Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi
Sayı 31 (Ek Sayı 1), S. 823-830, Aralık 2021

Araştırma Makalesi

www.ejosat.com ISSN:2148-2683

European Journal of Science and Technology
No. 31 (Supp. 1), pp. 823-830, December 2021

Research Article

Fuzzy Fonksiyon Dönüşüm Dizilerinin μ. Dereceden Kuvvetli p-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı*

Abdulkadir Karakaş[1*], Hakkan Güloğlu[2]

[1*] Siirt Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Siirt, Türkiye, (ORCID: 0000-0002-0630-8802), kadirkarakas21@hotmail.com
[2] Siirt Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Siirt, Türkiye (ORCID: 0000-0001-7893-3730), hakanguloglu35@gmail.com

(İlk Geliş Tarihi 22 Haziran 2021 ve Kabul Tarihi 9 Ekim 2021)

(**DOI:** 10.31590/ejosat.956126)

ATIF/REFERENCE: Karakaş, A. & Güloğlu, H. (2021). Fuzzy Fonksiyon Dönüşüm Dizilerinin μ. Dereceden Kuvvetli p-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (31), 823-830.

Özet

Bu çalışmada, fuzzy küme, fuzzy dizileri ve fuzzy sayı dizilerinin yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı gibi bilinen kavramlar incelenerek, literatürde bilinen fuzzy fonksiyon dizilerinin tanımı ve dizilerin noktasal yakınsaklığı kavramı kullanılarak, fuzzy fonksiyon dizilerinin μ. dereceden kuvvetli p −lacunary istatistiksel yakınsaklık ile fuzzy fonksiyon dizilerinin μ. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanarak $S_{\Phi}^{\mu}(f), N_{\Phi}^{\mu}(f)$ ve $N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları ile ilgili sonuçlar elde edilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayı dizisi, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Fuzzy sayı dizisi, Fuzzy dönüşüm dizisi.

μ. Order Strong p-Lacunary Statistical Convergence of Fuzzy Function Mapping Sequences

Abstract

In this paper, we investigate the known concepts such as fuzzy set, fuzzy sequences and convergence and statistical convergence of fuzzy number sequences. Additionally, we define μ. order strong p-lacunary statistical convergence and μ. order the lacunary statistical convergence of the order of squences of fuzzy functions by using the definition of fuzzy function sequences and the concept of point convergence of sequences known in the literature. Then, we investigate the results about some coverage relations between the $S_{\Phi}^{\mu}(f), N_{\Phi}^{\mu}(f)$ and $N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ spaces and we present the relations between.

Keywords: Fuzzy number sequence, Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Fuzzy number sequence, Fuzzy transformation sequence.

---

* Sorumlu Yazar: kadirkarakas21@hotmail.com
**Bu çalışma, Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ danışmanlığında, Hakkan GÜLOĞLU tarafından hazırlanan Siirt Üniversitesi Fen bilimler Enstitüsüne sunulan "FUZZY FONKSİYON DÖNÜŞÜM DİZİLERİNİN KUVVETLİ P-LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI" başlıklı yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

1. Giriş

Zadeh [1] tarafından ilk defa fuzzy küme kavramı tanımlandı. Zadeh tarafından çalışılan bu makale belirsizlik kavramının ölçülmesinde önemli bir çalışmadır. Zadeh, bu çalışmasında kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu fuzzy küme kavramını ve bu kümenin cebirsel özelliklerini incelemiştir.

Matloka [2] ilk defa fuzzy sayı dizilerinin cebirsel özelliklerini incelemiştir. Fuzzy sayı dizilerinin, sınırlı ve yakınsak dizileride Nanda [3] tarafından çalışılmış ve bu uzayların tam metrik uzaylar olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Nuray ve Savaş [4] tarafından fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy kavramları verildi ve fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklık dizilerin uzayının bazı cebirsel özellikleri incelendi. Subrahmanyam [5] fuzzy sayı dizilerinin toplanabilme ile ilişkisini inceledi. Fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilme tanımı ve istatistiksel yakınsaklık kavramı ile olan ilişkisi de Kwon [6] tarafından incelendi. Fuzzy sayı dizileri pek çok yazar tarafından Aytar S. and Pehlivan [7], Altin v.d. [8], Karakaş, A. v.d. [9] çalışıldı.

