informel bilgilerinden daha formel bilgilere ulaşmalarının desteklenmesine rehber olacak yerel öğretim teorilerini ortaya koyan çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Yedinci sınıf öğrencileri için orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik varsayıma dayalı bir öğrenme rotasının geliştirilmesinin amaçlandığı üç yıllık bir tasarı tabanlı araştırmanın bir bölümü olarak bu çalışmada, bu öğrenme rotasının erken orantısal akıl yürütme kapsamında incelenen birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerilerine dayanan kısmı ortaya konmuştur. Bu varsayıma dayalı öğrenme rotası üç yıl boyunca her yıl iki haftalık (10 ders saati) süre boyunca sınıf içi uygulamalarla test edilip düzenlenmiş ve bu çalışmada sunulan son halini almıştır. Bu çalışmada öğrencilerin erken orantısal akıl yürütmelerine ilişkin bilgilerin hazır kurallar sistemi olarak verilmediği, bu bilgileri sezgisel ve informel bilgilerinden yola çıkarak sosyal bir sınıf ortamı içerisinde matematik problem çözme sürecinde edinmelerinin desteklendiği bir varsayıma dayalı öğrenme rotası ortaya konulmaktadır. Bu varsayıma dayalı öğrenme rotasının öğrencilerin erken orantısal akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi ve desteklenmesine ve oran ve orantı öğretiminin temelini oluşturmak için sahip olduğu potansiyel gerçekleşen öğretim sürecinin Toulmin argümantasyon modeli ile analiz sonucu ortaya çıkan zengin argümantasyon süreçlerinin ortaya konulmasıyla göz önüne serilmektedir. Bu kapsamda bu çalışmanın araştırma sorusu aşağıdaki şekilde yapılandırılmıştır:

- Bir yedinci sınıfta GME'ye dayalı olarak geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası boyunca erken orantısal akıl yürütme becerilerinin ortaklaşa gelişimi nasıldır?

Yöntem

Bu çalışmanın bir parçasını oluşturduğu üç yıllık çalışmanın deseni *tasarı araştırması*dır. Gravemeijer ve Cobb'un (2006) sınıf içi tasarı araştırması modeline göre tasarı araştırması üç safhadan oluşur. Bunlar "uygulama için hazırlık", "sınıf içi uygulama" ve "geriye dönük analizler" olarak belirtilmiştir. Sınıf içi tasarı deneyinin *hazırlık aşaması* kazanımların belirlenmesi ile başlar. Bu aşamada araştırmacılar "Bu konuda bilinmesi gereken anahtar öğrenmeler ne olmalıdır?" sorusunu gündeme getirir. Burada amaç, sadece okul programında kazanılması gereken hedefler değil, işlenecek konuya ilişkin öğrencilerin ne bilmesi gerekliliğinin belirlenmesidir. Öğrenilecek anahtar öğrenmeler belirlenirken alan yazını ve araştırmacının kendi yaptığı değerlendirmeler faydalı olmaktadır (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Bu anahtar öğrenmeler kapsamında öğrenme ortamında kullanılacak etkinlikler de bu aşamada hazırlanır. Özetle bu aşamada uygulanacak olan tasarı deneyinin ve yerel öğretim teorisinin oluşturulması hedeflenir. Bu çalışma kapsamında hazırlık aşamasında araştırma ekibi tarafından öğrencilerin erken orantısal akıl yürütmeye yönelik öğrenci düşünüşleri ve kavram yanılgıları ile ilgili alan yazını detaylı olarak incelenmiştir. Diğer bir yandan, ülkemizdeki Ortaokul Matematik Öğretim Programı başta olmak üzere farklı ülkelerde okutulan öğretim programları incelenmiştir. Bu ön araştırmalar sonucu erken orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik anahtar öğrenmeler belirlenmiştir. Daha sonra belirlenen anahtar öğrenmelere ulaşabilmeyi sağlayacak Gerçekçi Matematik Eğitimi Teorisi'ne dayalı etkinlik dizisi, araçlar, imgeler ve muhtemel sınıf içi söylemlerle jestleri içeren varsayıma dayalı öğrenme rotasının ve ilgili öğretimsel etkinlik dizisinin ilk örnekleri (prototip) geliştirilmiştir.

Tasarı araştırmasının ikinci aşaması tasarı deneyinin uygulandığı *sınıf içi uygulama aşamasıdır*. Hazırlıklar tamamlandıktan sonra bu aşama tasarı öğretimin gerçekleştirildiği aşamadır. Tasarı araştırmasında amaç oluşturulan tasarı öğretimin veya öğretim teorisinin çalışıp çalışmadığının test edilmesi değil hazırlık aşamasında geliştirilen tasarının test edilmesi, geliştirilmesi ve sınıf ortamında nasıl çalıştığının anlaşılmasıdır (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Tasarı araştırması araştırmacıların sınıf içinde bulunmalarını ve her ders saatinden hemen sonra iş birliği yapılan öğretmen ile sınıf içindeki ders hakkında yorumda bulunmayı gerektirir. Bu sebepten tasarı tabanlı öğrenmede veri süregelen yorumlar, bağlantılar ve kararlardan oluşur. Bu anlamda öğrenme rotaları ile tasarı araştırması birlikte düşünülebilir. Bu çalışmanın ilk makro döngüsü kapsamında geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin ilk örnekleri kılavuzluğunda, seçilen okuldaki 7. sınıf öğrencileri ile birlikte öğretmen tarafından geliştirilen etkinlikler uygulanmıştır. Her ders öncesi ve sonrasında tasarı ekibi bir araya gelerek dersle ilgili olumlu ve olumsuz deneyimlerden yola çıkarak bir sonraki ders/döngü için yapılması gereken düzenlemeler üzerinde görüşmüştür. İlk döngü sonunda tüm sürecin olumlu ve olumsuz yönleri tartışılarak ve geriye dönük ön analizler yapılarak bir sonraki döngü için gerekli ilk düzenlemeler yapılmıştır.

İkinci makro döngü kapsamında, ilk döngüden edinilen deneyimler ve bu deneyimlere dayanarak yapılan düzenlemeler sonrasında düzenlenen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili öğretimsel etkinlik dizisi kullanılarak aynı okuldaki 7. sınıf öğrencilerine etkinlikler uygulanmıştır. Çalışmanın üçüncü makro döngüsü, bir sonraki yılda, yine gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra, aynı öğretmenin başka bir 7. sınıfında gerçekleştirilmiştir. Her makro döngüde ders öncesi ve sonrasında tasarı ekibi bir araya gelerek dersle ilgili olumlu ve olumsuz deneyimlerden yola çıkarak varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili öğretimsel etkinlik dizisinin son haline getirilmesi için gereken düzenlemeler üzerinde görüşmüştür. Daha detaylı belirtmek gerekirse, ders öncesinde yapılan görüşmelerde hazırlanan öğrenme rotası ve etkinlikler kapsamında belirlenen öğrenme hedefleri, anahtar öğrenmeler, derste kullanılacak araç ve materyaller, olası matematiksel söylemler vb. gibi konularda düşünsel deney (anticipatory thought experiment) çalışmaları yapılmıştır. Dersten sonra yapılan görüşmelerde ise dersin güçlü ve zayıf yönleri, öğrenci öğrenmeleri ve bir sonraki ders/döngü için yapılacak düzenlemelere yönelik çözümleme (debriefing) görüşmeleri yapılmıştır. Bu çalışmanın amacı, erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesine yönelik olarak geliştirilen, test edilen ve düzenlenen öğrenme rotasının son halinin ortaya konmasıdır. Bundan ötürü, mikro döngüler (sınıf içi uygulamalar) ve makro döngüler (3 yıllık uygulamalar) arasında yapılan düzenlemelerin açıklanması bu çalışma kapsamında yer almamaktadır.

Tasarı araştırması etkinlik dizisinin yeniden tasarım, test ve düzenleme süreçlerini içeren döngüsel süreçlerden oluşmaktadır. Her bir ders döngüsünde araştırma ekibi önerilen öğretimsel etkinliklerin sınıf içerisinde öğrenciler tarafından nasıl algılanabileceğini ve öğrencilerin bu etkinlikler yoluyla neler öğrenebileceğini belirler. Diğer bir ifade ile araştırma ekibi öğrencilerin öğretim etkinlikleri süresince nasıl bir zihinsel süreç içerisine gireceklerini öngörerek düşünsel deney hazırlar. Öğretim deneyi uygulama aşamasında ise araştırma ekibi öğrencilerin gerçek katılım ve öğrenmelerini analiz eder. Farklı bir ifade ile, uygulamaların varsayılan ile öğrencilerin gerçek düşünüş biçimleriyle ne kadar uyuştuğu ortaya çıkarılmaya çalışılır. Bu analizler araştırma ekibinin öğretim etkinliklerinin temelinde yatan bağlantıların gerçekliği, belli sınıf normların oluşması ve tasarımın belli yönlerinin düzenlenmesi hakkında karar vermelerine yardımcı olur. Bu sebepten tasarı araştırmaları düşünsel deney ve öğretim deneylerinin döngüsel olarak ele alınmasını içerir (Freudenthal, 1991). Bu sürekli analizler öğrencilerin bireysel etkinliklerinin ve sınıf içi etkinliklerin düzenlenmesini, ileriye yönelik düşünsel deneylerin oluşumunu, bazen de öğrenme amaçlarının düzenlenmesini sağlar. Diğer bir ifade ile matematiksel öğretim döngüsü varsayıma dayalı öğrenme rotalarının tahmin edilmesi, uygulanması ve düzenlenmesi şeklinde düşünülebilir. Tasarı araştırmasının son basamağını ise geriye dönük analizler oluşturur. Bu aşama deney süresinde toplanan verilerin geriye dönük sistematik analizini içerir. Sınıfta gerçekleşen öğretimleri ve oluşturulan öğretimsel etkinlik dizisini bütün olarak ele alan döngüsel süreçler iki seviyede de gerçekleşebilir. Bu döngüsel süreçler, günlük mini döngüler, tüm öğretimsel deney süresini kapsayan makro döngüler ve öğretimsel deney sürecinin geriye dönük analizleri sayesinde önceki öğretimsel deneyin iyileştirilmiş versiyonunun uygulandığı diğer bir makro döngüden oluşur (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Bütün bu süreç sonucunda daha iyi ve sabit fakat değişime açık bir varsayıma dayalı öğrenme rotası oluşturulur.

