



Investigation of 9th Grade Students' Development of Operational Flexibility in The Context of Equations Containing Algebraic Fractions

Mehtap Taştepe^a , Hüseyin Bahadır Yanık^b 

^aSinop University, Faculty of Education, Sinop, Turkey

^bAnadolu University, Faculty of Education, Eskişehir, Turkey.

ABSTRACT

The aim of this study is to examine the development of 9th grade students' operation flexibility in the context of equations containing algebraic fractional expressions. In this direction, the concept of transaction flexibility is discussed. The method of the research is the "teaching experiment" model, which is considered among the qualitative research approaches. In addition, "clinical interviews" and "document review" were conducted to support this. The participants of the research are four ninth grade students. Partially solved examples were used in order to improve the transaction flexibility of the participants and were asked to make choices among the solutions provided that they indicate the reason. The data obtained (video recordings, field notes and practice papers) were subjected to descriptive and content analysis. Findings showed that partially solved examples and solution preferences positively affected the participants' transaction flexibility. In addition, the results of the permanence clinical interview performed approximately 3 months after the application show that this effect is permanent, although there is a partial decrease.

ARTICLE INFO

Article History:

Received:19.06.2021

Received in revised form:12.11.2021

Accepted: 26.11.2021

Available online:14.11.2021

Article Type: Standard paper

Keywords: : transaction flexibility, algebraic fractional expressions, ninth grade students, teaching experiment.

© 2021 IJESIM. All rights reserved

1. Introduction

One of the main problems of mathematics education has been to what extent to focus on which type of knowledge. In the most general sense, mathematical knowledge can be considered in two categories as procedural/rule-based and conceptual/relational knowledge (Skemp, 1978; Star, 2005; Rittle-Johnson, Schneider and Star, 2015).

In the past, it was stated that these two knowledges had an unrelated nature and even implied that conceptual knowledge was more important than procedural knowledge (Hiebert and Lefevre, 1986; Post and Cramer, 1989; Haapasalo and Kadijevich, 2000). Skemp (1978) stated that there are strong grounds for treating conceptual and procedural knowledge as different types, and that procedural understanding can be regarded as a type of mathematical understanding, albeit weakly, according to conceptual understanding. These approaches have led to more studies on conceptual knowledge over time. Although conceptual computing was more important than procedural knowledge, in time, opinions that one of these two types of knowledge could not be preferred over the other and that both types of knowledge were important began to predominate (Hiebert and Lefevre, 1986; Carpenter, 1986; Post and Cramer, 1989; Schneider, Rittle-Johnson and Star, 2011). In particular, it has been stated that these two types of knowledge support each other (Carpenter, 1986). With this approach, procedural knowledge came to the fore again and started to be discussed, and the need to revise previous

²Corresponding author's address: Sinop University, Faculty of Education, Sinop, Turkey.

e-mail: mehtap.tastepe@hotmail.com

DOI: <https://doi.org/10.17278/ijesim.954705>

definitions of procedural knowledge (Skemp, 1978; Hiebert and Lefevre, 1986) was emphasized (De Jong and Ferguson-Hessler, 1996; Star, 2005; 2007; Star and Stylianides, 2013). Star (2001) stated that procedural and conceptual knowledge should not be separated from each other, procedural knowledge can contain and develop conceptual knowledge. Just solving it correctly is not an indication of a student's understanding as she defined it as transaction flexibility.

Transaction flexibility is defined in different ways in the literature. For example, according to Verschaffel, Greer and De Corte (2007), some researchers emphasize the ability of a person to use various solution methods (regardless of whether the methods are most suitable or not) (Blöte, Van der Burg and Klein, 2001), while others emphasize choosing the most appropriate strategy in a given situation. They state that resilience is a critical feature of flexibility (Star and Seifert, 2006). In this research, the second approach is discussed. Because the information operational flexibility of multiple procedures, to be applied to them and selecting the most appropriate strategy so slow, and is thought to be a multidimensional structure.

In this research, it is aimed to determine and improve the transaction flexibility of the participants in equations containing algebraic fractional expressions in order to examine the procedural knowledge of the participants and the relationship between their procedural knowledge on this subject and conceptual knowledge. For this purpose, answers to the following questions were sought;

How does the computational flexibility of the participants in algebraic fractional equations develop?

- What is the pre-application flexibility of the participants in algebraic fractional equations?
- What are the factors affecting the development of the participants' transaction flexibility?

This study aims to contribute to the studies carried out to eliminate an important deficiency in the literature on the development of procedural knowledge.

2. Method

The model of the research is "teaching experiment", "clinical interviews" and "document review" to support this. In this research, the teaching experiment was built on solved examples and assumptions were made on this.

The criterion sampling method, one of the purposive sampling (Patton, 1997) methods, was used in the determination of the participants in the study, as it enables in-depth study. Participants were determined according to that they do not make mistakes in the first part of the pre-practice questions, which includes operations in fractions and that the pre-practice questions usually answer the questions in the second part, which includes operations in algebraic fractional expressions, in some way. Four 9th grade students were identified as the participants of the study.

Obtained data on transaction flexibility (video recordings, field notes and practice papers) were subjected to descriptive and content analysis.

3. Results

The results obtained from the research; As the process progressed, participants solved the equations more accurately than in the first sessions, and there was a positive change in their knowledge of multiple strategies.

It was observed that the conscious choices among the solutions of the participants, who were faced with the task of comparing solutions for the first time, positively affected their operational flexibility. The comparisons were presented to the participant's side by side with the desired solution so that they could see all the solutions together and not try to remember them. As a matter of fact, they were able to apply the strategies they compared and preferred to both new equations and equations containing different fraction types.

As the sessions progressed, the participants were better able to implement their preferred solutions. They were able to transfer the strategies included in these solutions to different fraction types and felt the need to see much less solved examples compared to the first sessions.

Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel Kesirleri İçeren Denklemler Bağlamında İşlem Esnekliklerinin Gelişiminin İncelenmesi

Mehtap Taştepe^a, Hüseyin Bahadır Yanık^b

^aSinop Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Sinop, Türkiye

^bAnadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZ	MAKALE BİLGİ
<p>Bu çalışmanın amacı 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler bağlamında işlem esnekliklerinin gelişiminin incelenmesidir. Bu doğrultuda işlem esnekliği kavramı ele alınmıştır. Araştırmanın yöntemini nitel araştırma yaklaşımları arasında ele alınan “öğretim deneyi” modeli oluşturmaktadır. Ayrıca bunu desteklemek için “klinik görüşmeler” ve “doküman incelemesi” yapılmıştır. Araştırmanın katılımcılarını dört dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Katılımcıların işlem esnekliklerini geliştirmek amacıyla kısmi çözümlü örnekler kullanılmış ve nedenini belirtmek koşuluyla çözümler arasında tercihlerde bulunmaları istenmiştir. Elde edilen veriler (video kayıtları, alan notları ve uygulama kâğıtları) betimsel ve içerik çözümlemesine tabi tutulmuştur. Bulgular kısmi çözümlü örneklerin ve çözüm tercihlerinin katılımcıların işlem esnekliklerini olumlu yönde etkilediğini göstermiştir. Ayrıca uygulamadan yaklaşık 3 ay sonra gerçekleştirilen kalıcılık klinik görüşme sonuçları bu etkinin kısmi bir azalma olmakla birlikte kalıcı olduğunu göstermektedir.</p>	<p>Makale Tarihiçesi: Alındı: 19.06.2021 Düzeltilmiş hali alındı: 12.11.2021 Kabul edildi: 26.11.2021 Çevrimiçi yayımlandı: 14.11.2021 Makale Türü: Standart Makale Anahtar Kelimeler: işlem esnekliği, cebirsel kesirli ifadeler, dokuzuncu sınıf öğrencileri, öğretim deneyi</p>

© 2021 IJESIM. Tüm hakları saklıdır

1. Giriş

Matematik eğitiminin temel problemlerinden biri hangi bilgi türüne ne ölçüde odaklanılacağı olmuştur. Matematiksel bilgi en genel anlamda işlemsel/kural bazlı ve kavramsal/ilişkisel bilgi (Skemp, 1978; Star, 2005; Rittle-Johnson ve Schneider, 2015) şeklinde iki kategoride düşünülebilir. Bu iki bilgi türü alanyazında işlemsel ve kavramsal anlama olarak da karşımıza çıkabilmektedir (Yanık, 2016). İşlemsel bilgi problem çözme sürecinde kullanılan her türlü işlem adımları ve algoritma bilgisini içerirken, kavramsal bilgi daha çok kavramlar, prensipler ve tanımlar bilgisi olarak ifade edilmektedir (Skemp, 1978; Star, 2005; 2007; Post ve Cramer, 1989).

Eskiden bu iki bilginin birbirleriyle ilişkisi olmayan bir doğaya sahip olduğu ve hatta kavramsal bilginin işlemsel bilgiye göre daha önemli olduğu yönünde imaların yapıldığı belirtilmiştir (Hiebert ve Lefevre, 1986; Post ve Cramer, 1989; Haapasalo ve Kadıjevich, 2000). Skemp (1978) kavramsal ve işlemsel bilginin farklı türler olarak ele alınması için güçlü dayanakların olduğunu ve kavramsal anlamaya göre işlemsel anlamının zayıfta olsa bir matematiksel anlama türü olarak kabul edilebileceğini belirtmiştir. Bu yaklaşımlar zaman içinde kavramsal bilgiyi konu eden çalışmaların daha çok yapılmasına ön ayak olmuştur.