Matloka [30] çalışmasında fuzzy dönüşüm dizilerini tanımlayarak, bu dizilerin noktasal yakınsaklığı kavramını verdi. Daha sonra Altın, Et ve Tripathy [31] fuzzy dönüşüm dizilerinin istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak, bu dizi uzayının cebirsel özelliklerini incelediler. Fuzzy dönüşüm dizileri pek çok yazar tarafından ([34], [35], [36], [37]) çalışılmıştır.

1935 yılında ilk olarak Zygmund [10] tarafından istatistiksel yakınsaklık tanımı verildi. Aynı zamanda bu kavram Steinhaus [11] tarafından tanıtıldı. Bu tanımdan faydalanarak Fast [12] kompleks terimli diziler için bu kavramı verdi. İstatistiksel yakınsaklık daha sonra Fridy [13], Salat [14], Connor [15], Tripathy [16] gibi birçok matematikçi tarafından çalışıldı. İlk olarak dereceli istatistiksel yakınsaklık için derece kavramı Gadjiev ve Orhan [17] tarafından çalışılmıştır. Daha sonra sayı dizileri için μ. dereceden doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilme kavramları Çolak [18] tarafından verildi. Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., [19] ve Fridy, J. A. and Orhan, C., [20] tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ve kuvvetli lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı kapsama teoremleri verildi. Noktasal ve Düzgün İstatistiksel yakınsaklık kavramı Duman ve Orhan [21], Gökhan ve Güngör [22] tarafından verildi. Daha sonra bu kavram Çinar v.d. [23] tarafından çalışıldı.

$H^* \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir H^* kümesinin doğal yoğunluğunun

$$\delta(H^*) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{t \le n: t \in H^*\}|$$

olduğunu ve $|\{t \le n: t \in H^*\}|$ kavramının H^* kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını gösterdiğini biliyoruz. Eğer $\delta(H^*) = 0$ ise H^* kümesine sıfır yoğunluklu küme olarak adlandırılır. Sıfır yoğunluklu küme δ_0 ile gösterilir [13].

$x = (x_t)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme hariç bütün t ler için sağlıyorsa, (x_t) dizisi hemen hemen her t için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.t$ şeklinde ifade edilir, ([13], [14]). Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık kavram aşağıdaki şekilde ifade edilir.

(x_t) kompleks terimli bir dizi olsun, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{t \in \mathbb{N}: |x_t - U| \ge \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa (x_t) dizisi U sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $St - \lim x = U$ şeklinde gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı St ile gösterilir

Aynı zamanda Çolak [18] $x = (x_t)$ ve $0 < \mu \le 1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\mu}|\{t \le n: |x_t - U| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir U sayısı mevcut ise, bu taktirde (x_t) dizisi U ye μ. dereceden istatistiksel yakınsaklık tanımınını vererek bu yakınsaklığı $S^\mu - \lim(x_t) = U(x_t)$ şeklinde tanımlamıştır. μ. dereceden istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesini S^μ ile göstermiştir.