Çalışma grubu

Çalışmanın amaçları doğrultusunda, ilk olarak Ankara ili Altındağ ilçesinde bulunan Millî Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir devlet okulunda görev alan iş birliğine açık, yenilikçi, , 10 yıl öğretmenlik ve yedi yıl oran orantı konusuna yönelik öğretim deneyimi bulunan olan bir öğretmen seçilmiştir. Bu öğretmen kendi yüksek lisans tezi kapsamında bir öğretim deneyi çalışması yapmış ve uzun yıllar süresince yapılan bilimsel araştırmalarda uygulayıcı olarak görev almıştır. Öğretmenin öğretim ve araştırma deneyimlerine sahip olması uygulama öncesinde tasarı ekibinin gerçekleştireceği ileriye yönelik düşünsel deneyler ve gerekli düzenlemeler sırasında deneyimlerine yönelik öneriler sunabilmesi açısından önemlidir. Oran ve orantı konusu ile ilgili kazanımların büyük çoğunluğunun yedinci sınıf düzeyinde olmasından dolayı araştırmanın ilk (pilot) makro döngüsü bu öğretmen ve bu öğretmenin öğretim yaptığı yedinci sınıflardan birinde bulunan öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın amaçları kapsamında öğrencilerin grup çalışmasına yatkın olmaları ve ileri düzeyde matematiksel argümantasyonlar ortaya koymaları önemlidir. Bu sebepten, matematik öğretmeninin beyanına göre bu özelliklere sahip öğrencilerin bulunduğu bir sınıf seçilmiştir. Benzer şekilde, uygulamanın ikinci ve üçüncü makro döngüsü sonraki yıllarda tasarı ekibinde yer alan matematik öğretmeni ve bu öğretmenin aynı okulda okuyan ve benzer şartları (grup çalışmasına yatkın, ileri düzey argümantasyon becerilerine sahip) sağlayan 7. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın verileri tasarı ekibinde yer alan matematik öğretmeni ve bu öğretmenin 2017-2018 eğitim-öğretim yılı bahar döneminde çalışmanın üçüncü döngüsüne katılan 15 kız ve 17 erkek öğrenciden oluşan bir yedinci sınıftan toplanmıştır.

Veri toplama araçları

Bu bölümde, ilk olarak, üç makro döngü kapsamında gerçekleşen uygulamaların temelini oluşturan varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi ile ilgili bilgi verilmektedir. Sonraki bölümlerde ise öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisine yapılması gereken düzenlemeleri belirlemek için kullanılan veri toplama araçları anlatılmaktadır. Tasarı tabanlı araştırmanın tüm aşamalarında gerçekleşen tasarı ekibi görüşmeleri sesli kayıt altına alınmıştır. Geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin her üç döngü kapsamında yapılan sınıf içi öğretimi tasarı ekibi tarafından gözlenerek video kamera ile kayıt altına alınmıştır.

Varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi

Bu çalışma kapsamında geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi Amerika Birleşik Devletleri'nde Stephan, McManus, Smith ve Dickey (n.d.) tarafından geliştirilen öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin Türkiye bağlamına uyarlanması ve tasarı araştırmasının ilk döngüleri kapsamında yapılan uygulamalardan elde edilen verilerin analizi sonucunda ortaya konulmuştur. Bu çalışma kapsamında erken orantısal akıl yürütmenin temel kavram ve becerileri olarak ele alınan "birleşik birimleri bağlama" ve "bağlı birleşik birimleri yineleme" anahtar öğrenmelerinin geliştirilmesine yönelik olarak sınıf içerisinde uygulanan varsayıma dayalı öğrenme rotası aşağıda Tablo 1'de verilmiştir. Bu öğrenme rotasının bileşenleri erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesine yönelik anahtar öğrenmeler, matematiksel araç ve imgeler, muhtemel sınıf içi matematiksel söylemler ve muhtemel jest kullanımlarına yönelik öngörüleri içermektedir (Tablo 1).

Gerçekçi Matematik Eğitimi'ne dayanan ve erken orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotasının ilk anahtar öğrenmeleri yukarıda Tablo 1'de belirtildiği üzere birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme olarak belirlenmiştir. Bu öğrenme rotasına yönelik etkinlik dizisi belirli bir sayıda yem kutusu ile belirli bir sayıda balığın beslenebildiğine yönelik kuralın verildiği ve her bölümde aşamalı olarak bu kuralın değiştiği bir bağlamda verilmiştir. İlk olarak bir yem kutusu ile üç balığın beslenebildiği kuralı verilmiştir. Bunun sebebi, öğrencilerin bir yem kutusu ile üç balığı birbirine bağladıktan sonra çeşitli şekillerde (ör. 1 yem kutusu-3 balık, 2 yem kutusu-6 balık, 3 yem kutusu-9 balık vb.) yinelemelerinin desteklenmesidir. İkinci bölümde ise kural "2 yem kutusu ile 4 balık beslenebilir" şeklinde verilmiştir. Buradaki amaç bire-çok eşlemeden, çoka-çok eşlemeye geçişi desteklemek ve 2 yem kutusu-4 balık arasındaki bağ ile 1 yem kutusu-2 balık arasındaki bağın birbirine eş olduğunun keşfettirilerek informel olarak öğrencilerin birim oran ile ilgili akıl yürütmelerinin sağlanmasıdır. Etkinliğin üçüncü bölümünde ise bu kural 3 yem kutusu 5 balık şeklinde değiştirilmiştir. Bunun sebebi çoka-çok eşlemenin ve bu şekilde eşlenen birleşik birimlerin yinelenmesinin desteklenmesi ve öğrencilerin önceki bölümlerde geliştirdiği stratejilerin birbirinin tam sayı katı olmayan durumlara genişletilmesinin sağlanmasıdır.

Tablo 1

Erken Orantısal Akıl Yürütme Becerisine Yönelik Varsayıma Dayalı Öğrenme Rotası

Anahtar Öğrenme 1	Araçlar/İmgeler	Muhtemel sınıf içi matematiksel söylemler	Muhtemel jestler
Birleşik Birimleri Bağlama	Balık resimlerini gruplamak ve yem kutuları ile (oklar yardımıyla) eşlemek Balık resimlerinin temsili için çemberler, yem kutularının temsili için dikdörtgenler çizmek	-Eğer kural 1 yem kutusu ile 3 balık beslenebiliyor ise daha çok yem kutusu eklesek bile kural bozulmaz (her durumda 1 yem kutusu ile 3 balık eşlenmelidir) -Yem kutuları ve balıklar birebir eşlenemez, bir yem kutusu 3 balık ile eşlenmelidir. -Eğer yem kutusu ile eşlenemeyen bir ya da daha çok balık kalırsa yeterince yem yoktur.	Somut materyalleri eşleyerek gösterim yapma (örn. 3 kalem bir öğrenciye eşlenir)
Anahtar Öğrenme 2			
Bağlanmış birleşik birimleri yineleme	Resimsel yineleme (eşlenen balık ve yem kutusu resimlerinin yinelenmesi) Sayısal yineleme (İnformel sembolik gösterimler (1-3, 2-6)) -Tekrarlı toplama yoluyla birleşik birimler arasındaki bağın yinelenmesi -Artırma stratejisi -Kısaltılmış artırma stratejisi -Çarpma ve bölme işlemleri yoluyla birleşik birimler arasındaki bağın yinelenmesi)	Bağlı birleşik birimler arasındaki bağın korunarak farklı durumlara genişletilmesi -Eğer kural "1 yem kutusu 3 balığı besler" ise 2 yem kutusu 6, 3 yem kutusu 9 balığı besler (1-3, 2-6, 3-9 vs.) -Her yem kutusu 3 balığı beslerse 5 yem kutusu 3+3+3+3+3=15 balığı besler. -Balık sayısı ve yem kutusu sayısı birbirine bağlı olarak değişmektedir. -Eğer yem kutusu sayısı 1 artarsa (azalırsa) balık sayısı 3 artar (azalır). -Eğer yem kutusu sayısı 2 (3,4 vb.) katına çıkarsa balık sayısı da 2 (3,4 vb.) katına çıkar. -Eğer yem kutusu sayısı yarıya inerse ($\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$ vb.) balık sayısı da yarıya iner ($\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$ vb.)	Parmak yardımıyla tekrarlı toplama yapma Parmaklarla ileri veya geri ritmik sayma Tablolarda yem kutusu sayısı ve/veya balık sayısı arasındaki değişimi el hareketleri ile göstermek

Diğer bir yandan, öğrencilerin informel gösterimlerden formel gösterimlere geçişinin sağlanması için her bölümde ilk sorularda hem yem kutusu hem de balık resimleri verilmiş sonraki sorularda bu çokluklardan yalnızca birinin resimleri verilmiş ve son olarak çokluklardan ikisinin de resmi verilmeyerek öğrencilerden daha büyük sayıdaki çokluklar hakkında çıkarım yapmaları beklenmiştir. Yine buradaki amaç öğrencilerin informel araçlardan formel araçlara ve somut zihinsel işlemlerden daha soyut zihinsel işlemlere geçiş süreçlerinin desteklenmesidir. Öğrencilerin öğrenmelerinin desteklenmesi için matematiksel araç/imge ve jest kullanımlarına da varsayıma dayalı öğrenme rotasının bileşenleri olarak yer verilmiştir. Bu kapsamda öğrencilerin bağlı birleşik birimleri yinelemeleri için informel gösterimler (ör., 1-3, 2-6, 3-9 vb.) kullanacakları öngörülmüş ve bu yinelemelerin organize edilmesi için uzun oran tablolarının sunulması planlanmıştır. Bu sayede birleşik birimleri yinelemeye yönelik stratejilerin artırma stratejileri ile desteklenmesi ve yatay el hareketlerinin süreçte anlamlı öğrenme ve matematiksel iletişimi desteklenmesi hedeflenmiştir. Uzun oran tablolarında artırma stratejilerinin anlamlandırılması ve el hareketleri ile desteklenmesi sonrasında uzun tablolardan kısa tablolara geçiş ile kısaltılmış artırma stratejilerinin desteklenmesi ve yatay el hareketlerinin aynı ölçme uzayı içerisindeki ilişkileri temsil etmesi için kullanılması amaçlanmıştır. Sonuç olarak, GME ve varsayıma dayalı öğrenme rotalarına yönelik bilimsel bilgi birikimi kullanılarak öğrencilerin orantısal akıl yürütmeye yönelik sorularda (ör., 5 adet penye yapmak için 15 metre kumaş gerekiyor. Buna göre, 10 adet penye yapmak için kaç metre kumaş gerekir?) yaptıkları çarpma ve bölme işlemleri ile gruplama, birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yinelemeye (aynı ölçüm uzayında uzun ve kısa yoldan yineleme) yönelik süreçleri anlamlı olarak yapılandırmalarının sağlanması; bu sürecin matematiksel araç (ör. kısa ve uzun tablolar) ve imgelerle (ör. bağlama ve yineleme) desteklenmesi hedeflenmiştir. Bu şekilde orantısal akıl yürütmenin temeli olan erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesi ve bu sayede öğrencilerin daha formel matematiksel akıl yürütmelere (oran-orantı) geçiş için gerekli olan ön bilgileri oluşturmaları amaçlanmıştır.