Geçmişte kavramsal bilgi işlemsel bilgiye göre daha fazla önemsense de zaman içerisinde bu iki bilgi türünden birinin diğerine tercih edilemeyeceği ve her iki bilgi türünün de önemli olduğu yönünde görüşler (Hiebert ve Lefevre, 1986; Carpenter, 1986; Post ve Cramer, 1989; Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011) ağırlık basmaya başlamıştır. Özellikle bu iki bilgi türünün birbirlerini desteklediği (Carpenter, 1986), birbirlerini barındırdıklarını ve bu nedenle birbirinden ayrı olarak düşünmenin doğru bir yaklaşım olmadığı ifade edilmiştir (Hiebert ve Lefevre, 1986; Post ve Cramer, 1989; Star, 2001). Bu yaklaşımla birlikte işlemsel bilgi yeniden gündeme gelerek tartışılmaya başlanmış ve işlemsel bilginin önceki tanımlarının (Skemp, 1978; Hiebert ve Lefevre, 1986) yeniden gözden geçirilmesi ihtiyacı vurgulanmıştır (de Jong ve Ferguson-Hessler, 1996; Star, 2005; 2007; Star ve Stylianides, 2013). Yeni yaklaşıma göre Skemp (1978) ve Hiebert ve Lefevre'nin (1986) açıkladığı gibi işlem adımları, sözdizimi kuralları, algoritma ve algoritmalar kapsamındaki adımlar arasındaki ilişkilerle sınırlı tutulmasının

işlemsel bilginin yüzeysel ve ilişkisel açıdan dar kalmasına neden olmuştur. Star (2005; 2007) algoritmalar dışında sezgilere, deneyimlere, bulgu ve buluşlara dayalı farklı karmaşıklık düzeylerinde ilişkileri içeren çok çeşitli soyut yöntemlerin olduğunu ifade etmiş ve işlemsel bilginin daha derin ve kapsamlı ilişkileri içermeye potansiyeline sahip olduğunu ve bu nedenle işlemsel bilginin sadece ezberlenmiş bir dizi kurallar olarak ifade edilmesinin doğru olmayacağını dile getirmiştir. Beilock ve DeCaro (2007) öğrencilerin problemleri hızlı ve doğru bir şekilde çözmek için verimli stratejiler kullanarak ezberlemeyi azaltabileceklerini ifade etmişlerdir.

Star (2001) işlemsel ve kavramsal bilginin birbirinden ayrı tutulmaması gerektiğini, işlemsel bilginin kavramsal bilgiyi barındırabileceğini ve geliştirebileceğini ifade etmiştir. Sadece doğru çözmek bir öğrencinin anladığının göstergesi değildir. Star (2001) daha kısa yolla ya da daha az işlem yoğunluğu ile çözen ya da farklı işlemsel yöntemleri tercih eden öğrencilerin bir farklılığı olması gerektiğine vurgu yaparak, bu durumun işlem esnekliği kavramı çerçevesinde ele alınabileceğini ifade etmiştir. İşlem esnekliği, kavramsal ve işlemsel bilgidir, ancak bunlarla ilişkilidir (Schneider, Rittle-Johnson ve Star 2011).

1.2. İşlem Esnekliği

İşlem esnekliği literatürde farklı şekillerde tanımlanmaktadır. Örneğin Verschaffel, Greer ve De Corte'e göre (2007) bazı araştırmacılar, bir kişinin çeşitli çözüm yöntemlerini (yöntemlerin en uygun olup olmadığına bakılmaksızın) kullanabilmesini (Blöte, Van der Burg ve Klein, 2001) vurgularken, bazı araştırmacılar ise belirli bir durumda en uygun stratejiyi seçme eğiliminin esnekliğin kritik bir özelliği olduğunu ifade etmektedirler (Star ve Seifert, 2006). Bu araştırma kapsamında ikinci yaklaşım ele alınmıştır. Çünkü işlem esnekliğinin çoklu prosedürlerin bilgisinden, bunların uygulanabilmesine ve en uygun stratejinin seçilebilmesine kadar yavaş ilerleyen ve çok boyutlu bir yapı olduğu düşünülmektedir. Bir problemin çözümünde eğer bir birey bir adımdan sonra hangi adımın geleceğini biliyor ve işlemi hatasız bir şekilde yapıyorsa problemin doğru çözümüne ulaşması kaçınılmazdır. Bu süreçte bireyin çok derin ilişkileri görmesine ya da kurmasına ihtiyacı yoktur. Ancak bu sıralı yapılar dışında da çok çeşitli işlemler vardır ve her bir işlem içerisindeki ilişkiler farklı karmaşıklık düzeylerine sahiptir (Star (2005; 2007)). Daha kısa yolla, daha az işlem yoğunluğu ile ya da farklı yöntemler kullanarak problem çözen bireyin bir farklılığı olmalıdır. Star (2001) bu farklılığı işlem esnekliği kapsamında değerlendirmektedir. Bu kapsamda işlem esnekliği için dört bileşenden bahsedilebilir.



Şekil 1. İşlem esnekliğinin bileşenleri

Bu dört bileşen arasında hiyerarşik bir durum söz konusudur. Bireyin bir problemle karşılaştığında problemin çözümüne uygun farklı stratejileri belirleyebilmesi, ardından bu stratejileri uygulayarak probleme farklı çözümler geliştirebilmesi ve en uygun bulduğu çözümü tercih ederek eleştirel bir değerlendirme getirebilmesi önemlidir.

İşlem esnekliği kapsamında *farklı çözüm stratejileri* farklı yapıya sahip stratejileri ifade etmekle birlikte farklı adım sayısını ya da farklı adım (dönüşüm) sıralamalarını içeren çözümleri kapsayabilir. Esnek işlem bilgisine sahip olmayanlar genellikle tek bir çözüm yolu kullanırlar ve gereksiz ya da tekrarlayan çözüm adımlarını gerçekleştirerek işlemi uzatabilirler. Esnek işlem becerisine sahip olanlar ise bir işlemi farklı çözüm stratejileri kullanarak çözebilirler (Star, 2001). Öğrenciler çoklu çözüm stratejilerini bilmediklerinde veya kullanmadıklarında, problem hakkında daha az bilgiye sahip olurlar veya zihinsel olarak problemi daha sınırlı temsil ederler. Bu durum öğrencilerin bu bilgilere dair yorumlarını kısıtlar (McNeil ve Alibali, 2005). Buna karşılık, öğrenciler yeni problem çözme stratejileri

kullandıklarında, bu stratejilerin uygulanması için önemli olan ve temel kavramların anlaşılmasını desteklemeye yardımcı olan problemlerin özelliklerini kullanırlar (Alibali, Phillips ve Fischer, 2009; McNeil ve Alibali, 2004). Çok sayıda çalışma, çeşitli çözüm stratejileri hakkında bilgi sahibi olmanın, işlemselden çok kavramsal anlayışla ilişkili olduğunu göstermiştir (örneğin; Siegler, 1994; Baroody, 2003; Heinze, Star ve Verschaffel, 2009; Verschaffel, Greer ve De Corte, 2009; Schneider, Rittle-Johnson ve Star, 2011). Örneğin bir denklemin çözüm kümesini bulma sürecinde problem çözücü; bir dizi işlemsel bilgi ve özellikleri kullanarak işlemsel dönüşümler (payda eşitleme (PE), değişkenleri birleştirme (DB) vb.) gerçekleştirerek farklı adım sayısına sahip çözüm stratejileri geliştirebilir. Tablo 1’de cebirsel kesirli ifadeleri içeren örnek bir denklemin çözümleri yer almaktadır.

Tablo 1. Bir cebirsel kesirli denklemin üç farklı çözümünün karşılaştırılması

Cebirsel Kesirli Denklem	Çözüm 1	Dönüşümler	Çözüm 2	Dönüşümler	Çözüm 3	Dönüşümler
$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = x+6$	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} =$ $\frac{3(x+6)}{3}$	Paydaları eşitleme	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3(x+6)}{3}$	Paydaları eşitleme	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} =$ $\frac{3(x+6)}{3}$	Sabitler bölme
	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} =$ $\frac{3x+18}{3}$	Dağılıma Kesirlerde toplama işlemi	$\frac{3x+9}{3} + \frac{5x+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Dağılıma Kesirlerde toplama işlemi	$x+3 + \frac{5x+4}{3} =$ $x+6$	Benzer terimleri sadeleştirme
	$\frac{3x+5x+9+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Her iki tarafın payından 9 çıkarma	$\frac{3x+5x+9+4}{3} = \frac{3x+18}{3}$	Sabitleri Birleştirme (9+4)	$\frac{5x+4}{3} = 3$	Sabitleri birleştirme
	$\frac{3x+18-9}{3} = \frac{3x+9}{3}$	Her iki tarafın payından 4 çıkarma	$\frac{3x+18-13}{3} = \frac{3x+5}{3}$	Her iki tarafın payından 13 çıkarma	$5x+4 = 9$	İçler dışlar çarpımı
	$\frac{3x+5x+4}{3} = \frac{3x+9}{3}$	Her iki tarafın payından 3x çıkarma	$3(3x+5x) = 3(3x+5)$	İçler dışlar çarpımı	$5x = 5$	Bölme
	$\frac{3x+5x+4-4}{3} = \frac{3x+5}{3}$	Her iki tarafın payından 4 çıkarma	$9x+15x = 9x+15$	Dağılıma	$x=1$	(5 adım)
	$\frac{3x+5x-3x}{3} = \frac{3x+5-3x}{3}$	İçler dışlar çarpımı	$15x = 15$	Her iki tarafın payından 9x çıkarma	$x=1$	
	$\frac{5x}{3} = \frac{5}{3}$	Bölme	(11 adım)	İçler dışlar çarpımı		
	$15x = 15$			Bölme		
	$x=1$					
	(11 adım)					

Star (2001) İşlem esnekliği kapsamında gereksiz adımların işlemi uzattığını belirterek işlem esnekliğine sahip bireylerin gereksiz adım kullanmadıklarını vurgulamaktadır. Beş adımda gerçekleştirildiği için çözüm 3 bu çözümler arasında en ideal çözüm olarak nitelendirilebilir. Star’a (2001) göre işlem esnekliğine sahip problem çözümler farklı çözüm stratejilerini hızlı bir şekilde zihinlerinde canlandırabilir ya da işlem sürecinde bir stratejiyi diğeriyle hızlı bir şekilde değiştirebilirler. Bu durum rastgele bir davranış olmayıp hızlı ve bilinçli bir muhakemenin sonucudur. Örneğin Çözüm 1 ve çözüm 2’ye bakıldığında adım sayıları aynı ancak kullanılan dönüşümlerin sıralamaları farklıdır. Her ne kadar adım sayısı aynı olsa da çözüm (1)’de içler dışlar çarpımı son aşamada yapılırken, çözüm (2)’de 7. adımda yapılmıştır. Nitekim İşlem yoğunluğu açısından çözüm (1) daha verimli görünmektedir.