Çolak [18] μ. dereceden istatistiksel yakınsaklık kavramını Cesàro toplanabilirliğe uygulayarak $0 < \mu \le 1$ ve $p \in R^+$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\mu}\sum_{t=1}^{n}|x_t - U|^p = 0,$$

olacak şekilde bir U sayısı var ise, bu taktirde $x = (x_t)$ dizisi μ. dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir olduğunu tanımlamıştır. μ. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilirliğin $\mu = 1$ için kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilirliğe indirgendiğini ve μ. dereceden kuvvetli $p-$Cesàro toplanabilir dizilerin uzayını W_p^μ ile göstermiştir. Yani

$$W_p^\mu = \left\{x = (x_t): \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\mu}\sum_{t=1}^{n}|x_t - U|^p = 0, \text{enaz bir } U \text{ için}\right\}.$$

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\Phi = (t_r)$ olsun. Eğer $t_0 = 0$ olmak üzere $r \to \infty$ için $h_r = t_r - t_{r-1}$ ise $\Phi = (t_r)$ dizisine lacunary dizisi denir, [19].

$$\sum_{i=t_{r-1}+1}^{t_r}|x_i| = \sum_{i\in I_r}|x_i|$$

alınacak ve uygunluk için bu toplam kısaca $\sum_{I_r}|x_i|$ ile ve $\frac{t_r}{t_{r-1}}$ oranı da q_r ile gösterilecektir. $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ şeklinde gösterilecektir. Bilindiği gibi Lacunary dizi uzayları üzerinde bir çok yazar çalışmışlardır Nuray [24], Sengül v.d [25], Bhardwaj [26], Das [27] vd.

Sengül, H. ve Et, M., [25] μ dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklığı $\Phi = (t_r)$ bir lacunary dizi, $r \to \infty$ için $h_r = t_r - t_{r-1}$, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $0 < \mu \le 1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t \in I_r: |x_t - U| \ge \varepsilon\}| = 0$$

şeklinde tanımlayarak ve aynı zamanda μ. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\Phi^\mu - \lim x_t = U$ veya $x_t \to U(S_\Phi^\mu)$ ile olduğunu göstermişlerdir. μ. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S_Φ^μ ile gösterilir, [25]. Ayrıca $\mathbb{N}$ nin bir H^* alt kümesinin μ dereceden $\Phi-$yoğunluğu

$$\delta_\Phi^\mu(H^*) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} |\{t \in I_r : t \in H^*\}|$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi de kuvvetli lacunary yakınsaklık hakkında biraz bilgi verelim. Herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi ve $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa (x_t) dizisi U sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin uzayı N_Φ ile gösterilir, yani

$$N_\Phi = \left\{ x = (x_t) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0, \text{enaz bir } L \text{ için} \right\}$$

dır, [19]. Sengül, H. and Et, M., [25] herhangi bir $\Phi = (t_r)$ lacunary dizisi, $I_r = (t_{r-1}, t_r]$ ve $0 < \mu \le 1$ olsun. $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r^\mu} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0$$

olacak şekilde bir U sayısı varsa (x_t) dizisi U sayısına μ. dereceden kuvvetli $p-$lacunary yakınsak olduğunu ve μ. dereceden kuvvetli $p-$lacunary dizilerin uzayını $N_{\Phi,p}^\mu$ ile göstermişlerdir, yani

$$N_{\Phi,p}^\mu = \left\{ x = (x_t) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{t\in I_r} |x_t - U|^p = 0, \text{enaz bir } U \text{ için} \right\}$$

dır. Eğer $\Phi = (2^r)$ alırsak μ. dereceden kuvvetli $p-$Cesaro toplanabilir dizilerin kümesi

$$W_p^\mu = \left\{ x = (x_t) : \exists L \in, \lim_n \frac{1}{n^\mu} \sum_{t=1}^{n} |x_t - U|^p = 0 \right\}$$

elde edilir.

χ, elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. χ kümesinde bir A fuzzy kümesi, χ deki herbir noktayı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir. χ deki bir A fuzzy kümesinden bahsedilirken $X_A : \chi \to 0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyon daima mevcuttur. Bu fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in 0,1], x \notin A$ için $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan karakteristik fonksiyona bundan sonra üyelik fonksiyonu diyeceğiz.