Tasarı ekibi toplantıları

Bu çalışmanın tasarı ekibinde Matematik Eğitimi alanında Ankara'da bulunan bir devlet üniversitesinde görev yapan bir öğretim üyesi, aynı alanda çalışmalar sürdüren bir doktora sonrası araştırmacı ve bir doktora öğrencisi ile uygulama öğretmeni yer almıştır. Çalışmanın her üç döngüsü için tasarı ekibini oluşturan öğretmen ve en az bir araştırmacı her ders öncesi bir araya gelerek dersin amaçları, kullanılacak materyal, etkinlik, araç gereç, imge, sınıf tartışmasına yön verecek kritik sorular ve bu sorulara verilmesi muhtemel öğrenci cevapları üzerinde tartışmışlardır. Bu tartışmalar sonunda dersin akışını birlikte belirlemişlerdir. Ders sonrası ise ekip tekrar bir araya gelerek dersteki olumlu ve olumsuz yönleri tartışarak bir sonraki ders ve bir sonraki döngü için çıkarımlarda bulunmuşlardır. Bu toplantılar her ders başında ve sonunda uygulanarak tasarı tabanlı araştırma yönteminin doğasına uygun olarak döngüsel bir süreç izlenmesi sağlanmıştır. Bunun yanı sıra, tüm tasarı ekibi de haftalık ekip toplantıları yaparak süreç değerlendirmelerinde bulunmuşlardır. Ders öncesi ve sonrasında ve haftalık olarak yapılan tasarı ekibi toplantılarının tümü sesli kayıt altına alınmıştır. Bu görüşmeler varsayıma dayalı öğrenme rotasının geliştirilmesi ve düzenlenerek iyileştirilmesi için önemli olmasına rağmen sayfa sınırından dolayı bu verilerin analizi bu çalışma kapsamında sunulmamıştır.

Gözlem ve saha notları

Çalışmanın her üç döngüsünde öğretmen tasarı ekibinin hazırladığı araç, gereç ve etkinliklerle sınıfta oran ve orantı konusunu öğretirken dersler araştırmacılar tarafından gözlenmiş ve video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Yapılan gözlemlerin amacı öğrencilerin erken orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik olarak hazırlanan etkinliklerle etkileşimleri sırasında ortaya çıkan matematiksel süreçleri belirlemek ve öğrencilerin bu matematiksel süreçlere nasıl katıldıkları ve katkı sağladıklarını ortaya koymaktır. İşlenen ders video kamera ile kayıt altına alınmış, bunun yanı sıra araştırmacılar tarafından sınıfın fiziksel ve sosyal ortamı ve ders esnasında gerçekleşen sınıf içi tartışmalar, etkinlikler, matematiksel süreçler, kullanılan araçlar, modeller ve jestler ile ilgili saha notları tutulmuştur. Gözlem ve saha notları varsayıma dayalı öğrenme rotasının geliştirilmesi ve düzenlenerek iyileştirilmesi için önemli olmasına rağmen sayfa sınırından dolayı bu verilerin analizi bu çalışma kapsamında sunulmamıştır. Ancak bu veri kaynakları sınıf içi öğretime yönelik verilerin analizinde tamamlayıcı olarak kullanılmıştır.

Öğrenci görüşmeleri

Çalışmanın her iki döngüsünde uygulama yapılacak sınıftan seçilen sekiz öğrenci ile ön ve son görüşmeler yapılmıştır. Bunun yanı sıra, bazı öğrencilerle uygulama süresince görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerin her birinin amacı farklıdır. Ön görüşmeler ve uygulama sırasında yapılan görüşmelerin amacı öğrencilerin orantısal akıl yürütmeye yönelik informel ve sezgisel bilgilerinin ve araç/model kullanımlarının incelenmesidir. Bu sayede öğretimde kullanılacak etkinlikler ve araçların öğrencilerin bu informel ve sezgisel bilgilerinin üzerinde inşa edilmesi (Kaput ve West, 1994; Lamon, 1994) mümkün olmuştur. Son görüşmelerin amacı ise öğrencilerin düşünüş biçimleri ve model kullanımlarındaki değişimin gözlemlenmesidir. Bu görüşmeler varsayıma dayalı öğrenme rotasının geliştirilmesi için önemli olmasına rağmen sayfa sınırından dolayı bu verilerin analizi de çalışma kapsamında sunulmamıştır.

İşlem

Çalışma öncesinde ilgili izinler araştırmacıların görev yaptıkları üniversitenin etik kurulundan ve Ankara Millî Eğitim Müdürlüğü'nden alınmıştır. Daha detaylı belirtmek gerekirse, bu çalışma Orta Doğu Teknik Üniversitesi İnsan Araştırmaları Etik Kurulu'nun 28620816/549 sayılı kararı ile araştırma ve yayın etiğine uygun olarak gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, çalışmanın her döngüsü öncesinde çalışmaya katılacak olan yedinci sınıf öğrencileri ve bu öğrencilerin velileri çalışmanın amaçları hakkında bilgilendirilmiş ve onlardan gönüllü katılım formlarını doldurmaları istenmiştir.

Tasarı araştırmalarında geçerlik ve güvenirlik yapılan çıkarımların savunulabilir ve makul olması ile ilgilidir (Gravemeijer ve Cobb, 2006). Bu çalışma kapsamında araştırmacılar, tasarı araştırmasının doğasına uygun bir şekilde, öğretmen ve öğrencilerle uzun süreli etkileşimde bulunmuştur. Bununla birlikte, öğretmen ile öğretim seansları öncesi ve sonrasında yapılan görüşmeler çalışmanın güvenirliğine katkı sunan noktalardır. Bunun yanı sıra bu çalışmada erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesine yönelik olarak önerilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve etkinlik dizisi üç yıllık döngüsel süreçler içerisinde aynı öğretmenin farklı yedinci sınıf öğrencileriyle uygulanması sonucunda son halini almıştır. Bunun yanı sıra, çeşitli yöntemlerle (öğretmen/öğrenci görüşmeleri, tasarı ekibi görüşmeleri, gözlem ve saha notları vb.) veri toplanmıştır. Bu bağlamda bu uygulamalar çeşitleme (triangulation) ilkesinin sağlanmasına yoluyla çalışmanın geçerlik ve güvenirliğine katkıda bulunmuştur. Son olarak, çalışmanın hazırlık, uygulama ve analiz süreçlerinin uygulama öğretmeninin de bulunduğu tasarı ekibi ile yürütülmesi de çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini arttıran hususlardandır. Bu bağlamda, tasarı ekibi hazırlıkları, uygulama öncesi ve sonrası görüşmeleri ve veri analizini (Toulmin analiz şemalarının oluşturulması ve gözden geçirilmesi) beraber yürütmüşlerdir. Bunun yanı sıra erken orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik olarak önerilen öğrenme rotası ve öğrencilerin öğrenmelerine yönelik çıkarımları da beraber ortaya koymuşlardır.

Verilerin analizi

Tasarı tabanlı araştırmalarda öğrencilerin düşünüşlerini ve öğrenme ortamını daha iyi anlamak ve tasarıyı sürekli olarak geliştirmek amacıyla süreç içerisinde devam eden (ongoing) ve geriye dönük (retrospective) analizlere ihtiyaç duyulur (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer ve Schauble, 2003). Diğer bir yandan, bu araştırma biçiminde öğrencilerin uğraşması beklenen etkinlikler ve problemler, sınıf içi söylemler, derse katılım normları, kullanılan araçlar ve ilgili anlatımlar ile öğretmenin bu elemanlar arasındaki ilişkileri sınıf içinde yönetme biçimi veri analizi kapsamına girer (Cobb vd., 2003). Bu çalışma kapsamında, sınıf içerinde gerçekleşen öğretim, etkileşim, matematiksel söylem ve süreçlerin analizi derslerin video kayıtlarının yazılı dökümlerinin Toulmin'in (1958) argümantasyon modeli ile analiz edilmesi yoluyla yapılmıştır. Toulmin'in argümantasyon modeli veri (data), iddia (claim) ve gerekçe (warrant) olmak üzere üç ana bileşenden oluşur. Daha karmaşık argümantasyon süreçlerinde ise destek (backing), niteleyen (qualifier) ve çürüten (rebuttal) bileşenleri bulunabilir. Bu modele göre bir argüman iddia ile başlar ve sonrasında iddiayı destekleyen veri üretilir. Veri ile iddia arasındaki ilişkiyi desteklemek amacıyla gerekçe sunmak önemlidir. Gerekçeler genellikle kural, prensip, gerçekler ya da prosedürlerden oluşur. Veri ile iddia arasındaki ilişkinin ortaya konulması işlevini gören gerekçelerin kabul edilebilirliğinin ve geçerliğinin arttırılması için bazı durumlarda destek (backing) kullanılabilir. Bunun yanı sıra, bazı durumlarda gerekçelerin dereceleri niteleyen (qualifier) tarafından belirtilebilir; geçerli olmadığı durumlar veya sınırlılıkları ise çürüten (rebuttal) bileşeni ile belirlenebilir (Toulmin, 1958). Bu model hukuk alanı için öne sürülmüş olsa da Krummheuer (1995) bu modelin sınıf içerisinde gerçekleşen matematiksel argümantasyonların analiz edilmesi için kullanılabileceğini savunmuştur. Bu şekilde sınıf içerisinde öğretmen ve öğrenciler arasında matematiksel fikirlere ulaşmak için gerçekleşen argümantasyon süreçlerine ortaklaşa argümantasyon adını vermiştir (Krummheuer, 1995). Bu çalışmanın bir parçasını oluşturduğu üç yıllık geniş kapsamlı çalışmada sınıf içerisinde gerçekleşen ortaklaşa argümantasyon süreçleri Toulmin'in argümantasyon modelinin Krummheuer uyarlaması temel alınmıştır. Bu yaklaşım doğrultusunda, sınıf içi tartışmalar birinci yazar tarafından iddia, veri, gerekçe, niteleyen, çürüten ve destek bileşenlerine göre kodlanmış ve sınıf içi paylaşılan öğrenmeler yapısında karşılaşılan örüntüler ve ilişkiler not edilmiştir. Bu çalışma kapsamında sunulan verilere yönelik Toulmin argümantasyon şemaları ikinci yazar tarafından da oluşturularak iki kodlayıcı arasındaki farklılıklara yönelik tartışmalar yürütülerek uzlaşma sağlanmıştır. Bu çalışma geniş kapsamlı öğrenme rotasının ilk basamağı ile ilgili olan erken orantısal akıl yürütmeye yönelik olduğu için bulgular kısmında ortaya konulan sınıf içi matematiksel argümantasyonlarda çoğunlukla bir argümantasyon sürecinin temel bileşenleri olan veri, iddia ve gerekçeler göze çarpmaktadır.

Bu çalışmada, sınıf içi söylem ve argümantasyon süreci analiz edilirken kullanılan araç, model, sorulan sorular verilen cevaplar, matematiksel incelemeler ve tartışmalar, çoklu gösterimler (model, grafik, tablo, çizim, materyal, sembol, sözel ifade, günlük hayatla ilişki kurma), tahminler, hipotezler, matematiksel ilişkiler, problem çözme, bilgiyi transfer etme, farklı çözüm yolları sunma boyutları da inceleme kapsamına alınmıştır. Bu çalışmada bu analizler yukarıda belirtilen varsayıma dayalı öğrenme rotasının bileşenleri (anahtar öğrenmeler, araç/imge, paylaşılan öğrenmeler, muhtemel matematiksel söylemler, muhtemel jestler) şeklinde bulgular bölümünde sunulmuştur.