Peki, çoklu çözüm stratejisi yetisini bir birey nasıl kazanabilir? Bu araştırmada katılımcıların farklı çözüm stratejileri oluşturabilmeleri amacıyla *çözümlü örnekler* kullanılmıştır. Çözümlü örnekler ile öğrenme, anlamayı desteklemek için çözümden önce bir takım örnekler sağlamak anlamına gelir (Hilbert, Schworm ve Renkl, 2004). Çözümlü örnekler bilişsel yükü azaltarak öğrenmeyi geliştirir. Birey kendisine sunulan çözüm ile birkaç şemaya ulaştığında, başlangıçtaki bilişsel yük azalır. Beceri kazanımının başlangıcında çözümlü örneklerle beraber bireyin problem konusu ile ilgili kendi kendine açıklama isteği kullanıldığında artabilir ve öğrenme daha hızlı gerçekleşir (Mwangi ve Sweller, 1998; Paas, Renkl ve Sweller, 2003; Retnowati, Ayres ve Sweller, 2010; Van Loon-Hillen, Van Gog ve Brand-Gruwel, 2012). Ayrıca kişilerin *bilinçli tercihler yaparak* bu çözüm stratejilerinden birini diğeriye tercih edebilmeleri de işlem esnekliği açısından önemli olan bir diğer boyuttur (Star, 2001). Dönüşümler kullanılarak çok sayıda çözüm üretilebilir. Bu çözümlerin belirleyiciliğini, çeşitliliğini ve karmaşıklıklarını ise dönüşümlerin sıralamasında yapılan tercihler belirler. Durkin, Rittle-Johnson, Star

ve Loehr (2021) çoklu stratejileri karşılaştırma ve tartışmanın öğrencilerin cebri öğrenmelerini arttırdığını, bu nedenle öğretmenler tarafından da teşvik edilmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. İşlem esnekliğinin bir diğer önemli bileşeni ise problem çözme sürecinin herhangi bir aşamasında (başında, ortasında, sonunda) yapılabilen ve yaptıkları tercihlerinde bilinçli ve daha matematiksel gerekçeler sunmaları olarak tanımlanan *eleştirel değerlendirme* (Star, 2001).

Bu araştırmada hem işlemsel hem de kavramsal boyuta sahip olan, ayrıca ulusal ve uluslararası değerlendirmeler kapsamında yaygın öğrenci zorluklarına sahip olan cebir öğrenme alanı (National Center for Education Statistics, 2020) ele alınmıştır. Bu araştırma kapsamında cebirin alt öğrenme alanlarından cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler incelenmiştir. Bu alt öğrenme alanı cebir, denklem ve kesir kavramları hakkında bütünsel bir yaklaşımı ve muhakemeyi gerektiren bir alandır. Alanyazın ele alındığından bu alanda işlem esnekliğine dair herhangi bir çalışma bulunmamıştır. Bu araştırmada 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde toplama ve çıkarma işlemlerini gerçekleştirme süreçleri incelenmiştir.

1.3 Cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde kullanılan dönüşümler ve çözüm türleri

Denklemin çözüm kümesini bulma aşamasında kesir bilgisini gerektiren işlemsel bilgilerden (payda eşitleme (PE) gibi) yararlanıldığı gibi sabitle bölme (SBö), dağılma (D), değişkenleri birleştirme (DB), çarpanlara ayırma (ÇA), her iki tarafa değişken ekleme (DE) gibi dönüşümler de kullanılabilir. Bu dönüşümlerin kullanılıp kullanılmamasına ve kullanım sırasına göre üç çözüm türü oluşturulmuştur. Bunlar Standart Pratik Yöntem Öncesi, Standart Pratik Yöntem ve Yenilikçi Alternatif Çözümdür. Standart pratik yöntem cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemleri çözebilmek için genellikle kullanılan dönüşümleri ve dönüşüm sıralamalarını (paydaları eşitleme, dağılma, sabitleri ve benzer terimleri birleştirme, paydaları sadeleştirme, çarpanlara ayırma ve değişkenin katsayısı ile bölerek değişkeni izole etme) içeren çözümdür. Bu çözüm türleri hiyerarşik bir yapı içermektedir. Örneğin standart pratik yöntemle ulaşılan kadar problem çözücünün kullandığı gereksiz işlemi uzatan ya da çözümü zorlaştıran dönüşümlerin (paydalar aynı iken içler dışlar çarpımı yapma vb.) kullanıldığı çözümler standart pratik yöntem öncesi çözümlerdir. Standart pratik yöntem öncesi çözümlerde farklı gereksiz stratejiler bulunarak tabloya eklenebilir. En üst düzey yenilikçi alternatif çözümdür. Yenilikçi alternatif çözümler standart çözümdeki işlem sıralamasını farklılaştırarak ya da yeni dönüşümler (kesrin anlamı, benzer terimleri birleştirme vb.) kullanarak daha az adımlı, daha az işlem yoğunluğu içeren ya da probleme daha farklı yaklaşımlarla çözüm getiren çözüm türüdür (bkz Tablo 1). Bu yenilikçi yetenek kavramsal ve işlemsel çözümlerin çözümleri arasındaki belirleyici unsurdur. Bu araştırma kapsamında Star'ın (2001) birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler kapsamında tanımladığı yenilikçi çözüm stratejileri cebirsel kesirli ifadelerle ilişkilendirilerek yerini korumaktadır. Ancak "Kesrin anlamı" gibi yeni dönüşümlerde eklenmiştir.

Baroody, Feil ve Johnson (2007) işlemsel bilginin ilişkilerden arındırılmayacağını ifade etmiş ve nitelik açısından işlemsel bilginin daha kapsamlı bir şekilde incelenmesi gerektiğini belirterek, ilişkiyel açıdan zengin ve derin işlemsel bilgiyi kavramsal bilgiden ayırmanın mümkün olmadığını öne sürmüşlerdir. Star (2011) ise işlemsel bilginin kavramsal bilgi ile ilişkili olduğunu ve kavramsal bilgiyi geliştirebileceğini ifade etmiştir. Bu araştırmada cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde katılımcıların işlemsel bilgilerinin ve bu konudaki işlemsel bilgilerinin kavramsal bilgi ile olan ilişkisini inceleyebilmek için işlem esneklik durumlarını belirlemek ve geliştirmek amaçlanmaktadır. Bu amaçla şu sorulara cevap aranmıştır;

Katılımcıların cebirsel kesirli denklemlerde işlemsel esneklikleri nasıl gelişmektedir?

- Katılımcıların cebirsel kesirli denklemlerde uygulama öncesi işlem esneklikleri ne durumdadır?
- Katılımcıların işlem esnekliklerinin gelişimine etki eden faktörler nelerdir?

Bu çalışma işlemsel bilginin gelişimine yönelik alanyazındaki önemli bir eksikliği giderme yönünde yapılan çalışmalara katkıda bulunmayı hedeflemektedir. İşlem esnekliği üzerine yapılan araştırmalar

incelendiğinde genellikle birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler konusu kapsamında gerçekleştirildiği görülmektedir (Lewis, 1981, Star, 2001). Bu araştırmada cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler üzerinde çalışılmıştır. Araştırmalarda genellikle öğretmen adayları (Berk, Taber, Gorowara ve Poetzl, 2009), üniversite öğrencileri, uzman matematikçiler (Lewis, 1981) ya da ortaokul öğrencileri (Star, 2001) ele alınırken, bu araştırmada lise öğrencileri ile çalışılmıştır.

2. Yöntem

Araştırmanın modelini “öğretim deneyi”, bunu desteklemek için yapılan “klinik görüşmeler (İlk klinik görüşme, Son klinik görüşme ve Kalıcılık klinik görüşme)” ve “doküman incelemesi” oluşturmaktadır. Öğretim deneyi matematiksel bilginin oluşumunun nasıl gerçekleştiğini ve öğrenme üzerinde hangi değişkenlerin etkili olduğunu derinlemesine inceleyen, öğrenme-öğretme yollarına ilişkin varsayımlar ortaya koyan ve bu varsayımları test etmeyi içeren nitel bir araştırma yöntemidir (Steffe, 1991).

Bu araştırmada öğretim deneyi çözümlü örnekler üzerine kurulmuş ve varsayımlar bunun üzerine oluşturulmuştur. Klinik görüşmelerde katılımcılardan verilen sorulara sesli olarak çoklu çözüm geliştirmeleri istenmiş ve çözümleri arasından ideal olan çözümü nedenlerini açıklayarak seçmeleri beklenmiştir. Öğretim seanslarında ise farklı çözümler geliştirebilmelerini sağlamak amacı ile katılımcılara farklı çözüm stratejilerini amaçlayan (değişkenleri birleştirme, önce bölme gibi) çözümlü örnekler adım adım gösterilerek çözüm geliştirmeleri ve geliştirilen çözümü yorumlamaları istenmiştir. Klinik görüşmelere benzer şekilde öğretim seanslarında da yapılan çözümler arasından ideal olan çözümü nedenlerini açıklayarak seçmeleri beklenmiştir. Uygulamalar her bir katılımcı ile okul dışında halka açık bir ortamda farklılıklar gösterebilmekle birlikte yaklaşık 2’şer saat sürmüştür. Bütün uygulama süreci katılımcıların yüzü gözükmeyecek şekilde kamera kaydına alınmıştır.