Üyelik fonksiyonunun tanımından yararlanarak bir A fuzzy kümesi,

$$A = \{x \in \chi : X_A(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde ifade ederiz. Burada $X_A(x)$ in değeri A fuzzy kümesindeki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre $X_A(x)$ in 1 e en yakın değeri, A fuzzy kümesindeki x in en yüksek üyelik derecesidir. Eğer E kümesi klasik anlamda bir küme ise üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerlerini alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya $X_A(x) = 0$ olması x in A ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenmiş olur, [1].

$C(R^n)$, R^n öklid uzayının boş olmayan, kompakt ve konveks bütün alt kümelerinin ailesini göstersin. Bu takdirde $C(R^n)$ üzerinde toplama ve skalerle çarpma her $B, C \in C(R^n)$ için

$$B + C = \{t : t = x + y, x \in B \text{vey} \in C\}$$

ve her $B \in C(R^n)$ ve her $\lambda \in [0,1]$

$$\lambda B = \{z : z = \lambda x, x \in B\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki toplama ve çarpma işlemleri $C(R^n)$ üzerinde bir lineer yapı üretir. B ve C kümeleri arasındaki uzaklık

$$\delta_\infty(B, C) = \max\left\{ \sup_{b\in B} \inf_{c\in C} \|b - c\|, \sup_{c\in C} \inf_{b\in B} \|b - c\| \right\}$$

Hausdorff metriğiyle tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ sembolü ile R^n deki alışılmış öklid normu gösterilmektedir. $(C(R^n), \delta_\infty)$ uzayının bir tam metrik uzay olduğu bilinmektedir. Bir fuzzy sayısının tanımı aşağıdaki biçimde verilebilir.

$n-$boyutlu öklid uzayı R^n üzerindeki bir fuzzy sayı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : R^n \to [0,1]$ fonksiyonudur:

$i)$ X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in R^n$ mevcuttur,

$ii)$ X fuzzy konvekstir, yani herhangi $x, y \in R^n$ ve $0 \le \mu \le 1$ için

$$X(\mu x + (1-\mu)y) \ge \min\{X(x), X(y)\}$$

eşitsizliği sağlanır,

$iii)$ X üst-yarı-süreklidir,

$iv)$ $X^0 = \{x \in R^n : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki bütün fuzzy sayıların kümesi $L(R^n)$ ile gösterilir. $0 \le \alpha \le 1$ için X^α kesim kümesini gözönüne alalım. Tanımdan, $X^\alpha \in C(R^n)$ olduğu açıktır. $L(R^n)$ deki toplama ve skaler ile çarpma $X, Z \in L(R^n)$ ve $t \in R$ olmak üzere

$$[X + Z]^\alpha = X^\alpha + Z^\alpha \text{ve} [tX]^\alpha = tX^\alpha$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi, her bir $1 \le q < \infty$ için

$$d_q(X, Z) = \left(\int_0^1 \delta_\infty(X^\alpha, Z^\alpha)^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0\le\alpha\le1} \delta_\infty(X^\alpha, Z^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $q \le s$ için $d_q \le d_s$ olmak üzere

$$d_\infty(X, Z) = \lim_{q\to\infty} d_q(X, Z)$$

olduğu açıktır. $\left(C(R^n), d_q\right)$ metrik uzayı tamdır, [28]. Bundan sonraki kısımlarda d_q yerine d notasyonu kullanılacaktır. Aynı zamanda d metriği aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$d(cX, cZ) = |c| d(X, Z) \tag{1}$$

$$d(X+Z,Y+Z^*) \leq d(X,Y)+d(Z,Z^*). \qquad (2)$$

Bir fuzzy dönüşüm dizisi, tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi ve değer kümesi de fuzzy dönüşümler kümesi olan bir fonksiyondur. Bir fuzzy dönüşümler dizisini (f_n) ile göstereceğiz. (f_n) fuzzy dönüşümler dizisinin terimlerinin her birinin tanım kümesindeki bir t sayısına karşılık gelen bir $(f_n(t))$ fuzzy sayı dizisi vardır. Eğer bir T kümesindeki her bir t sayısı için $(f_n(t))$ yakınsak ve $f(t)=\lim_{n\to\infty} f_n(t)$ ise bu taktirde (f_n) dizisi T üzerindeki f ye noktasal yakınsaktır, [30].