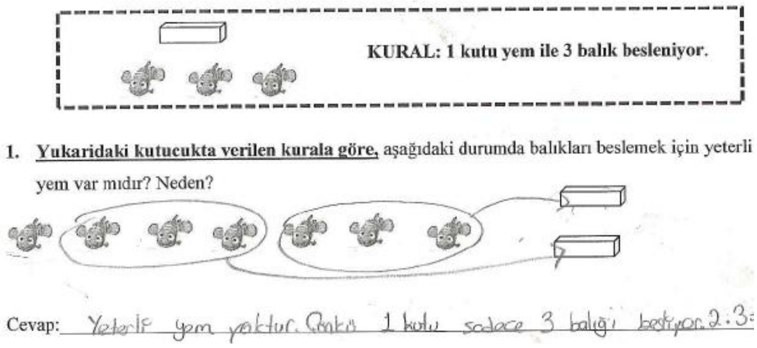
Bulgular

Bu çalışmanın amacı, erken orantısal akıl yürütmenin geliştirilmesi için varsayıma dayalı bir öğrenme rotasının ve ilgili etkinlik dizisinin ortaya konmasıdır. Bu amaç doğrultusunda erken orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik anahtar öğrenmeler birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme olarak belirlenmiştir. Bu bölümde, bu anahtar öğrenmelere yönelik sınıf içi tartışmaların sınıf içerisinde nasıl gerçekleştiği resimlerle ve Toulmin analiz şemalarıyla ortaya konmuştur. Bunun sebebi, geliştirilen öğrenme rotası ve etkinlik dizisinin sınıf içerisinde nasıl gerçekleştiği ve öğrencilerin anlamlı öğrenmelerine nasıl katkı sağladığının ortaya konmasıdır. Böylelikle, bu öğrenme rotasının erken orantısal akıl yürütme öğretiminin iyileştirilmesi için sahip olduğu potansiyel de göz önüne serilmiştir.

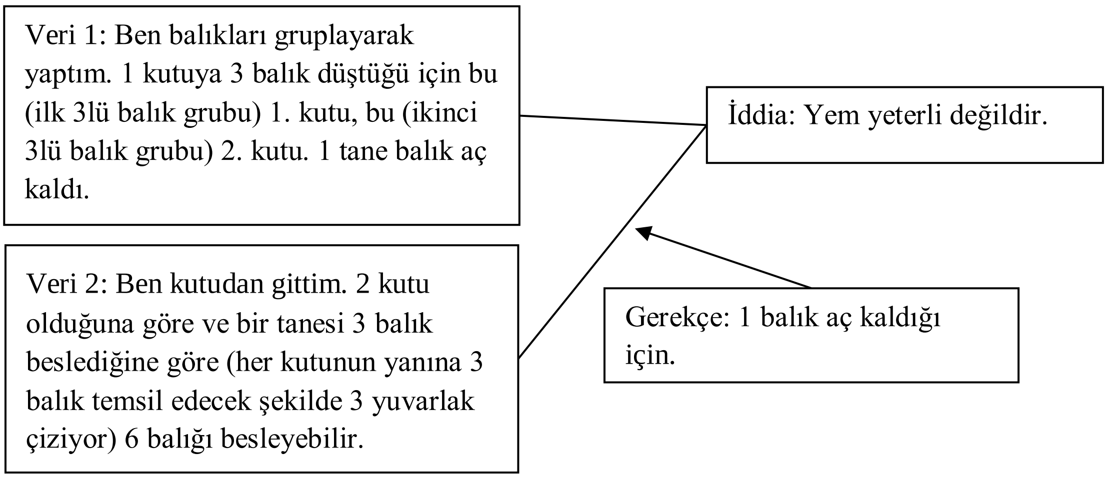
Birleşik birimleri bağlama

Bu çalışma kapsamında, balık ve yem bağlamı kullanılarak bire-çok ilişkisi ilk başta "*1 yem kutusu ile 3 balık beslenir*" bilgisi eşliğinde verilmiştir. Böylece öğrencilerin 3 balığı ve 1 yem kutusunu birer birim alarak birbirine bağlaması bu anahtar öğrenmeye örnektir. Aşağıda Şekil 5'te görüldüğü gibi öğrenciler 3 balığı bir birleşik birim (composite unit) olarak kabul edip bu birleşik birimleri ile birer yem kutusunu oklar kullanarak eşleştirmiştir. Böylece verilen durumları bu eşleştirmeyi kullanarak değerlendirmişlerdir. Şekil 5'te verilen soru için sınıf içerisinde gerçekleşen sınıf içi söylemin Toulmin modeli ile analizi sınıf içi söylemin nasıl analiz edildiğine örnek teşkil etmesi için aşağıda Şekil 6'da sunulmuştur.

Aşağıdaki şekillerden ve ilgili sınıf içi tartışmadan anlaşıldığı üzere, öğrenciler varsayıma dayalı öğrenme rotasında öngörüldüğü ve GME'ye uygun bir şekilde, verilen resimleri kapalı eğriler kullanarak gruplayıp bu grubu bir birim kabul ettikten sonra oklar kullanarak 1 yem kutusu ile bağlamışlardır. Burada kapalı eğriler ve oklar gruplama, birimleme ve bağlama için kullanılan informel araçlardır. Öğretim esnasında, öğretmen ayrıca birimler arası ilişkiyi vurgulamak adına somut materyal kullanarak her bir öğrenciye 3 kalem dağıtmış ve bu gösterimle bir-üç ilişkisini pekiştirmiştir.



Şekil 5. 3 balık ile 1 yem kutusunu birbirine bağlama



Şekil 6. Birleşik birimleri bağlama anahtar öğrenmesine yönelik Toulmin analizi

Bağlı birleşik birimleri yineleme

Bu çalışma kapsamında bağlı birleşik birimleri yineleme becerisi birçok strateji kullanımı ile ortaya konulmuştur. Bu kapsamda, öğrenciler eşlenen balık ve yem kutusu çokluklarını resimler ve tablolar üzerinde ve sayısal olarak yinelemişlerdir. Etkinlik süresince öğrencilerin bağlı birleşik birimleri yinelemeye yönelik becerilerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir. Balık ve yem kutularından birinin resimlerinin verildiği sorular, tablolara yer verilen sorular ve resimlerin verilmediği sorular bu anahtar öğrenme ile ilgili farklı strateji kullanımlarının ortaya çıkmasını sağlamıştır. Her bölümde balık ve yem kutusu ilişkisinin farklı verilmesinin amacı ise öğrencilerin bire-çok bağlanan birimleri yineleme, birim orana indirgeyerek yineleme ve tam kat sayı ilişkisi olmayan durumlarda çoka-çok bağlanan birimleri yineleme yapabilmelerine olanak sağlamaktır. İlk kısımda hem yem kutusu hem balık resimleri verilirken etkinliğin sonraki kısımlarında balık ya da yem kutularının resimlerinden yalnızca biri verilmiş ve diğeri sorulmuştur. Aşağıda Şekil 7'de görüldüğü gibi öğrenciler 1 yem kutusu ile 3 balığı bağladıktan sonra bu bağı diğer durumlara genişleterek yinelemişlerdir. Bu süreçte öğrenciler tekrarlı toplama yerine 1 kutu yem ile 3 balığı eşleştirerek 1-3, 2-6, 3-9, 4-12, 5-15 yinelemesinin kısa yolu olarak 3 ile 5'i çarpıp sonucu 15 bulmuşlardır.

Şekil 7. 1 yem kutusu ve 3 balık arasındaki bağın yinelenmesi

İleriki süreçte, özellikle balık ve yem kutularının resimlerinin verilmediği sorularda öğrenciler resimleri çizmektense sayısal yinelemeler yapmaya başlamışlardır. Bu süreçte balık ve yem kutularının resimlerini çizmeseler de balık ve kutu resimlerinin imgelerini düşünerek informel sembolik gösterimlere geçiş yapmışlardır. Aşağıda Şekil 8'de bu informel gösterimlere bir örnek verilmiştir.

3 . 6 , 9 , 12 , 15 , 18
1 2 3 4 5 6

Şekil 8. 1 kutu yem ve 3 balık arasındaki bağın sembolik olarak yinelenmesi

Öğretmen bu gösterimlerin sınıf içi söylemde ortaya çıkmasını fırsat bilerek öğrencilere bu sayısal yinelemelerini organize edebilmeleri için uzun oran tabloları sunmuştur. Diğer bir deyişle, uzun oran tabloları öğrencilerin sayısal yinelemelerinin organize edilmesinin (model of) bir aracı olarak kullanılmaya başlanmıştır. Daha sonraki süreçte, öğrenciler sayılar arasındaki ilişkileri tablolar üzerinde incelemişlerdir. İlk olarak, kutu sayısı arttığında balık sayısının da artacağı çıkarımını yapmışlardır. Daha sonrasında, ritmik sayma ya da artırma stratejisi kullanarak yem kutusu sayısı birer birer artarken balık sayısının üçer üçer arttığı; diğer bir deyişle, yem kutusu sayısındaki her bir birim değişimin balık sayısında 3 birim değişime sebep olduğuna yönelik ortak değişinti (kovaryasyon) ile ilgili iddialarda bulunmuşlardır. Bu süreçte aşağıdaki tabloda verilen artırma strajesine yönelik yatay değişimi temsil etmek için kısa aralıklı yatay el hareketleri (jest) de kullanmaya ve bu yatay değişime "yatay ilişki" olarak değinmeye başlamışlardır. Aşağıda Şekil 9'da sınıf içi tartışmada uzun tablo üzerinde yem kutusundaki bir birim artışın balık sayısındaki 3 birim artışa denk geldiğine yönelik işlemleri içeren bir çalışma örnek olarak verilmiştir.