2.1 Katılımcılar

Öncelikle katılımcılar ortaokul matematik öğretim programına göre 8. sınıfın ikinci döneminin son haftalarında cebirsel kesirli ifadeleri ve bu ifadeleri içeren denklemleri görmektedirler. Bu araştırmada uzun soluklu bir süreç planlandığı için 9. sınıf öğrencileri ile çalışmanın uygun olacağı düşünülmüştür. Araştırmada katılımcıların belirlenmesinde, derinlemesine çalışmayı olanaklı kıldığı için amaçlı örnekleme (Patton, 1997) yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Katılımcılar iki temel ölçüte göre belirlenmiştir. İlk ölçüt ön uygulama sorularının kesirlerde işlemleri içeren ilk bölümünden hata yapmamalarıdır. İkinci ölçüt ön uygulama sorularının cebirsel kesirli ifadelerde işlemleri içeren ikinci bölümündeki sorulara genellikle bir yolla cevap vermeleridir. Bu iki ölçütün olmasının nedeni öğretim seansları ile yapılması planlanan uygulamanın varsa sonuçlarını daha açık bir şekilde görebilmektir. Bu ölçütlerin yanı sıra katılımcıların öğretmenlerinden düşüncelerini açıkça ifade edebilen öğrencilerin belirlenmesine yönelik tavsiyeler de alınmıştır. Bu sürecin sonunda 4 öğrenci çalışmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir.

2.2 Veri analizi

İşlem esnekliğine dair elde edilen veriler (video kayıtları, alan notları ve uygulama kâğıtları) betimsel ve içerik çözümlemesine tabi tutulmuştur. İçerik çözümlemesi, verilerin kodlanması, temaların belirlenmesi, kod ve temaların organize edilmesi, bulguların tanımlanması ve yorumlanması olmak üzere dört aşamada gerçekleşmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu çalışmada elde edilen veriler 3 başlık altında analiz edilmiştir. Bunlar, cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair *çoklu çözüm stratejisine sahip olmak*, bu çözüm stratejileri arasında *bilinçli tercihlerde bulunmak* ve *tercih edilen çözümü uygulayabilmektir* (Star, 2005).

Katılımcıların *çoklu çözüm stratejisi bilgilerini* analiz etmek amacıyla katılımcılardan elde edilen veriler daha önce belirlenen standart pratik yöntem öncesi, standart pratik yöntem ve yenilikçi alternatif çözüm stratejileri şeklinde kodlanmıştır. Klinik görüşmelerde (ilk klinik görüşme, son klinik görüşme ve yaklaşık 3 ay sonra gerçekleştirilen kalıcılık klinik görüşme) kullanılan sorular aynı olmakla birlikte, 7 öğretim seansının ilk 2 seansı payı cebirsel paydası nümerik (PcPdn), sonraki 2 seansı payı nümerik

paydası cebirsel (PnPdc) ve son 3 seansı payı ve paydası cebirsel (PcPdc) kesirli ifadeleri içeren denklemler şekilde düzenlenmiştir. Ayrıca veriler haftalık olarak analiz edilmiş ve her öğretim seansında ortak sorular olmakla birlikte katılımcıların durumuna göre katılımcılara özgü farklı sorularda uygulanmıştır. Ancak analizler ortak sorular kapsamında gerçekleştirilmiştir. Çözümlü örnekler kullanılarak gerçekleştirilen çözümler ise ortak sorular kapsamında olsa dahi analize dâhil edilmemiştir. Analizlerde işlem hatası ayrıca ele alınmamış, daha çok çözüm adımları incelenmiştir.

Tablo 2. Çözüm stratejileri puanlama rubriği

Çözüm stratejisi	Puanlama
SPÖ	1
SP	2
1 YAÇ stratejisi kullanılan çözüm	3
Önce bölme	+1
Değişkenleri birleştirme	+1
Vb.	+1

*Standart Pratik Yöntem Öncesi (SPÖ), Standart Pratik Yöntem (SP) ve Yenilikçi Alternatif Çözüm (YAÇ)

Tablo 2’de belirtildiği şekilde puanlanarak her bir öğrenci ve her bir öğretim seansı için rubrikler hazırlanmıştır. Bu şekilde nitel veriler nicelleştirilmiş ve bu sayede güvenilirliği arttırmak, yanlışlığı azaltmak ve kategoriler arasında daha doğru karşılaştırmalar yapmak amaçlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Klinik görüşmeler ve her bir öğretim seansı için iki araştırmacı tarafından çoklu stratejiler kapsamında olası çözümler irdelenmiş ve puanlama rubriği oluşturulmuştur.

Tablo 3. Klinik görüşme çözüm puanlama rubriği

	1 Puan	2 Puan	3 Puan	4 Puan	5 Puan	6 Puan	7 Puan	Toplam	Çözüm Sayısı
Soru 1	X	X	X (ÖB) X (DÇ) X (KA)	-	-	-	-	12	5
Soru 2	X	X	X (KA) X (ÖB)	X (OP-DB) X (OP-KA)	X (OP-DB-ÖB)	-	-	26	8
Soru 3	X	X	X (DB) X (DÇ) X (ÖB)	X (DB-ÖB) X (DÇ-OP)	X (DÇ-OP-ÖB)	-	-	25	8
Soru 4	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB) X (DD-OP) X (DD-KA)	X (DD-OP-DB) X (DD-OP-KA)	X (DD-OP-DB-ÖB)	X (DD-OP-ÖB-DB-ÖB)	41	10
Soru 5	X	X	X (DB) X (DÇ)	X (DB-OP) X (DB-DÇ)	X (DB-OP-ÖB)	-	-	22	7
Soru 6	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB) X (OP-DÇ)	X (OP-ÖB-DB) X (OP-DÇ-DB)	-	-	25	7
Soru 7	X	X	X (OP)	X (OP-DD) X (OP-DÇ) X (OP-ÖB)	X (OP-DD-DB) X (OP-DD-DÇ) X (OP-DD-DS)	X (OP-DD-DB-ÖB) X (OP-DD-DB-KA)	-	37	11
Soru 8	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB)	X (OP-ÖB-DS)	-	-	15	5
Soru 9	X	X	X (OP)	X (OP-ÖB) X (DD-OP) X (DD-KA)	X (DD-OP-DB) X (DD-OP-KA)	X (DD-OP-DB-ÖB)	-	34	9
Toplam								237	70

*Payda Eşitleme (PE), Sabitle Bölme (SBö), Dağılma (D), Değişkenleri Birleştirme (DB), Çarpanlara Ayırma (ÇA), Der İki Tarafa Değişken Ekleme (DE), Değişkenle Çarpma (DÇ), Ortak Paranteze Alma (OP), Önce Bölme (ÖB), Kesrin Anlamı (KA), Değişkenleri Düzenleme (DD), Değişkenle Çarpma (DÇ)

Klinik görüşmelerde ve öğretim seanslarında soru sayıları (klinik görüşmede 9 soru, öğretim seanslarında genellikle 7 soru), olası çözümler ve çözüm puanları farklılık göstermektedir. Örneğin Tablo 3'te klinik görüşmeye dair puanlama rubriği yer almaktadır. Her bir klinik görüşmede ve öğretim seansında ortak olan bütün sorular için puanlama rubriği oluşturulmuş ve katılımcıların oluşturdukları toplam çözüm puanları çözüm sayısına bölünerek o seansa dair aldıkları puanlar belirlenmiştir. Olası çözümler ve puanları kapsamında katılımcıların değişimini takip edebilmek amacı ile her bir seans için temel düzey, orta düzey, üst düzey ve ileri düzey olmak üzere dört düzey ve farklı düzey aralıkları belirlenmiştir. Bu düzeyler Tablo 4'te belirtilen kriterlere göre oluşturulmuştur.

Tablo 4. İşlem esnekliği çoklu strateji bilgi düzeylerinin özellikleri

Alt sınır	Düzyey	Üst sınır
Çözüm yok	Temel Düzey	Sorulara sadece standart çözümler ya da standart çözümlerin yanı sıra yenilikçi alternatif çözümlerden daha fazla SPÖ çözümler geliştirme
Tüm sorulara standart çözümler yanı sıra en az 1 soruya yenilikçi alternatif çözüm geliştirme	Orta Düzey	Tüm sorulara standart çözümlerin yanı sıra en fazla 1'er tane yenilikçi alternatif çözüm geliştirme
Tüm sorulara standart çözümlerin yanı sıra 1'er taneden daha fazla yenilikçi alternatif çözüm geliştirmeye başlama	Üst Düzey	Tüm sorulara standart çözümler ve tüm sorulara olası bütün yenilikçi alternatif çözümleri geliştirme
Olası bütün yenilikçi alternatif çözümün yanı sıra standart çözümü terk etmeye başlama	İleri Düzey	Standart çözümü tamamen terk etme

Öğretim seanslarında ortak olan sorular iki uzman tarafından incelenmiş ve SPÖ, SP ve YAÇ stratejileri açısından olası bütün çözümler incelenerek puanlanmış ve çözüm sayısına bölünerek oransal aralıklar belirlenmiştir. Örneğin klinik görüşmede yer alan sorulara olası bütün çözümleri geliştiren bir katılımcı 237 puan/ 70 çözüm= 3,38 puan almakta ve Tablo 5'e göre klinik görüşmede üst düzey işlem esnekliği puan aralığında bulunmaktadır. Bu sayede kod ve temaların organize edilmesi ve bu düzeyler kapsamında bulguların analizi ve yorumlanması sağlanmıştır.