Şimdide noktasal istatistiksel yakınsaklık kavramını verelim.

(f_n) bir fuzzy sayı değerli fonksiyon dizisi ve f de fuzzy sayı değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{t\leq n: d(f_n(x),f(x))\geq\varepsilon\}|=0$$

ise (f_n) dizisi f e noktasal istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu durumda

$$St_n-\lim_{n\to\infty} f_n(t)=f(t) \text{ veya } f_n(t)\xrightarrow{St_n} f(t)$$

şeklinde gösterilir.

Şimdi yukarıdaki tanıma denk olan tanımı verelim: $\forall x \in [a,b], \forall\varepsilon>0, \exists M_x\in\delta_0, \forall n\in N/M_x$

$$d(f_n(x),f(x))<\varepsilon.$$

Açıktır ki (f_n) fuzzy sayı değerli fonksiyon dizisinin bir f fuzzy sayı değerli fonksiyon istatistiksel yakınsak olması için her $n\in N/M_x$ için $d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$ olacak şekilde sonlu bir $M_x\in\delta_0$ kümesinin mevcut olmasıdır, ([31], [34]).

Teorem 1.1. (f_n) ve (g_n) fuzzy sayı değerli iki fonksiyon dizisi ve $x\in a,b]$ olsun. Eğer $f_n(x)\xrightarrow{St_n} f(x)$ ve $g_n(x)\xrightarrow{St_n} g(x)$ ise o zaman,

$a)$ $(f_n(x)+g_n(x))\xrightarrow{St_n}(f(x)+g(x))$

$b)$ $cf_n(x)\xrightarrow{St_n} cf(x), c\in\mathbb{R}$ dir, [34].

Teorem 1.2. (f_n) fuzzy sayı değerli bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0, \exists M\in\delta_0, \forall n\in N/M, \forall x\in a,b]$ için

$$d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$$

ise (f_n) fuzzy sayı değerli bir fonksiyon dizisi $[a,b]$ üzerinde bir f fuzzy sayı değerli fonksiyona düzgün istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $f_n\xrightarrow{uSt} f$ şeklinde yazılır, [34].

Teorem 1.3. Bir (f_n) fuzzy sayı değerli bir fonksiyon dizisinin bir f fuzzy sayı değerli bir fonksiyona istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart α ya göre $(f_n)_\alpha$ nın f_α ya düzgün istatistiksel olmasıdır, [34].

Teorem 1.4. (f_n) bir fuzzy değerli bir fonksiyon dizisi olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir.

$a)$ $(f_n), f$'e istatistiksel yakınsaktır.

$b)$ $\forall x\in a,b]$ için $f_n(x)=g_n(x)+h_n(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$ ve $h_n(x)\xrightarrow{St}\bar{0}$ olacak şekilde (g_n) ve (h_n) fuzzy sayı değerli fonksiyon dizileri vardır.

$c)$ $\delta(T)=1$ ve $t\to\infty$ iken $d(f_{n_t}(x),f(x))\to\bar{0}$ olacak şekilde N in bir $T=n_t$ alt dizisi mevcuttur, [34].

Sonuç olarak $f_n\xrightarrow{St_n} f$ ise $f_n\xrightarrow{St} f$ dir. $f_n\xrightarrow{uSt} f$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{x\in a,b]} d(f_n(x),f(x))\xrightarrow{St} 0$$

olmasıdır, [34].