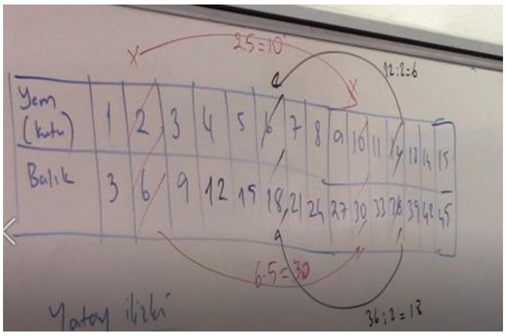
+1 +1 +1 +1

Yem (kutu)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Balık	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	

+3 +3 +3 +3

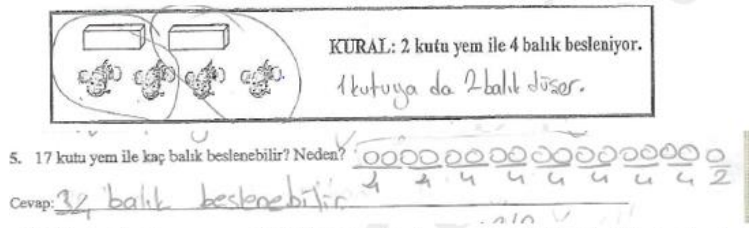
Şekil 9. Tablo üzerinde artırma stratejisi

Öğrenciler yukarıda anlatıldığı gibi, yem kutusu sayısı ve balık sayısı arasındaki değişimlerle ilgili ilişkileri keşfederken öğretmen 1 yem kutusundan 10 yem kutusuna artış olduğunda beslenebilecek balık sayısının bulunması için tek tek eklemeler yapmak yerine başka bir yol kullanmanın mümkün olup olmadığına yönelik bir soru yöneltmiştir. Burada amaç, öğrencilerin teker teker artırma stratejisini uygulamaları yerine tekrarlı toplamanın kısa biçimi olan çarpma işlemini kullanarak kısaltılmış artırma stratejisini keşfetmeleridir. Amaçlandığı şekilde, öğrenciler "1 yem kutusu ile 3 balık beslenebiliyorsa 5 adet yem kutusu ile beslenebilen balık sayısını bulmak için yem kutusu sayısı 5 katına çıktığı için balık sayısı da 5 katına çıkmalıdır" şeklinde iddialarda bulunmuşlardır. Bunun yanı sıra, bu şekildeki kısaltılmış artırma stratejilerini temsil etmek ve açıklamak için uzun aralıklı yatay el hareketleri (jest) kullanmışlardır. Aşağıda Şekil 10'da bu tartışmaların yapıldığı sınıf içi öğretimden tahtada yapılan çalışmaların bir görüntüsüne yer verilmiştir.



Şekil 10. 1 yem kutusu ile 3 balığın beslenebildiği durumda kısaltılmış artırma stratejisi

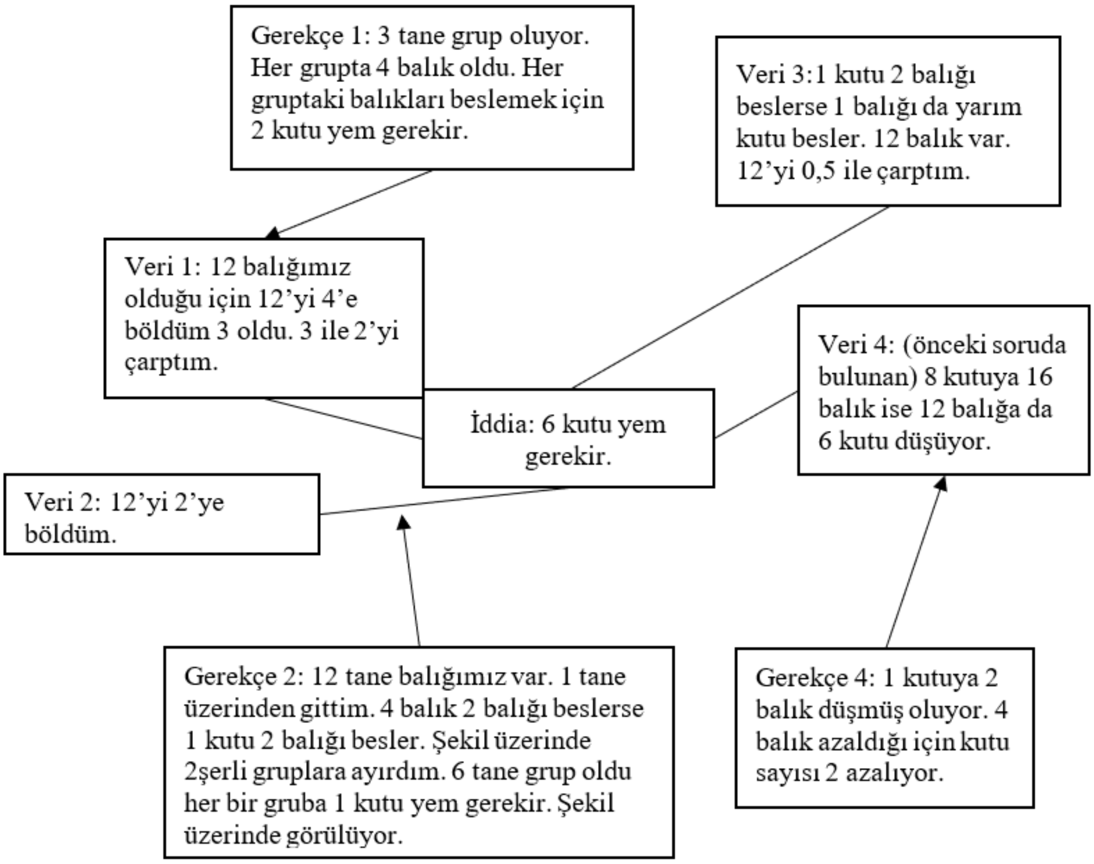
Etkinliğin ileriki kısmında yem kutusu ve balık arasındaki kural “2 yem kutusu ile 4 balık beslenebilir” şeklinde değiştirilmiştir. Buradaki amaç, 2 yem kutusu ile 4 balık durumu ile 1 yem kutusu ve 2 balık durumunun denkliğinin fark edilmesi ve öğrencilerin birim yem kutusu ile beslenebilecek balık sayısına ulaşmalarını sağlamaktır. Bu sayede, birim oran kavramının pekiştirilmesi ve kat ilişkisi içeren durumlarda referans noktası olarak kullanılmasının desteklenmesi amaçlanmıştır. Aşağıda Şekil 11’de görüldüğü gibi, öğrenciler verilen “2 yem kutusu ile 4 balık beslenir” ilişkisindeki birim yem kutusu ile beslenebilecek balık sayısını koruyarak 2 kutu yem ve 4 balık ilişkisi ile 1 kutu yem ve 2 balık ilişkisinin denk olduğunu keşfetmişlerdir.



Şekil 11. Birleşik birimlerin arasındaki ilişkinin korunarak farklı biçimlerde bağlanması.

Yine 2 yem kutusu ve 4 balık kuralı verildiğinde 12 balığı beslemek için gereken yem kutusunun sorulduğu sorunun cevaplandırılması sürecinde ortaya çıkan sınıf içi tartışmasının Toulmin analizi, sınıf içi tartışmaların zenginliğinin ve öğrencilerin anlamlı ve kapsamlı olarak öğrenmelerinin bir göstergesi olarak aşağıda Şekil 12’de verilmiştir.

Şekil 12’de görüldüğü gibi öğrenciler, bu soruyu farklı veriler sunarak ve bu verilerine çeşitli gerekçeler ortaya koyarak çözmüşlerdir. İlk olarak veri 1-gerekçe 1 olarak verilen çözüm yolunda öğrenci daha önce resimler yoluyla yaptığı gruplama ve yineleme süreçlerini, resimleri çizmeden zihinsel olarak canlandırarak cevaplamıştır. Veri 2 ve gerekçe 2 birlikte düşünüldüğünde ise bu öğrencinin verilen 2 yem kutusu-4 balık kuralında çokluklar arasındaki bağı koruyarak kuralı 1 kutu yem-2 balık kuralına dönüştürdüğü görülmüştür. Bu dönüştürmeyi yaparken de çoklukların resimlerinden yararlanmıştır. Burada 1 kutu yem ile beslenebilecek balık sayısını ifade ederken birim oran kavramına informel olarak değinen öğrenciyi veri 3 ve gerekçe 3 ikilisinde verilen bir balığı beslemek için gereken yem kutusu sayısını ortaya atan öğrenci takip etmiştir. Yani bu iki öğrenci de varsayıma dayalı öğrenme rotasında öngörüldüğü şekilde, bir birim başına düşen çokluğa değinerek birim oran kavramının temellerini ortaya koymuşlardır. Son olarak veri 4 ve gerekçe 4 beraber düşünüldüğünde başka bir öğrencinin önceki soruda ulaşılan 8 kutu ile 16 balık beslenebildiği bilgisinden yararlanarak geriye doğru azaltma stratejisini kullanarak (ör. yem kutusu sayısı 1 azalırsa balık sayısı 2 azalır) çözüme ulaştığı görülmüştür.

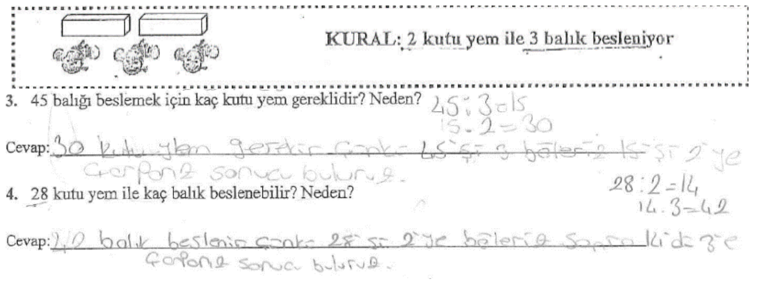


Şekil 12. 2 yem kutusu ve 4 balık kuralı verildiğinde 12 balığı beslemek için gereken yem kutusunun sorulduğu soruya yönelik sınıf tartışmasının Toulmin analizi

İleriki süreçte çoka-çok eşlemenin desteklenmesi için kuralın 2 yem kutusu-3 balık olduğu durumda öğrencilerin tablo üzerinde yem kutusu sayısı ile balık sayısı arasındaki ilişkileri inceledikleri sınıf içi söylemden bir örnek aşağıda Şekil 13'te verilmiştir. Bu esnada bir öğrenci tahtaya kalkarak yem kutusu sayılarını ikişer ikişer, balık sayılarını ise üçer üçer artırarak yem kutusu sayısındaki değişim ile balık sayısındaki değişimi açıklamıştır. Öğrencilerin 2-3 kuralının yinelenmesine yönelik olarak tablo üzerinde çizdiği eğrilerin anlamlandırılması ve bu yineleme anlayışının açıklanması için yatay eğik el hareketleri (jest) kullanmaya ve bu ilişkilere "yatay ilişkiler" olarak değinmeye devam ettikleri gözlenmiştir.

Şekil 13. 2 yem 3 balık kuralında tablo üzerinde artırma stratejisi

Dolayısıyla öğrenciler birimleri bire-çok (örneğin, 1-3) şeklinde bağlayarak artırma stratejisini keşfetmenin yanı sıra, Şekil 13'te görüldüğü gibi birimleri çoka-çok (örneğin, 2-3) şeklinde koordineli bir biçimde artırma stratejisini uygulayabilmişlerdir. İleriki süreçte resim veya tabloların kullanılmadığı, birleşik birimler arasındaki bağın yinelenmesinin sayısal olarak çarpma ve bölme işlemleri yoluyla yapıldığı stratejiler de sınıf içi söylemde ortaya konulmuştur. Bunlara örnek olarak, aşağıda Şekil 14'teki öğrenci çözümleri verilmiştir.