Tablo 5. İşlem esnekliği düzeyleri ve aralıkları

	Temel düzey	Orta düzey	Üst düzey	İleri düzey
Klinik görüşme	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 - 3,73	3,74- 4,03 ve üstü
Öğretim seansı1	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51– 3,14	3,15- 3,42 ve üstü
Öğretim seansı2	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51– 3,82	3,83- 4,13 ve üstü
Öğretim seansı3	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51– 4,06	4,07- 4,34 ve üstü
Öğretim seansı4	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 - 3,17	3,18- 3,43 ve üstü
Öğretim seansı5	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 – 3,69	3,10- 4,00 ve üstü
Öğretim seansı6	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 – 3,18	3,19- 3,52 ve üstü
Öğretim seansı7	0 – 2,00	2,01 - 2,50	2,51 – 3,68	3,69- 4,04 ve üstü

Çözüm stratejilerine dair öğrencilerin yaptıkları çözümler arasından en iyi olanı nedenleri ile beraber açıklayarak seçmeleri istenmiştir. Bu seçimleri *bilinçli tercihte bulunma durumları ile nitelendirilmiş ve elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir*. Katılımcıların tercihleri kodlanmış ve bu kapsamda çeşitli temalara ulaşılmıştır. Daha sonra veriler düzenlenmiş, temalara göre gruplanmış ve uygun olduğu durumlarda veriler sayısal hale getirilerek sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Klinik görüşmelerde öğrenci çözümlerine dair araştırmacı tarafından bir müdahalede bulunulmazken, öğretim seanslarında katılımcılara çözüm geliştiremedikleri durumlarda yenilikçi alternatif stratejiler

barındıran çözümler adım adım gösterilerek çözümü devam ettirmeleri istenmiştir. Bu durum *tercih ettiği çözümü uygulayabilme* olarak nitelendirilmiş ve analizinde içerik analizi kullanılmış ve bu kapsamda çözümlü örnekler ele alınmış ve katılımcıların uygulayabilme durumları gösterilen çözüm sayısı ve çözümün niteliği (gösterilen adım sayısı) incelenerek kodlanmıştır. Uygun olduğu durumlarda veriler sayısal hale getirilerek sunulmuştur. Son olarak, elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

3. Bulgular

Bu bölümde katılımcıların cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair işlem esneklik durumlarının öğretim seansları öncesinde (İlk klinik görüşme), 7 seanstan oluşan ve farklı strateji kullanımlarını amaçlayan öğretim seansları boyunca, öğretim seansları sonunda (Son klinik görüşme) ve yaklaşık 3 ay sonra (Kalıcılık klinik görüşme) ne düzeyde olduklarına dair bulgular yer almaktadır.

Bütün uygulamalardan elde edilen veriler, cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere dair çoklu strateji bilgisi, bu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunmak ve tercih edilen çözümü uygulayabilmek şeklinde 3 tema altında analiz edilmiştir (Star, 2005).

3.1 Çoklu strateji bilgisi

Çoklu strateji bilgileri belirlenen kriterler dahilinde temel düzey, orta düzey, üst düzey ve ileri düzey (bkz. Tablo 4 ve Tablo 5) olmak üzere dört kategori kapsamında ele alınmıştır. İlk klinik görüşmede üç katılımcının temel düzeyde bir katılımcının orta düzeyde olduğu belirlenmiştir.

Tablo 6. İlk klinik görüşmede katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeyleri ve çözüm sayısı, türü ve tercih edilen çözüm frekansları

	Çoklu strateji bilgi düzeyi	Çözüm sayısı	Çözüm türü	Çözüm tercihi
Ayşegül	1,63	11	7 SP 4 SPÖ	7 SP
Berna	1,75	8	7 SP 1 SPÖ	1 SPÖ 7 SP
Erdem	1,76	13	7 SP 5 SPÖ 1 YAÇ	5 SPÖ 2 SP 1 YAÇ
Serkan	2,20	14	8 SP 3 SPÖ 3 YAÇ	2 SPÖ 4 SP 3 YAÇ

*Standart Pratik Yöntem Öncesi (SPÖ), Standart Pratik Yöntem (SP) ve Yenilikçi Alternatif Çözüm (YAÇ)

İlk klinik görüşmede bazı çözümler hiçbir kategoriye girmediği için değerlendirmeye alınmamıştır. Katılımcıların ağırlıklı olarak standart Pratik yöntem içeren çözüm yapmakla birlikte standart Pratik yöntem öncesi çözümleride yoğun bir şekilde uyguladıkları görülmüştür. İki katılımcının ise yenilikçi alternatif çözüm uygulayabildikleri belirlenmiştir.

Ayşegül, İlk klinik görüşme, SPÖ

Berna, İlk klinik görüşme, SP

Erdem, İlk klinik görüşme, YAÇ

Şekil 2. Ayşegül, Berna ve Erdem'e ait çözüm örnekleri

Örneğin şekil 2'de Ayşegül eşitliğin sağ tarafındaki sayının paydasını da eşitleyerek gereksiz bir strateji kullanmış ve standart pratik yöntem öncesi çözüm gerçekleştirmiştir. Berna ise paydaları eşitlemeye çalışmış ancak ikinci dereceden denklem geldiği için çözümünü tamamlayamamıştır. Erdem ise çözümünde ortak paranteze alma ($x+3$ ortak parantezine almıştır.) ve değişkenle çarpma (eşitliğin her iki tarafını $x+3$ ile çarpmıştır.) stratejisini kullanarak yenilikçi alternatif çözüm gerçekleştirmiştir. Ancak ağırlıklı olarak standart pratik yöntem ve standart pratik yöntem öncesi çözüm geliştirmiş ve işlem esneklik düzeyi temel düzey olarak belirlenmiştir. Serkan 2 soruda paydası benzer ifadeleri birleştirerek çözümünü tamamlamış, 2 soruda ise ortak paranteze alarak önce bölme stratejisini uygulamıştır. Genellikle standart pratik yöntemi kullandığı için ise orta düzeye geçebilmiştir.

Öğretim seanslarında ise oranlar arasında farklılık olmakla birlikte Ayşegül, Berna ve Erdem ilk öğretim seansı ile beraber temel düzeyden orta düzeye geçmişlerdir. Temel düzeyden orta düzeye, orta düzeyden üst düzeye çıkmaları için birer seans yeterli olurken, üst düzeyden ileri düzeye çıkmak için 3 seans gerekli olmuştur. Ancak son üç seansta ileri düzeyde kalmaya devam etmişlerdir. İlk klinik görüşmede orta düzeyde olan Serkan ise üst düzey ve ileri düzey arasında geçişler yaşamış ancak öğretim seanslarını ileri düzeyde tamamlamıştır.

Tablo 6. Katılımcıların çoklu strateji bilgilerinin düzeylere göre değişimi

	Öğretim seansı1	Öğretim seansı2	Öğretim seansı3	Öğretim seansı4	Öğretim seansı5	Öğretim seansı6	Öğretim seansı7
Temel düzey	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00	0-2,00
Orta düzey	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50	2,01-2,50
Üst düzey	2,51-3,14	2,51-3,82	2,51-4,06	2,51-3,17	2,51-3,69	2,51-3,18	2,51-3,68
İleri düzey	3,15-3,42 ve üzeri	3,83-4,13 ve üzeri	4,07-4,37 ve üzeri	3,18-3,43 ve üzeri	3,70-4,00 ve üzeri	3,19-3,52 ve üzeri	3,69-4,04 ve üzeri
Ayşegül	2,46	3,80	3,50	2,51	4,00	3,62	4,33
Berna	2,10	3,75	4,00	2,62	4,00	3,57	4,62
Erdem	2,09	2,76	3,20	2,88	3,83	3,71	4,66
Serkan	2,69	4,00	3,92	2,63	4,00	3,00	3,80

Payı cebirsel paydası nümerik cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerden, payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere geçişin olduğu öğretim seansı 4'te ve payı nümerik paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerden payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlere geçişin olduğu öğretim seansı 6'da katılımcıların çoklu strateji bilgi puanlarında düşüş olmuştur.

Katılımcıların düzeyler arasındaki geçişini desteklemek amacıyla çözümlü örnekler kullanılmıştır. Örneğin değişkenleri birleştirme stratejisi Berna örneğinde incelediğinde, Berna'nın değişkenleri birleştirme stratejisini kullanabileceği durumlara dair bir farkındalık kazanmış olduğu, ancak uygulamada problem yaşadığı söylenebilir. Araştırmacı-öğretmen tarafından ilk düşündüğü çözüm yeniden irdelenmiş, ancak katılımcı değişkenleri birleştirme stratejisini uygulayamamıştır. Ardından değişkenleri birleştirme stratejisinin kullanıldığı çözümün başlangıcı gösterilmiş ve nasıl ilerleyebileceği sorulmuştur. Devamında çözümü tamamlayabilmiştir.

$$\frac{2x-3}{5} + \frac{(x+1)}{10} = \frac{3(x+1)}{10}$$

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{3(x+1)}{10} - \frac{(x+1)}{10}$$

Gösterilen Çözüm

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{3(x+1)}{10} - \frac{(x+1)}{10}$$

$$\frac{2x-3}{5} = \frac{2(x+1)}{10}$$

$$4x-6 = 2x+2$$

$$4x-2x = 2+6$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Yapılan Çözüm

$$\frac{2(x-3)}{5} + \frac{4(x+1)}{10} = \frac{4(x+1)}{10}$$

$$\frac{2(x-3)}{5} = \frac{4(x+1)}{10} - \frac{4(x+1)}{10}$$

$$\frac{2(x-3)}{5} = 0$$

$$2(x-3) = 0$$

$$2x-6 = 0$$

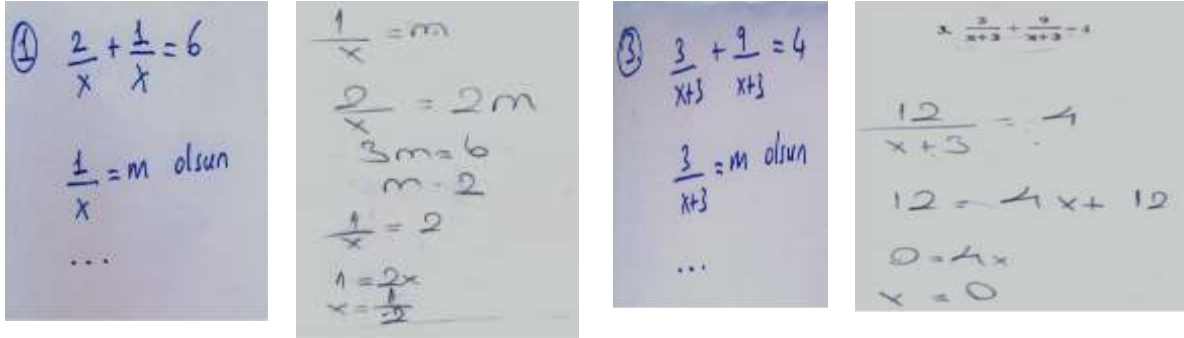
$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Diğer soruda yapılan çözüm

Şekil 3. Berna, Öğretim seansı 1

Benzer şekilde Erdem daha önceki öğretim seanslarında kesrin anlamı stratejisini uygulayamamış ve bütün sorularda araştırmacı-öğretmenin müdahalesi olmuştur. Nitekim öğretim seansı 4'te de benzer bir durum söz konusudur. 1 soruda bu çözümü yapamazken 2 soruda ise çözümlerin ilk adımlarını inceledikten sonra devamını getirebilmiştir.



Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Gösterilen Çözüm

Yapılan Çözüm

Şekil 4. Erdem, Öğretim seansı 4

Öğretim seanslarının bitiminden yaklaşık 1 hafta sonra gerçekleştirilen son klinik görüşmede Berna'nın ileri düzeyde olduğu, Ayşegül ileri düzeye yakın olmakla birlikte üst düzeyde kalmıştır. Erdem ve Serkan'ın ise üst düzeyde olduğu belirlenmiştir.

Tablo 7. Katılımcıların son klinik görüşmedeki çoklu strateji bilgisi durumları

			Düzye	Çözüm sayısı	Doğru-Yanlış-Eksik-Boş
Son Klinik Görüşme	Ayşegül Berna Erdem Serkan		3,70	27	27 D
			3,76	20	20 D
			3,00	26	26 D
			3,19	26	26 D
Kalıcılık Klinik Görüşme	Ayşegül Berna Erdem Serkan		3,65	24	24 D
			3,54	22	22 D
			3,16	24	24 D
			3,31	29	29 D

3 ay sonra gerçekleştirilen kalıcılık klinik görüşmede ise bütün katılımcıların üst düzeyde olduğu belirlenmiştir. Yani yenilikçi alternatif çözümlerin yanı sıra standart pratik yöntem içeren çözümlerde yerini korumaktadır.

3.2 Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumları

Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma durumlarını belirlemek amacı ile uygulama esnasında hangi çözümü tercih ettikleri ve nedeni sorulmuş, aynı zamanda tercihleri belirlenmiştir. Çözümler standart pratik yöntem öncesi, standart pratik yöntem ve yenilikçi alternatif çözüm şeklinde kategorilendirilmiştir. Katılımcıların tercih nedenleri ise kişisel nedenler (KN), öğretimsel nedenler (ÖN) ve matematiksel nedenler (MN) olmak üzere kategorilere ayrılmıştır.

Kişisel nedenler, sevmek sevmemek, istemek istememek gibi kişinin daha çok kendisine atfettiği nedenler olarak belirlenmiştir. Öğretimsel nedenler ise öğretmenimiz böyle gösterdi, aşına olduğum çözüm gibi kişinin daha çok eğitimi ile ilgili nedenleri kapsamaktadır. Matematiksel nedenler çözümün matematiksel olarak irdelenmesine dayalı oluşan daha kısa, daha kolay, daha az işlem yoğunluğu var, işlem hatası yapmadım gibi söylemlere dayalı olan nedenlerdir.

İlk klinik görüşmede katılımcılar genellikle her bir soruya tek çözüm geliştirmekle birlikte çoklu çözüm yaptıkları sorularda mevcuttur. Örneğin Berna çözebildiği soruları tek yolla çözebilmiştir. Çoklu çözüm gerçekleştirebilen katılımcıların çözümleri arasındaki tercihleri incelendiğinde genel olarak standart pratik yöntem içeren çözümleri, standart pratik yöntem öncesi çözümlere, yenilikçi alternatif

çözümleri standart pratik yöntem içeren çözümlere tercih ettikleri görülmüştür. Tercih nedenleri daha matematiksel nedenler (%70,83) olmakla birlikte öğretimsel nedenlerde (%29,16) mevcuttur.

Ayşegül ise standart pratik yöntem içeren çözümleri tercih etmiş, tercih sebebini daha az işlem gerektirmesi (Matematiksel Neden) şeklinde belirtmiştir. Erdem tercihlerinde standart pratik yöntem öncesi çözümün sürekli kullandığı çözüm olmasını gerekçe göstererek (Öğretimsel Nedenler) standart pratik yöntem içeren çözümlere tercih etmiştir. Serkan ise yenilikçi alternatif çözümleri daha pratik (Matematiksel Neden) olarak ifade ederek genellikle bu çözümleri tercih etmiştir.

Öğretim seanslarında genel olarak yenilikçi alternatif çözümlerin kullanıldığı çözümlerin standart pratik yöntem öncesi ve standart pratik yöntem içeren çözümlere göre katılımcılar tarafından çok daha yüksek sayıda tercih edildiği belirlenmiştir. Özellikle standart pratik yöntem içere çözümler tercih edilebilirliğini korumakla birlikte yenilikçi alternatif çözümler uygulama sonlarına doğru ön plana çıkmıştır.

Tablo 8. Berna'nın öğretim seanslarındaki çoklu stratejisi bilgisi ve tercihleri

	Öğretim seansı1	Öğretim seansı2	Öğretim seansı3	Öğretim seansı4	Öğretim seansı5	Öğretim seansı6	Öğretim seansı7
Çoklu strateji bilgisi	2,10	3,75	4,00	2,62	4,00	3,57	4,62
Tercihler	3 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	5 YAÇ	1 SP, 5 YAÇ	6 YAÇ
Tercih nedeni	7 MN 1 ÖN	6 MN	6 MN	6 MN	5 MN	6 MN	6 MN

*Matematiksel neden (MN), kişisel neden (KN), Öğretimsel Neden (ÖN), Standart Pratik Yöntem (SP), Yenilikçi Alternatif Çözüm (YAÇ)

Örneğin Berna'nın standart pratik yöntemi kullandığı çözümleri en çok tercih ettiği seans ilk öğretim seansıdır. Öğretim seansı 1'de 7 soru bulunmaktadır. Berna yenilikçi alternatif çözüm geliştirebildiği sorularda tercihi bu yönde olmuş, geliştiremediği sorularda ise çözümü tamamlayabildiği için standart pratik yöntemi uyguladığı çözümleri tercih etmiştir. Üst düzeye çıktığı öğretim seansı 2'de bütün sorularda yenilikçi alternatif çözüm stratejisini uygulayabildiği çözümleri tercih etmiştir. İleri düzeyde olduğu öğretim seansı 3'te ise 1 soruda standart pratik yöntem stratejisini uyguladığı çözümü tercih etmiştir.

Berna'nın genel olarak bilinçli tercihlerde bulunduğu belirlenmiştir. Genellikle yenilikçi alternatif çözümleri tercih etmekle birlikte, bazı sorularda uzun adımlı, işlem yoğunluğu olan yenilikçi alternatif çözümleri kullanarak çözüm geliştirebilmesine rağmen kısa adımlı standart pratik yöntem stratejisini kullandığı çözümleri tercih etmiştir.

İlk çözüm

İkinci çözüm

"İm... şu an bana bu (ikinci çözüm) daha basit geldi... Çünkü işlem az." (Matematiksel Neden)

Berna'nın Yorumu

Şekil 5. Berna, Öğretim seansı 3

Bu durum katılımcının daha az işlem ve işlem yoğunluğu içeren etkili çözümü fark edebildiğine ve işlem esneklik düzeyinin geliştiğine bir işarettir. Tercih nedeni olarak ise işlem azlığını belirtmiştir. İkinci çözüm daha az adım sayısı içermektedir. Sayılar çok yüksek olmadığı için adım sayısının az olması çözümün daha hızlı yapılabilmesini sağlamıştır.

Öğretim seanslarında katılımcıların tercih nedenleri daha çok matematiksel olmakla birlikte öğretimsel nedenler diğer en çok kullanılan neden olmuştur (Matematiksel Neden (%87,19), Öğretimsel Neden (%12,19), Kişisel Neden (%0,60)). Öğretim seansları ilerledikçe matematiksel nedenler daha çok

gözlemlenmiştir. Örneğin Berna sadece öğretim seansı1’de öğretimsel bir neden sunmuştur. Diğer tercih nedenleri matematiksel olarak belirlenmiştir (bkz. Tablo 8).

Son klinik görüşmede katılımcılar genel olarak yenilikçi alternatif stratejileri kullanarak yaptıkları çözümleri standart pratik yöntem öncesi ya da standart pratik yöntemlere tercih etmişlerdir. Tercih sebeplerinin ise tamamının matematiksel olduğu görülmüştür. Örneğin çoklu strateji bilgisi açısından ileri düzeye yakın üst düzeyde olan Ayşegül 9 soruya 7 standart pratik yöntem içeren ve 20 yenilikçi alternatif çözüm olmak üzere 27 çözüm gerçekleştirmiştir. Yenilikçi alternatif çözümleri tercih etmiş ve tercih sebeplerini daha kısa olması ve işlem hatası yapma olasılığının daha düşük olması şeklinde belirtmiştir.

Kalıcılık klinik görüşmede çözümleri çoklu strateji bilgisi açısından üst düzeyde olan katılımcılardan Ayşegül, Berna ve Serkan 9 soruya standart pratik yöntem öncesi içeren, standart pratik yöntem içeren ve yenilikçi alternatif çözümler geliştirebilmiş ve kararlı bir tutum sergileyerek her bir soru için 1 yenilikçi alternatif çözümü tercih etmişlerdir. Erdem ise 9 soruya 3 standart pratik yöntem öncesi, 7 standart pratik yöntem ve 14 yenilikçi alternatif çözüm olmak üzere 24 çözüm gerçekleştirmiştir. Daha çok yenilikçi alternatif çözümleri tercih etmekle birlikte standart pratik yöntem öncesi ve standart pratik yöntem içeren çözümlerde tercihleri arasındadır. Tercih ettikleri çözümleri daha kısa ve güzel olarak nitelendirerek matematiksel nedenler sunmuşlardır.