2. Temel Sonuçlar

Bu bölümde Et v.d. [32] tarafından verilen fuzzy dönüşüm dizilerinden faydalanılarak yapılmıştır. μ. dereceden noktasal istatistiksel kavramını bazı özellikleri incelenerek, μ. dereceden kuvvetli noktasal yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi. Bu bölümün ilk kısmında fuzzy dönüşüm dizileri için μ. dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsaklığın tanımı, bazı özellikleri ve kapsama bağıntıları tanımlanmıştır. İkinci kısımda fuzzy dönüşüm dizilerinin μ. dereceden Kuvvetli $p-$lacunary yakınsaklığın tanımı, bazı özellikleri ve kapsama bağıntıları tanımlanmıştır.

Tanım 2.1. $\Phi=(t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r=(t_{r-1},t_r]$ ve $\mu\in(0,1]$ olsun. $f=(f_t)$ fuzzy değerli bir fonksiyon dizisi olmak üzere, eğer her $x\in a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f_0(x))\geq\varepsilon\}|=0$$

ise (f_t) fuzzy değerli fonksiyon dizisi f fuzzy değerli fonksiyonuna μ. dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsaktır. Bu durumda $S_\Phi^\mu-\lim f_t(x)=f(x)$ şeklinde yazılır. μ. dereceden lacunary noktasal istatistiksel yakınsak fonksiyonların kümesi $S_\Phi^\mu(f)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2. $\Phi=(t_r)$ bir lacunary dizisi, $I_r=(t_{r-1},t_r]$ olsun. $f=(f_t), g=(g_t)$ birer fuzzy değerli fonksiyon dizileri olmak üzere, $\mu\in(0,1]$ ve her $x\in a,b]$ için

$i)$ $S_\Phi^\mu-\lim f_t(x)=f_0(x)$ ve $c\in\mathbb{R}$ ise

$$S_\Phi^\mu-\lim cf_t(x)=cf_0(x),$$

$ii)$ $S_\Phi^\mu-\lim f_t(x)=f_0(x)$ ve $S_\Phi^\mu-\lim g_t(x)=g_0(x)$ ise

$$S_\Phi^\mu-\lim(f_t(x)+g_t(x))=f_0(x)+g_0(x)$$

dır.

İspat:

$i)$ $c=0$ ise aşikardır. $0\neq c\in R$ ve $f_t(x)\in S_\Phi^\mu(f)$ olduğunu kabul edelim. (1) ve (2) deki d metriğinin özellikleri ile her $x\in a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}|\{t\in I_r: d(cf_t(x),cf_0(x))\geq\varepsilon\}|$$
$$\leq\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^\mu}\left|\left\{t\in I_n: d(f_t(x),f_0(x))\geq\frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$

dır. Buradan da $cf_t(x)\in S_\Phi^\mu(f)$ dir.

$ii)$ Farz edelim ki $f=(f_t), g=(g_t)$ her $x\in a,b]$ için birer fuzzy değerli fonksiyon dizileri olsun. Aynı zamanda Minkowski eşitsizliği ve (2) özelliği ile beraber ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için,

$$d((f_t)+(g_t),f_0(x)+g_0(x)) \le d(f_t(x),f_0(x))+d(g_t(x),g_0(x))$$

(3) eşitsizliğinden,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^{\mu}}|\{t\in I_r: d(f_t(x)+g_k(x)),f(x)+g(x))\ge\varepsilon\}|$$

buradan

$$\le \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^{\mu}}\left|\left\{t\in I_n: d(f_t(x),f(x))\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r^{\mu}}\left|\left\{t\in I_r: d(g_t(x),g(x))\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

dır.

Teorem 2.3. $\Phi=(t_r)$ ve $\Phi^*=(s_r)$, $\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subset J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f=(f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi, $\mu\in(0,1]$ ve her $x\in a,b]$ olsun. $0<\mu\le\eta\le 1$ için

$i)$ Eğer

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\eta}}>0 \tag{4}$$

ise $S_{\Phi^*}^{\eta}(f)\subseteq S_{\Phi}^{\mu}(f)$,

$ii)$ Eğer

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}}=1 \tag{5}$$

ise $S_{\Phi}^{\mu}(f)\subseteq S_{\Phi^*}^{\eta}(f)$ dir.