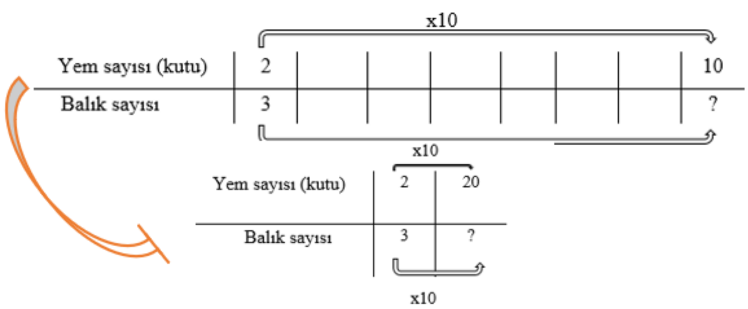
Öğrencinin yazılı cevabı:
3. 45:3=15 15.2=30
30 kutu yem gerekir çünkü 45'i 3'e böleriz. 15 kişi. 2 ile çarparız sonucu buluruz.

4. 28:2=14 14.2=42
42 balık beslenir çünkü 28'i 2'ye böleriz. Sonra 14'ü 3'le çarparız sonucu buluruz.

Şekil 14. 2 yem 3 balık kuralında sayısal yinelemeler yapılarak verilmeyen değerlerin bulunması

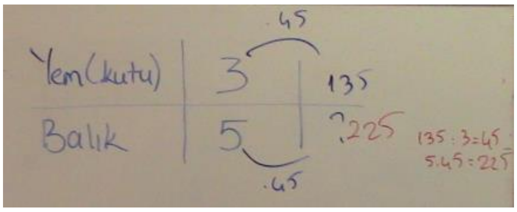
Şekil 14'te görüldüğü gibi, öğrenciler istenilen durumlara yönelik sonuçları bulmak için çarpma ve bölme işlemleri kullansalar dahi bu işlemler çarpımsal düşünme olarak değerlendirilmemiştir. Yapılan işlemlerin resimler yoluyla yapılan gruplama-eşleme-yineleme ve tablolar yoluyla yapılan artırma stratejilerinin sayısal olarak yapılması olduğu açıkça gözlemlenmiştir. Çünkü, öğrenciler, burada henüz her bir durumdaki balık sayısı ile yem kutusu sayısı arasındaki ilişkileri kullanmamaktadır. Bunun yerine, 45 balığı üçerli gruplamak için 3'e bölünmesi gerektiği ve buradan çıkan 15 sonucunun üçerli grup sayısı olduğunu ve her bir gruptaki balıkları beslemek için 2 yem kutusuna ihtiyaç olduğu için bu sayının 2 ile çarpılarak gereken yem kutusu sayısının bulunabileceğine yönelik açıklamalar sınıf içi tartışmada yer bulmuştur.

Son olarak, 2 yem kutusu 3 balık bağının yinelendiği durumlarda da Şekil 13'te olduğu gibi kısaltılmış artırma stratejilerine yönelik matematiksel fikirlerin sınıf tartışmasında yer bulmasından sonra, öğretmen her durumda uzun tablonun çizilmesinin etkili olmadığını belirtmiş ve bu yüzden iki farklı durumun temsil edildiği kısa tablolara geçişi teşvik etmiştir. Aşağıda Şekil 15'te görüldüğü gibi öğrenciler "2 yem kutusu sayısı 10 katına çıktığında 3 olan balık sayısı da 10 katına çıkmalıdır" biçimindeki akıl yürütmelerinden sonraki süreçlerde kısa tablolar çizerek soruları cevaplandırmıştır. Bu ilişkiler kısa tablolarda yatay ilişkiler olarak adlandırılmıştır. Bu yatay ilişkiler tüm öğretim süresince yatay eğik el hareketleri ile bağdaştırılmış ve kısaltılmış yineleme süreçlerini temsil etmek için kullanılmıştır. Uzun tablolardan kısaltılmış tablolara geçiş süreci aşağıda verilen Şekil 15'te özetlenmiştir.



Şekil 15. Uzun tablolarda kısaltılmış artırma stratejisinden yararlanılarak kısa tablolara geçiş

Kısa tabloların 2-3 kuralı kapsamında tanıtılmasından sonra sınıf içi öğretim kısa tablolarda ilişkilerin keşfedilmesiyle devam etmiştir. Bu kapsamda “3 yem kutusu ile 5 balık besleniyor” kuralı ile öğrencilerin tam sayı katı olmayan (non-integer) bağlar kurarak bunları kısa tablolar üzerinde yinelemelerine yönelik çalışmalar yapılmıştır. Bu süreçte, kısa tablolar 3 bilinen ve bir bilinmeyen içeren değerlerin gösterilmesi için kullanılan daha formel araçlar olarak kullanılmaya başlanmıştır. Aşağıda Şekil 16’da kısa tablolar üzerinde yatay ilişkilerin tartışıldığı ve bu yatay ilişkiler ile bölme ve çarpma yoluyla balık sayısının bulunması arasındaki ilişkinin kurulmasına yönelik bir öğrenci cevabının görüntüsü verilmiştir.



Şekil 16. Kısa tablolarda 3 yem 5 balık ilişkisinin yinelenmesi (yatay ilişkiler)

Şekil 16’da görüldüğü gibi, öğrenci verilen bilgiye dayanarak 3 yem kutusu ve 5 balık arasındaki bağı tabloda bu sayıları uygun yerlere yazarak belirtmiştir. Sonrasında ise 135 yem kutusu ile beslenebilecek balık sayısını bulmak için de 135’i tabloda 3’ün yanına yazmıştır. Daha sonrasında, tablo üzerinde gösterdiği yatay eğri ile yem kutusunun 45 katına çıktığını bularak 5’in de 45 katına çıkması gerektiğini belirtmiştir. Bu işlemler tablonun yanında bulunan çarpma ve bölme işlemlerinde görülmektedir. Böylece, kısa tablo üzerinde yinelemeleri kolaylıkla yaparken bir yandan da daha önce yapılan çarpma ve bölme işlemleri ile (bkz. Şekil 14) kısa tablolardaki yatay ilişkiler arasında ilişki kurulmuştur.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmanın amacı erken orantısal akıl yürütme için varsayıma dayalı bir öğrenme rotasının ve ilgili etkinlik dizisinin ortaya konmasıdır. Geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin öğrencilerin erken orantısal akıl yürütme becerilerini geliştirme ve oran ve orantı öğretiminin temelini oluşturmak için sahip olduğu potansiyelin göz önüne serilmesi için bulgular bölümünde sınıf uygulamasından örnekler sunulmuştur. Bu örnekler belirtilen varsayıma dayalı öğrenme rotasının bileşenlerini (anahtar öğrenmeler, araç/imge, paylaşılan öğrenmeler, muhtemel matematiksel söylemler, muhtemel jestler) içermektedir. Yapılan Toulmin analizi ile sınıf içi tartışmaların zenginliğinin ve öğrencilerin anlamlı ve kapsamlı olarak öğrenmelerine yönelik bulgular elde edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında eş oranlar oluşturmak amacıyla aynı ölçüm uzayındaki çokluklar arasındaki ilişkiler ile ilgili fikir ve tartışmalar sınıf içi uygulamaların birinci gününde doğal olarak ortaya çıkmış ve diğer günlerde de öğrencilerin veri ve gerekçelerinde sıklıkla görülmüştür. Ancak, farklı ölçüm uzaylarında bulunan çokluklar arasındaki değişmeyen, fonksiyonel ilişkiler ile ilgili fikir ve tartışmalar doğal olarak sınıf içi tartışmada yer almamıştır. Buradan yola çıkarak, bu çalışmanın sonuçları da önceki çalışmalarda belirtildiği gibi (Freudenthal, 1978; Karplus vd., 1983; Vergnaud, 1980) aynı ölçüm uzayındaki çokluklar arasındaki yinelemeye yönelik ilişkilerin (bu çalışmada yatay ilişkiler olarak bahsedilen) farklı ölçüm uzaylarındaki çokluklar arasında bulunan fonksiyonel ilişkilerden daha doğal ve sezgisel olduğunu ortaya koymaktadır. Diğer yandan, farklı ölçüm uzaylarındaki çokluklar arasındaki ilişkilerin aynı ölçüm uzayındaki çokluklar arasındaki ilişkilerden daha üst bir bilişsel istem düzeyinde olduğu sonuçlarının da desteklenmiş olduğu anlaşılmaktadır.

Çalışmanın öğrencilerin anahtar öğrenmelere ulaşmalarına yönelik sonuçlarına bakıldığında, orantısal akıl yürütmenin temelinin birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme kapsamında oluşturulmasının oran ve orantı öğretimi için önemli bir potansiyele sahip olduğu görülmüştür. Bu sebepten dolayı bu çalışmanın sonuçları da orantısal akıl yürütmenin temelinin birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme becerilerine dayandırıldığını (Battista ve Borrow, 1995; Boyer ve Levine, 2012; Gouet vd., 2020; Steffe, 1994) destekler niteliktedir. Diğer çalışmalardan farklı olarak, bu çalışmada yukarıda bahsi geçen beceriler erken orantısal akıl yürütme becerileri olarak adlandırılmıştır. Diğer bir yandan, son yıllarda yapılan çalışmalar birleşik birimler oluşturma ve birbirine bağlı birleşik birimleri yineleme becerisinin orantısal akıl yürütmenin yanı sıra matematiksel düşünme, çarpma ve kesirler (Boyce ve Norton, 2017); cebirsel düşünme (Hackenberg ve Lee, 2015); tam sayılarla toplama (Ulrich, 2013) ve hız gibi farklı ölçme uzaylarına sahip çoklukların oluşturduğu oran ile yeni bir anlam kazanan çokluklar (Liss, 2019) ile ilgili öğrenmelerinin temelinde yattığını göstermiştir. Dolayısıyla bu anahtar öğrenmelerin desteklenmesinin öğrencilerin gelecekteki birçok alandaki matematiksel düşünme, akıl yürütme ve öğrenmelerinin temellerinin atılmasında önemli bir yere sahip olduğu görülmektedir.

Çalışmanın sonuçları GME kapsamında değerlendirildiğinde erken orantısal akıl yürütme becerileri kapsamında belirlenen birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimleri yineleme anahtar öğrenmelerine yönelik matematiksel fikirlerin gerçekçi bir bağlamda (balık ve yem bağlamı) yönlendirilmiş yeniden keşfetme ve öğretici olgu ilkeleri doğrultusunda sunulması, gelişen modeller ilkesi kapsamında öğrencilerin etkinliklerinde gelişen informel araçlardan daha formel araçlara geçişin sağlanmasının öğrencilerin bu anahtar öğrenmelere ulaşılmasının desteklenmesinde önemli bir potansiyele sahip olduğu görülmektedir. Bu sonuç için kanıt olarak öğrencilerin gelişimsel süreç içerisinde ortaya koydukları araç ve strateji kullanımları ile bu araçlar ile akıl yürütmeleri verilebilir. Öğrenme rotası boyunca gösterilen gelişimsel süreç içerisinde, öğrenciler ilk anahtar öğrenme olan birleşik birimleri bağlamaya yönelik olarak, informel modellerden (gruplamak için yuvarlak içine alma, bağlama için oklar kullanma) başlayarak daha formel modellere (uzun ve kısa tablolar, sayısal işlemler vb.) geçiş yapabilmişlerdir. Bu sürecin en sonunda ise, dört değeri barındıran kısa tablolara geçiş yapmışlar ve kısa tablolardaki yatay ilişkileri kısaltılmış artırma stratejileri ve yinelemeye dayanan fikirlerle ilişkilendirmişlerdir. Buna ek olarak, öğrenciler bu süreçte Lamon (1995) tarafından ortaya konulan ve orantısal akıl yürütmenin temelinde bulunan stratejileri (birimleme ve biçimlendirme kullanılarak ölçek katsayısının bulunması) kullanarak akıl yürütmüşlerdir. Bu süreçte kullanılan yatay eğriler ve bu eğrileri göstermek için kullanılan el hareketleri (jest) ölçek katsayısını temsil etmektedir. Dolayısıyla bu çalışmanın sonucu matematiksel fikirlerin öğrenilmesi ile model ve jest kullanımının ortaklaşa bir şekilde geliştiği ve birbirlerini beslediklerine yönelik çalışmaların sonuçlarını (Gravemeijer, 1994; Rasmussen, Stephan ve Allen, 2004) da destekler niteliktedir.