3.3 Katılımcıların çoklu stratejiler arasında bilinçli tercihlerde bulunma ve bu tercihlerini uygulayabilme durumlarının değişim süreci

Bu araştırma kapsamında ilk klinik görüşme, öğretim seansları, son klinik görüşme ve kalıcılık klinik görüşme uygulanmıştır. Klinik görüşmelerde uygulama anlamında araştırmacı-öğretmen’in herhangi bir müdahalesi bulunmamaktadır. Ancak içeriği ve amaçları farklı olan 7 öğretim seansında katılımcıların yenilikçi stratejileri fark etmeleri, anlamaları ve uygulayabilmeleri amacıyla çözümlü örnekler kullanılmıştır. Kullanılan çözümlü örneklerin nicelik ve niteliklerinin belirlenmesi amacıyla katılımcılara gösterilen çözüm sayıları ve çözümlerin adımları (başlangıç adımı (BA), ikinci adım (İA), üçüncü adım (ÜA) ve tamamı (TM)) belirlenmiştir.

Tablo 9. Gösterilen çözüm sayısı ve niteliği

	Öğretim seansı 1	Öğretim seansı 2	Öğretim seansı 3	Öğretim seansı 4	Öğretim seansı 5	Öğretim seansı 6	Öğretim seansı 7	Toplam
Ayşegül	3 BA	1 BA 1 İA	2 İA	3 BA 1 İA	1 BA 1 ÜA 1 TM	0	1 İA	8 BA 5 İA 1 ÜA 1 TM
Toplam Berna	3 BA 3 TM	1 BA 1 İA 1 TM	2 BA 1 İA 1 ÜA	3 BA	1 BA 1 İA 1 TM	1 İA 1 TM	0	10 BA 4 İA 1 ÜA 6 TM
Toplam Erdem	2 BA 1 TM	1 TM	2 BA 3 İA	2 BA	1 BA 1 İA 1 TM	1 BA 1 İA	3 BA 1 TM	11 BA 5 İA 4 TM
Toplam Serkan	1 BA	0	0	1 BA	1 BA 2 İA 1 TM	1 ÜA	1 TM	3 BA 2 İA 1 ÜA 2 TM
Toplam Genel	9 BA 4 TM	2 BA 2 İA 2 TM	4 BA 6 İA 1 ÜA	9 BA 1 İA	4 BA 4 İA 1 ÜA 4 TM	1 BA 2 İA 1 ÜA 1 TM	3 BA 1 İA 2 TM	32 BA 16 İA 3 ÜA 13 M
	13	6	11	10	13	5	6	64

*Başlangıç Adımı (BA), İkinci Adım (İA), Üçüncü Adım (ÜA), Tamamı (TM)

Katılımcıların çözüm inceleme durumları arasında düzenli bir artış ya da azalış görülmezken, bu durumun daha çok öğretim seanslarında hangi kesir türünün yer aldığı ya da katılımcıların çözüm stratejilerini ne kadar bildikleri ve farklı kesir türünü içeren denklemlere ne kadar aktarabildikleri ile ilgili olduğu görülmüştür.

Genel olarak bakıldığında, Serkan en az sayıda çözüm inceleme ihtiyacı duyan katılımcı olmuştur. İncelediği çözümlerin yarısını payı ve paydası cebirsel kesir türüne geçişin olduğu öğretim seansı 5'te incelemiştir. Erdem de benzer şekilde payı nümerik, paydası cebirsel ifadelerle geçiş içeren öğretim seansı 3'te en fazla çözüm inceleme gereği duymuştur. Bu durumun katılımcıların bildikleri stratejileri yeni kesir türüne aktarmada zorluk yaşamaları ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Berna ise en çok çözüm inceleme ihtiyacı duyan katılımcı olmuştur. En fazla payı cebirsel paydası nümerik kesirleri içeren öğretim seansı 1'de çözüm incelemiştir. Bu durumun Berna'nın strateji bilgisinin azlığı ile ilgili olabileceği düşünülmektedir. Ayşegül en fazla öğretim seansı 4 (Payı cebirsel, paydası nümerik) ve 5'te (Payı ve paydası cebirsel) çözüm incelemiştir.

Öğretim seansı 5 (Payı ve paydası cebirsel), katılımcılar tarafından en çok çözüm inceleme ihtiyacı duyulan, öğretim seansı 6 (Payı ve paydası cebirsel) ise katılımcılar tarafından en az çözüm inceleme ihtiyacı duyulan öğretim seansı olmuştur. Bu durum katılımcıların çözüm stratejilerini bu kesir türünde uygulamayı bu kesir türünü içeren ilk seansla birlikte öğrendikleri ve bu konudaki geçmiş deneyimlerini son seanslara hızlı bir şekilde aktarabildikleri şeklinde yorumlanabilir.

Gösterilen çözümlerin nitelikleri ise adım sayısına bağlı olarak değişmektedir. Katılımcılar genellikle çözümün ilk adımını ya da ikinci adımını gördükten sonra devamını getirebilmişlerdir. Katılımcılar 64 çözümden sadece 13 çözümün tamamını görme ihtiyacı duymuşlardır. En çok çözümün tamamını (6 çözüm) görmek isteyen katılımcı Berna iken, en az çözümün tamamını (1 çözüm) görmek isteyen katılımcı Ayşegül olmuştur. Katılımcılar genellikle başlangıç adımını gördükten sonra çözümün tamamını yapabilmekle birlikte Erdem'in %50 ile en çok ilk adımı gördükten sonra çözümü gerçekleştirebilen katılımcı olduğu görülmüştür. Ayşegül ise %33,33'lük oran ile ikinci adımı gördükten sonra en çok çözümünü tamamlayabilen katılımcı olmuştur.

4. Sonuç ve Tartışma

Bu araştırmada 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerdeki işlem esnekliklerinin değişimi ve gelişimi incelenmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar çoklu strateji bilgisi, bilinçli bir şekilde çözümü tercih etme ve tercih edilen çözümü uygulayabilme şeklinde üç bileşen altında belirtilmiş ve tartışılmıştır.

Araştırmanın sonuçlarından ilki süreç ilerledikçe katılımcıların denklemleri ilk seanslara oranla daha doğru çözmeleridir. Son klinik görüşmeden yaklaşık 3 ay sonra gerçekleştirilen kalıcılık klinik görüşmede de, bütün katılımcılar verilen denklemleri doğru çözmüşlerdir. Başlangıçta sahip oldukları karmaşalar kalıcılık klinik görüşmede bulunmamaktadır. Benzer şekilde Lynch ve Star (2014) birden fazla strateji geliştirmeye yönelik akademik olarak iyi olan 6 öğrenci ile görüşme yapmışlar ve öğrencilerin çoklu stratejileri öğrenme uygulamasını nasıl gördüklerini araştırmışlardır. Araştırma sonucunda çoklu strateji geliştirmenin öğrencilerin denklem çözümünde karşılaştıkları karmaşaları azalttığını ve çoklu strateji ile birlikte eğitimi tercih ettikleri belirlenmiştir.

Araştırmanın sonucunda katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeylerinde olumlu yönde değişim olmuştur. Katılımcıların çoklu strateji bilgi düzeylerini geliştirmek amacıyla çözümlü örnekler kullanılmış ve çözümlü örneklerin farklı stratejilerin tanıtılmasında ve uygulanmasında etkili olduğu görülmüştür. Alan yazındaki birçok çalışma da çözümlü örneklerin öğrenmeye pozitif etkisi olduğu sonucunu desteklemektedir (Sweller, van Merriënboer ve Paas, 1998; Mwangi ve Sweller 1998; Hattie, 2009; Retnowati, Ayres ve Sweller, 2010; van Loon-Hillen, van Gog ve Brand-Gruwel, 2012; Renkl, 2014). Örneğin Mwangi ve Sweller (1998) dokuz yaşındaki öğrencilere iki aşamalı aritmetik kelime problemlerini çözmeleri için çözümlü örnekler kullanmışlardır. Deney grubu ve kontrol grubu benzer

seviyelerde olmasına rağmen, çözümlü örneklerin uygulandığı öğrencileri olumlu etkilediği tespit edilmiştir.

Araştırmadan elde edilen diğer bir sonuç katılımcıların çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmalarının işlem esnekliklerini olumlu yönde etkilediğidir. Bu durumun onlara hem çözüm stratejilerinin hem de çözüm adımlarının sıralanmasının çözüme etkisine dair daha çabuk bir farkındalık kazandırdığı ve bu sayede işlem esnekliklerini geliştirdiği düşünülmektedir. Nitekim araştırmamızın sonlarına doğru katılımcıların tercih nedenleri kişisel ya da öğretimsel nedenlerden ziyade daha matematiksel hale gelirken, işlem esneklikleri de olumlu yönde gelişmiştir. Silver vd., (2005) de çoklu stratejilerin tartışılmasının ve karşılaştırılmasının, öğrencilerin belirli bir çözüm stratejisi veya çözüm adımının neden kabul edilebilir olduğunu haklı çıkarmalarına ve belirli sorular için neden bazı stratejilerin daha verimli olduğunu anlamalarına yardımcı olduğunu ifade etmişlerdir. Öğretim seanslarının ilerlemesi ile beraber tercihler yenilikçi alternatif çözümlerin kullanıldığı çözümlere yönelmiştir. Özellikle payı nümerik, paydası cebirsel ya da payı ve paydası cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde bu tercih daha ön plana çıkmıştır. Çünkü cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemlerde paydanın cebirsel olması ve kesirli ifadelerin toplama ve çıkarma işlemi gerçekleştirilirken cebirsel olan paydaların eşitlenmesinde yenilikçi alternatif çözümlerin daha etkili olduğu görülmüştür.