Öğrencilerin erken orantısal akıl yürütmeye yönelik anahtar öğrenmeleri anlamlı, sıralı ve kapsamlı olarak öğrenmelerine yönelik kanıt Toulmin analizi sonucu ortaya çıkan şemalarda da görülebilmektedir. Çalışmada verilen Toulmin analiz şemalarından anlaşılacağı üzere, öğrenciler birçok veriyi kullanarak aynı iddialara ulaşabilmiş ve bu veri-iddia ikililerine yönelik matematiksel gerekçeler de ortaya koyabilmişlerdir. Bunun yanı sıra, önceki derslerde ortaya koydukları iddiaları sonraki derslerdeki yeni iddialar için veri ve gerekçe olarak kullanmışlardır. Bu sebeplerden dolayı verilen Toulmin analiz şemaları öğrencilerin oran ve orantı konusu için hazırlanan etkinliklerle ve öngörüldüğü şekilde anlamlı, kapsamlı ve sıralı olarak öğrendiğinin bir göstergesi olarak düşünülebilir.

Orantısal durumlar ile ilgili problemleri çözerken ortaya çıkan en önemli kavram yanılgısı çarpımsal akıl yürütme yerine toplamsal akıl yürütmenin kullanılmasıdır (Hart, 1988; Kaput ve West, 1994; Karplus vd., 1983; Misailadou ve Williams, 2003; Resnick ve Singer, 1993; Tourniaire ve Pulos, 1985; van Dooren vd., 2010). Bu çalışma kapsamında öğrencilerin çarpımsal düşünmeye dayanan orantısal akıl yürütmeleri, tekrarlı toplama yerine, birleşik birimleri bağlama ve bağlı birleşik birimlerin yinelenmesi becerileri kapsamında ele alınmıştır. Alan yazında sıklıkla bahsedilen yanlış toplamsal düşünme biçimi bu çalışma kapsamında ortaya çıkmamıştır.

Dolayısıyla, orantısal akıl yürütmenin bu beceriler geliştirilerek temellendirilmesinin yanlış toplamsal düşünmenin önüne geçmede etkili olduğu sonucuna varılabilir. Yine de ileriki bir çalışmada bu konu derinlemesine araştırılabilir.

Son olarak bu çalışmanın doğası gereği etkinlikler ve öğretimsel süreçler öğrencilerin sezgisel ve informel bilgilerinin üzerine inşa edilmiştir. Bu çalışma kapsamında yapılan sınıf içi uygulamalarda alan yazında orantısal akıl yürütme problemleri ile ilgili sıklıkla kullanılan içler dışlar çarpımı algoritmasının sınıf tartışmasında yer almadığı görülebilir. Diğer bir deyişle, içler dışlar algoritması sınıf içerisinde kendiliğinden ortaya çıkmamıştır. Buradan yola çıkılarak, içler dışlar çarpımı gibi algoritmaların öğrencilerin sezgisel bilgilerinde yer almadığı ve kendiliğinden ortaya çıkmadığı (Hart, 1988) sonucu desteklenmiş olmaktadır. Diğer bir yandan, çalışmanın bu anlamdaki bulgularının sonucu olarak yedinci sınıf öğrencilerinin içler dışlar çarpımı gibi ezbere dayalı algoritmalara ihtiyaç duymadan gerçekçi durumlara dayanan çeşitli orantısal akıl yürütme etkinlikleri ile ilgili akıl yürütebilecekleri öne sürülebilir. Bu bulgu, özellikle ulusal alanda yapılan birçok çalışmada elde edilen öğrencilerin stratejilerinin çoğunlukla içler dışlar çarpımı gibi işleme dayalı algoritmalara dayandığını belirten çalışmaların (Arıcan, 2019; Atabaş ve Öner, 2017; Duatepe vd., 2005; Kahraman, Kul ve İskenderoğlu, 2019; Kaplan, İşleyen ve Öztürk, 2011; Özgün-Koca ve Altay, 2009) sonuçları ile birlikte düşünülebilir.

Sonuç olarak, yedinci sınıf öğretmenlerinin bu çalışma kapsamında geliştirilen erken orantısal akıl yürütmeye yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisini yedinci sınıf oran ve orantı öğretimi öncesinde, bu konuya temel oluşturması için derslerinde kullanmaları önerilmektedir. Böylelikle öğretmenlerin öğrencilerin muhtemel düşünüş biçimleri ve bu düşünüş biçimlerinin daha matematiksel düşünüş biçimlerine geçiş sürecinin nasıl desteklenmesi gerektiği ile ilgili bilgilerini geliştirme fırsatı bulacakları düşünülmektedir. Diğer yandan, bu çalışma sayesinde erken orantısal akıl yürütme becerilerine yönelik GME Teorisi tabanlı bir öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi alana kazandırılmıştır. Bu sayede, bir alanda daha GME Teorisi uygulamaya konularak teorinin pratik alanda yansımalarının incelenmesi fırsatı ortaya konulmuştur. Ayrıca, geliştirilen varsayıma dayalı öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisi hazır olarak matematik öğretmenlerinin kullanımına sunulmuştur. Bu sayede, bu öğrenme rotası ve ilgili etkinlik dizisinin oran ve orantı öğretiminin temelini oluşturmada yardımcı olması ve bu sayede oran ve orantı öğretiminin iyileştirilmesine katkı sağlaması öngörülmektedir.

Son olarak, bu çalışma kapsamında öğrenciler, uzun ve kısa tablolardaki yatay ilişki ile (ör., x10), uygulamanın ilk günlerinde resim gibi informel araçlarla yaptıkları süreçler (gruplandırma, grupları birbirine bağlayarak yineleme) arasında ilişkilendirme yapmışlardır. Böylece, bundan sonraki süreçte yer alacak olan oran ve orantının sembolik gösterimine geçişi için gerekli olan ön öğrenmeleri sağlamışlardır. Bu geçişin kısa tablolardaki kenarlıkların kaldırılarak kısa tablolardan orantının sembolik gösterimine geçişinin sağlanması önerilmektedir (Ayan Civak, Işıksal Bostan ve Yemen Karpuzcu, 2020). İleriki bir çalışmada, öğrencilere bahsedilen erken orantısal akıl yürütme becerileri kazandırıldıktan sonra farklı ölçüm uzayına ait çokluklar arasındaki fonksiyonel ilişkileri keşfetmeleri be sembolik ve cebirsel ilişkilere odaklanan oran ve orantı öğretimi gerçekleştirilerek öğrencilerin oran ve orantı konusuyla ilgili anahtar öğrenmeleri bu beceriler üzerine inşa edip edemedikleri daha detaylı olarak araştırılabilir.

Etik Kurul Onay Bilgileri (The Ethical Committee Approval)
Bu çalışma, Orta Doğu Teknik Üniversitesi İnsan Araştırmaları Etik Kurulu’nun 07.11.2017 tarih ve 28620816/549 sayılı kararı ile araştırma ve yayın etiğine uygun olarak gerçekleştirilmiştir.

Çıkar Çatışması (Conflict of Interest)
Yazarlar, bu çalışma kapsamında herhangi bir çıkar çatışmasının olmadığını beyan etmişlerdir.

Kaynaklar

Arıcan, M. (2019). A diagnostic assessment to middle school students' proportional reasoning. *Turkish Journal of Education*, *8*(4), 237-257.

Atabaş, Ş., & Öner, D. (2017). An examination of Turkish middle school students' proportional reasoning. *Boğaziçi University Journal of Education, 33*(1), 63-85.

Ayan Civak, R., Işıksal Bostan, M., & Yemen Karpuzcu, S. (2020). Orantısal akıl yürütmenin gelişimine yönelik varsayıma dayalı öğrenme rotasının geliştirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.* Advance online publication. doi: 10.16986/HUJE.2020063485.

Battista, M., & Borrow, C. V. A. (October, 1995). *A proposed constructive itinerary from iterating composite units to ratio and proportion concepts.* Paper presented at the Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Columbus, OH.

Beswick, K. (2011). Make your own paint chart: a realistic context for developing proportional reasoning with ratios. *Australian Mathematics Teacher, 67*(1), 6-11.

Boyce, S., & Norton, A. (2017). Dylan's units coordinating across contexts. *The Journal of Mathematical Behavior, 45*, 121-136.

Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3= 2/6= 3/9=4/12? *Journal of Experimental Child Psychology, 111*(3), 516-533.

Bryant, P. (1974). *Perception and understanding in young children*. London: Methuen.

Carpenter, T. P., Gomez, C., Rousseau, C., Steinthorsdottir, O. B., Valentine, C., Wagner, L., et al. (April, 1999). *An analysis of student construction of ratio and proportion understanding*. Paper presented at the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cramer, K., & Post, T. (1993). Making connections: A case for proportionality. *Arithmetic Teacher, 60*(6), 342-346.

Çelik, A. ve Yetkin-Özdemir, E. (2011). İlköğretim öğrencilerinin orantısal akıl yürütme becerileri ile problem kurma becerileri arasındaki ilişki. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30*(30), 1-11.

Daro, P., Mosher, F., & Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction* (Research Report No. RR-68). Consortium for Policy Research in Education. Retrieved from http://www.cpre.org/images/stories/cpre_pdfs/learning%20trajectories%20in%20math_ccii%20report.pdf.

Duatepe, A., Akkuş Çıkla, O. ve Kayhan, M. (2005). Orantısal akıl yürütme gerektiren sorularda öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejilerinin soru türlerine göre değişiminin incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*, 73-81.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3-17.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K. C., & Abrahamson, D. (2005). Understanding ratio and proportion as an example of the apprehending zone and conceptual-phase problem-solving models. In J. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 213–234). New York: Psychology Press.

Gouet, C., Carvajal, S., Halberda, J., & Peña, M. (2020). Training nonsymbolic proportional reasoning in children and itse effects on their symbolic math abilities. *Cognition, 197*, 104-154.

Gravemeijer, K. & Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 146-169). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney ve N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-51). London, England: Routledge.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Greenes, C., & Fendell, C. (2000). *Groundworks: Algebraic puzzles and problems*. Chicago, IL: Creative Publications.

Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2015). Relationships between students' fractional knowledge and equation writing. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(2), 196-243.

Harel, G., & Confrey, J. (Eds.). (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany: State University of New York Press.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Hilton, A., & Hilton, G. (2019). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 22*(6), 545-574.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Basic Books.

Kahraman, H., Kul, E. ve İskenderoğlu, T. A. (2019). 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin nicel karşılaştırma içeren orantısal akıl yürütme problemlerinde kullandıkları stratejiler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 195-216.

Kaplan, A., İşleyen, T. ve Öztürk, M. (2011). 6. sınıf oran orantı konusundaki kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 19*(3), 953-968.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional problems: factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey, (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). Albany: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 219-233.

Kastberg, S. E., D'Ambrosio, B., & Lynch-Davis, K. (2012). Understanding proportional reasoning for teaching. *Australian Mathematics Teacher, 68*(3), 32-40.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey, (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany: State University of New York Press.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York, NY: Routledge.
Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert ve M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (vol. 2, pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.
Liss, D. R., II (2019). The development of distributive partitioning operations. *The Journal of Mathematical Behavior, 56,* 100775. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.04.004.
Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018). *Matematik dersi öğretim programi (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar).* Ankara: MEB.
Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 335-368.
Özgün-Koca, S. A., & Altay, M. K. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. *Investigations in Mathematics Learning*, *2*(1), 26-48.
Park, J. H., & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive Development*, *16*(3), 763-773.
Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 301-323.
Resnick, L. B. & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Shin, J., Lee, S. J., & Steffe, L. P. (2020). Problem solving activities of two middle school students with distinct levels of units coordination. *The Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100793. https://doi.org/10.1016/j. jmathb.2020.100793.
Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.
Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S. J., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*, 127-155.
Spinillo A. G., & Bryant P. E. (1999). Proportional reasoning in young children: part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5(2),* 181-197.
Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes: An overview. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-39). Albany, NY: SUNY Press.
Steinthorsdottir, O. B., & Sriraman, B. (2009). Icelandic 5th-grade girls' developmental trajectories in proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 21*(1), 6-30.
Stephan, M. L. (2015). Conducting classroom design research with teachers. *ZDM, 47*(6), 905-917.
Stephan, M. McManus, G., Smith, J., & Dickey (n.d.). *Ratio and rates*. Retrieved from https://cstem.uncc.edu/sites/cstem.uncc.edu/files/media/Ratio%20T%20Manual.pdf
Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer
Thompson, A. G., & Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 2-24.
Thompson, P. W. & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 279-303.
Toluk-Uçar, Z. ve Bozkuş, F. (2016). İlkokul ve ortaokul öğrencilerinin orantısal durumları orantısal olmayan durumlardan ayırt edebilme becerileri. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD), 17*(3), 281-299.
Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 401-412.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Ulrich, C. (2013). Additive versus multiplicative units coordination: An elaboration of existing frameworks and recent findings. In L. P. Steffe, L. L. Hatfield, & K. C. Moore (Eds.), *WISDOMe Monograph: Vol. 4*, (pp. 237-265). Laramie, WY: University of Wyoming.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360-381.

Vergnaud, G. (1980). Didactics and acquisition of "multiplicative structures" in secondary schools. In W. F. Archenhold, R. H. Driver, A. Orton, & C. Wood-Robinson (Eds.), *Cognitive development research in science and mathematics* (pp. 190-200). Leeds, UK: University of Leeds.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: State University of New York Press.

Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E., & Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24,* 179-202.

Wright, V. (2014). Towards a hypothetical learning trajectory for rational number. *Mathematics Education Research Journal, 26,* 635-657.

Extended Abstract

Introduction

Proportional reasoning is a comprehensive and essential concept for the development of numerous mathematical concepts such as fractions, percents, functions, speed, slope, and probability. Nevertheless, it has been reported in several studies that students at all grades experience difficulties to learn this skill (e.g., Misailadou & Williams, 2003; Toluk-Uçar & Bozkuş, 2016). Challenges in covarying composite units, using incorrect or irrelevant data in computations and not being able to discern between proportional and non-proportional situations are some of those difficulties. However, the most commonly reported difficulty of students has been erroneous additive reasoning (Misailadou & Williams, 2003; van Dooren et al., 2010).

Besides students, teachers have also been reported as lacking a conceptual understanding of the fundamental elements of proportional reasoning and the necessary pedagogical content knowledge required to provide a rich and effective teaching environment for their students (Hilton & Hilton, 2019; Weiland et al., 2020). Traditionally, the teaching of proportional reasoning takes place based on procedural algorithms before sufficient conceptual background has been laid (Lamon, 1995). Therefore, there is evidence to conclude that the current proportional reasoning instruction fails to address the fundamental concepts of proportional reasoning, and an improvement in proportional reasoning instruction is much needed to nurture conceptual understanding of students. To this purpose a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) was developed, tested, and revised to support the teaching and learning processes of proportional reasoning in a three-year-long design research study. In this particular study, we present the beginning phase of this HLT, which includes the big ideas of linking composite units and iterating linked composites that are referred to as "early proportional reasoning skills" since they are the basic and fundamental skills for the development of proportional reasoning (Battista & Borrow, 1995; Steffe, 1994). In this sense it is believed that this part of our HLT merits particular attention on its own.

Although repeated addition was seen as the basis for proportional reasoning, several researchers suggested that repeated addition is only a procedural skill to solve proportional problems, and proportional reasoning is based on the skills of linking composite units and iterating linked composites. Steffe (1988, 1994) described the process related to these skills as follows: constructing a unit of units (composite unit), taking it as a single unit, operating with that single unit whilst monitoring how many times this composite unit is iterated. Thus, iterating composite units is referred to as the skill related to taking one group as a composite unit and iterating this unit by keeping the nature of its elements the same (Steffe, 1994).

HLTs are devised by Simon (1995) who defined them as "predictions as to the path by which learning might proceed" (p. 135) that include "the learning goal, the learning activities, and the thinking and learning in which students might engage" (p. 133). In this study, we adopt Stephan's (2015) approach, and refer to our HLT as a classroom learning trajectory that includes "the mathematical goals, and tool use as students engage with the instructional tasks" (p. 908) and present them in a table that includes big ideas, tools, possible mathematical discourse, and possible gestures.

In developing, revising, and implementing our HLT, we used the theory of Realistic Mathematics Education (RME), which was developed in opposition to a mathematics instruction that provides students with formal definitions and notations at the beginning and puts emphasis on procedural skills. According to RME scholars, formal mathematical knowledge should emerge from students' activities as they try to mathematize unmathematical or less mathematical situations that are presented to them in rich realistic contexts (Freudenthal, 1973, 1991). In this process of mathematization, models should support a transition process from a *model of* to *model for* understanding (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1999). In this study, the ideas related to early proportional reasoning are presented in a realistic context that asked students to feed fish with specific amounts of food bars. As students make sense of the mathematical ideas in this realistic context, they are supported to mathematize the more formal ideas with the help of ratio tables as the overarching model that took diverse forms of models all through the HLT.

Method

This study was part of a three-year-long design research study in which we aimed to develop an HLT for proportional reasoning and related local instruction theory including the means to support the targeted teaching and learning process (Gravemeijer & Cobb, 2006). In this particular study, we present the first phase of this HLT that includes the big ideas of early proportional reasoning and classroom excerpts from the classroom implementation of the last cycle that would provide evidence for the potential and validity of the proposed HLT. Our participants for this study included an experienced middle school mathematics teacher and her seventh-grade classes in a public school in Ankara. The data for this particular study came from a seventh-grade class that included 15 girls and 17 boys in the Spring semester of 2017-2018 academic year. The units of data analysis in this study included the problems dealt with, the tools/models used, the norms of participation, the nature of classroom discussion, and teacher's orchestration of those elements in line with the nature of design research studies (Cobb et al., 2003). To note the significant events and figure out the patterns in these elements of teaching and learning, the classroom discussions that emerged as the proposed HLT was implemented in this classroom were analyzed by Toulmin's (1958) argumentation model.

Results and Discussion

The findings of the study revealed that the proposed HLT and the instructional sequence can provide substantial support for a classroom community to develop essential ideas of early proportional reasoning in increasing sophistication and to be prepared to tackle with more abstract ideas of proportional reasoning. The evidence for this conjecture comes from the analysis of the classroom discussions by Toulmin's (1958) argumentation model. The analysis showed that students were able to make claims to find missing values in different situations by reasoning with pictures and tables, drawing on their informal and intuitive knowledge related to grouping, linking, iterating, unitizing, norming, and building up (as used in their data and warrants). At the beginning, these ideas took the forms of coordinated build-up strategies (i.e., when x goes up by twos, y goes up by threes) or a skip counting process (3-5, 6-10, 9-15, etc.). As the discussions progressed on the ensuing days, these naïve understandings of covariation evolved into abbreviated build-up strategies, which included more efficient procedures instead of building-up by ones. These efficient strategies involved multiplying (as short ways for iterating) and/or dividing (as short ways for grouping) or operating with the quantities in the same measure space by a scale factor (e.g.., doubling, tripling, etc.). Furthermore, both the coordinated build-up processes and abbreviated build up strategies were thought of together with the less mathematical processes of grouping and linking with pictures.

The findings of this study also showed that using ratio tables as the overarching model in line with an RME perspective supported students' understanding from less mathematical to more mathematical understandings. In other words, the findings of this study concluded that learning and development happens in connection with reasoning with models and gestures in the same direction with several researchers (e.g., Cobb, 2003; Gravemeijer, 1999; Lehrer, Schauble, Carpenter, & Penner, 2000). More precisely, the Toulmin analysis showed that the introduction and use of long ratio tables supported the ways students organize linked composites and keep track of how many times they were iterated. Moreover, it indicated that ratio tables incented students to use hand gestures to locate the subsequent numbers in tables and supported their interpretations about the quantities that change in relation to the others. In addition, it provoked students to use hand gestures to interpret and represent these changes.

On the ensuing days, the relationships including reasoning with scalar operators within same measure spaces in long (horizontal) ratio tables were referred to as horizontal relationships by the students. As students used long ratio tables and related hand gestures to make sense of and communicate these interpretations of horizontal relationships and used them in their data/warrants to make claims about several missing values, the teacher suggested to shorten the long tables, emphasizing that there was no need to write all the columns in between the numbers in the tables. This helped students' making connections between short ratio tables and abbreviated build-up strategies to do calculations more efficiently. Drawing on their work with long ratio tables, students reasoned with the same scalar operators within each measure spaces and related hand gestures in short(ened) ratio tables. Hence, curtailing long ratio tables to obtain short ratio tables acted as a support for students' search for efficient and short ways building-up by ones. We suggest that teachers can use the proposed HLT in their classes to support their students' early proportional reasoning and prepare them for more formal ideas of proportional reasoning. More specifically, we note that they can use short ratio tables to introduce the formal representation of ratios and proportions.