Alanyazında bir alanda önceden bilgiye sahip olan bazı öğrencilerin prosedürleri karşılaştırdıklarında daha fazla esneklik geliştirdiklerini gösteren güçlü deneysel kanıtlar vardır. Ancak yeni başlayan öğrenciler için bu konu henüz açık değildir (Rittle-Johnson ve Star, 2007, 2009; Star ve Rittle-Johnson, 2009). Bu araştırmada katılımcılar bu görevle ilk defa karşılaşmaktadırlar ve katılımcıların çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmalarının işlem esnekliklerini olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Rittle-Johnson, Star ve Durkin (2012) farklı iki okuldan sekizinci sınıf öğrencileri ile işlem esnekliği üzerine deneysel bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Elde edilen sonuçlara göre 1 aylık test uygulamalarında hemen işlemleri karşılaştıranların karşılaştırmayanlara göre daha esnek oldukları belirlenmiştir. Sonuç olarak karşılaştırmamızın yeni başlayanlarda esnekliği destekleyebileceğini ve çoklu prosedürlerin erken başlamasına önemli bir sebep olabileceğini belirtmişlerdir.

Katılımcılara karşılaştırmaları istenen çözümler bütün çözümleri bir arada görebilmeleri ve hatırlama çabası içerisine girmemeleri amacıyla yan yana sunulmuş ve nitekim karşılaştırdıkları ve tercih ettikleri stratejileri hem yeni denklemlere hem de farklı kesir türünü içeren denklemlere uygulayabilmişlerdir. Rittle-Johnson ve Star'da (2007) karşılaştırılmalı çözüm stratejilerinin öğrencilere yan yana sunulmasının yararlı olduğunu, bunun çözüm stratejilerinin daha doğrudan karşılaştırılmasını sağladığını ve stratejiler arasındaki benzerliklerin ve farklılıkların tanımlanmasını kolaylaştırdığını belirtmişlerdir.

Elde edilen önemli bir diğer sonuç ise katılımcıların seanslar ilerledikçe tercih ettikleri çözümleri daha iyi uygulayabilmeleri, bu çözüm stratejilerini farklı kesir türlerine aktarabilmeleri ve ilk seanslara oranla çok daha az çözümlü örnek görme ihtiyacı hissetmeleri olmuştur. Retnowati, Ayres ve Sweller, 2010, 12 yaşındaki öğrencilere geometrik teoremleri problemlerine nasıl uygulayacaklarını öğretmek için kitaplarda yazılan örnekleri kullanmışlar ve çözümlü örneklerin; bilgiyi hem edinmede hem de transfer etmede etkili olduğunu belirlenmiştir.

Bu araştırma, klinik görüşme, öğretim deneyi yöntemi ve çözümlü örnekler kullanılarak katılımcıların denklemlerde işlem esnekliklerinin gelişiminde etkili olan faktörlerin belirlenmesi ile sınırlıdır. Ayrıca 9. sınıf öğrencileri ve cebirsel kesirli ifadeleri içeren denklemler ile sınırlıdır. Benzer çalışmalar bu araştırmanın yöntemi ve süresi (7 öğretim seansı) baz alınarak gerçekleştirilebilir. Araştırmada çözümlü örneklerin katılımcıların çoklu strateji bilgilerini olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Başka matematik konularında da çözümlü örnekler benzer şekilde uygulanabilir ve çoklu strateji bilgisine olan etkisi araştırılabilir. Bu kapsamda farklı sınıf düzeyindeki katılımcılar ile benzer çalışmalar gerçekleştirilebilir. Ayrıca öğretmenlerin ve öğrencilerin işlem esnekliğini geliştirebilmek amacıyla ders programlarında ve ders kitaplarında çoklu çözüm stratejilerine ve çözümler arasında bilinçli tercihlerde

bulunma durumlarına dair nasıl öğelerin bulunması gerektiği incelenebilir. Sonuç yerine farklı çözümleri ve bu çözümler arasında bilinçli tercihlerde bulunmayı vurgulayan sınavların tasarlanması, uygulanması, ölçülmesi ve başarıya etkisi şeklinde uzun vadeli bir araştırma gerçekleştirilebilir.

Kaynakça

- Alibali, M. W., Phillips, K. M. O., & Fischer, A. D. (2009). Learning new problem solving strategies leads to changes in problem representation. *Cognitive Development, 24*, 89–101. doi:10.1016/j.cogdev.2008.12.005
- Baroody, A. J. (2003). *The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge*. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 1–33). Mahwah, NJ: Erlbaum
- Baroody, A. J., Feil, Y., and Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 115–131.
- Beilock, S. L., & DeCaro, M. S. (2007). From poor performance to success under stress: Working memory, strategy selection, and mathematical problem solving under pressure. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 33*, 983–998.
- Berk, D., Taber, S., Gorowara, C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 113–135.
- Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93*, 627–638.
- Carpenter, T. P. (1986). *Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge*. In J. Heibert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.113–132). Hillside, NJ: Erlbaum
- De Jong, T., & Ferguson-Hessler, M.G.M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational Psychologist, 31*, 105–113
- Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Star, J. R & Loehr, A., (2021). Comparing and Discussing Multiple Strategies: An Approach to Improving Algebra Instruction, *The Journal of Experimental Education*, DOI: 10.1080/00220973.2021.1903377-https://doi.org/10.1080/00220973.2021.1903377
- Haapasalo, L., and Kadjevich, D.(2000).Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik Didaktik, 21*(2),139-157.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 metaanalysis relating to achievement*. New York, NY: Routledge.
- Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 41*, 535–540. doi:10.1007/s11858-009-0214-4
- Hiebert, J. and Lefevre, P. (1986). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hilbert, T. S., Schworm, S., & Renkl, A. (2004). Learning from worked-out examples: The transition from instructional explanations to self-explanation prompts. In P. Gerjets, J. Elen, R. Joiner, & P. Kirschner (Eds.), *Instructional design for effective and enjoyable computer-supported learning* (pp. 184–192). Tübingen: Knowledge Media Research Center.

- Lewis, C. C. (1981). The effects of parental firm control: A reinterpretation of findings. *Psychological Bulletin*, 90, 547/563.
- Lynch K. and Star, J., R. (2014). Views of struggling students on instruction incorporating multiple strategies in algebra: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 45, No. 1 (January 2014), pp.6-18.
- McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2004). You'll see what you mean: Students encode equations based on their knowledge of arithmetic. *Cognitive Science*, 28, 451–466. doi:10.1016/j.cogsci.2003.11.002
- McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). *Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations*. *Child Development*, 76, 883–899
- Mwangi, W., & Sweller, J. (1998). Learning to solve compare word problems: The effect of example format and generating self-explanations. *Cognition and Instruction*, 16, 173–199. <https://doi.org/10.1207/s1532690xci1602>.
- National Center for Education Statistics. (2020). *NAEP report card: 2019 NAEP mathematics assessment*. The Nation's Report Card. <https://www.nationsreportcard.gov/highlights/mathematics/2019>
- Paas, F., Renkl, A. & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments, *Educational Psychologist* 38: 1–4.
- Patton, M.Q. (1997). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury park, CA: SAGE Publications.
- Post, T.R. and Cramer, K.A. (1989). "Knowledge, representation, and quantitative thinking". In Knowledge Base for the Beginning Teacher, Edited by: Reynolds, MC. 221–232. New York, NY: Pergamon. [Google Scholar]
- Renkl, A. (2014). *Learning From Worked Examples: How to Prepare Students for Meaningful Problem Solving Applying Science of Learning in Education: Infusing Psychological Science into the Curriculum*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Retnowati, E., Ayres, P., & Sweller, J. (2010). Worked example effects in individual and group work settings. *Educational Psychology*, 30, 349–367. <https://doi.org/10.1080/01443411003659960>.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561–574.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529–544. <https://doi.org/10.1037/a0014224> [Crossref], [Web of Science®]
- Rittle-Johnson, B. Star, J.,R. and Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology* (2012), 82, 436–455.
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M and Star, J.,R. (2015). Not a one-way street: bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educ Psychol Rev.* (2015) 27:587–597. DOI 10.1007/s10648-015- 9302-x.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47, 1525–1538. doi:10.1037/a0024997
- Siegler, R. S. (1994). Cognitive variability: A key to understanding cognitive development. *Current Directions in Psychological Science*, 3, 1–5.
- Silver, E. A., Ghouseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Strawhun, B. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 287–301.
- Skemp, R. R. (1978). Relational and Instrumental Understanding. *Arithmetic Teacher*, 26, 9-15.

- Star, J. R. (2001). *Re-conceptualizing Procedural Knowledge: Innovation and Flexibility in Equation Solving*. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan, Ann Arbor.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 404–411.
- Star, J. R. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 132–135.
- Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 408– 426. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.11.004>.
- Star J. R. & Stylianides, G. J. (2013) Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Can J Sci Math Technol Educ* 13, 169– 181.
- Star, J. R., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31, 280–300.
- Steffe, L. P. (1991). *The constructivist teaching experiment: Illustration sand implications*. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Boston, MA: Kluwer Academic Press. 173
- Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10, 251–296. <https://doi.org/10.1023/A:1022193728205>.
- Verschaffel L, Greer B, De Corte E (2007). *Whole number concepts and operations*. In: Lester FK (ed) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Information Age, Greenwich, pp 557–628
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24, 335–359. doi:10.1007/BF03174765
- Van Loon-Hillen, N., van Gog, T., & Brand-Gruwel, S. (2012). Effects of worked examples in a primary school mathematics curriculum. *Interactive Learning Environments*, 20, 89–99.
- Yanık, H. B. (2016). Kavramsal ve işlemsel anlama. In E. Bingölbali, S. Arslan, & Zembat, İ. Ö. (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (sf. 101-116). Ankara, Turkey: Pegem Akademi.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin yayıncılık