İspat:

$i)$ Farz edelim ki $\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subset J_r$ ve (4) eşitsizliği sağlansın. Her $x\in a,b]$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$$|\{t\in J_n: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|\supseteq\{t\in I_n: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}$$

yazabiliriz. Buradan $\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r=(t_{r-1},t_r], J_r=(s_{r-1},s_r], h_r=t_r-t_{r-1}$ ve $\ell_r=s_r-s_{r-1}$ olmak üzere

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{t\in J_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}| \ge \frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\eta}}\frac{1}{h_r^{\mu}}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f_0(x))\ge\varepsilon\}|.$$

şeklinde olur. Şimdide $r\to\infty$ için limit alınırsa ve (4) eşitsizliği kullanılırsa $S_{\Phi}^{\eta}(f)\subseteq S_{\Phi}^{\mu}(f)$ elde edilir.

$ii)$ $f=(f_t)\in S_{\Phi}^{\mu}(f)$ olsun. (5) eşitliğini sağlansın. Bu durumda $\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subset J_r$ dır.

Her $x\in a,b], \forall r\in\mathbb{N}$ ve herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{t\in J_n: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}| = \frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{s_{r-1}\le t\le t_{r-1}: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|$$

$$+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{t_r\le t\le s_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|$$

$$+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{t_{r-1}\le t\le t_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|$$

$$\le\frac{t_{r-1}-s_{r-1}}{\ell_r^{\eta}}+\frac{s_r-t_r}{\ell_r^{\eta}}+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|$$

$$=\frac{\ell_r-h_r}{\ell_r^{\eta}}+\frac{1}{\ell_r^{\eta}}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|$$

$$\le\frac{\ell_r-h_r^{\eta}}{h_r^{\eta}}+\frac{1}{h_r^{\eta}}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|$$

$$\le\left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}}-1\right)+\frac{1}{h_r^{\mu}}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f(x))\ge\varepsilon\}|.$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim $r\to\infty$ için limit alınırsa (5) eşitliğinden $\lim_{r\to\infty}\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}}=1$ olduğundan ve ikinci terim $f=(f_t)\in S_{\Phi}^{\mu}(f)$ olduğundan $S_{\Phi}^{\mu}(f)\subseteq S_{\Phi^*}^{\eta}(f)$ dir. Teorem 2.3 den aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 2.4. $\Phi=(t_r)$ ve $\Phi^*=(s_r),\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r=(t_{r-1},t_r], J_r=(s_{r-1},s_r]$ ve $I_r\subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f=(f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (4) eşitsizliğini sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu\in(0,1]$ için $S_{\Phi^*}^{\mu}(f)\subseteq S_{\Phi}^{\mu}(f)$,

$ii)$ Her $\mu\in(0,1]$ için $S_{\Phi^*}(f)\subseteq S_{\Phi}^{\mu}(f)$,

$iii)$ $S_{\Phi^*}(f)\subseteq S_{\Phi}(f)$

dır.

Sonuç 2.5. $\Phi=(t_r)$ ve $\Phi^*=(s_r),\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r=(t_{r-1},t_r], J_r=(s_{r-1},s_r]$ ve $I_r\subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f=(f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (5) eşitliğini sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu\in(0,1]$ için $S_{\Phi}^{\mu}(f)\subseteq S_{\Phi^*}^{\mu}(f)$,

$ii)$ Her $\mu\in(0,1]$ için $S_{\Phi}^{\mu}(f)\subseteq S_{\Phi^*}(f)$,

$iii)$ $S_{\Phi}(f)\subseteq S_{\Phi^*}(f)$

dır.

Teorem 2.6. $\Phi=(t_r)$ ve $\Phi^*=(s_r),\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r=(t_{r-1},t_r], J_r=(s_{r-1},s_r]$ ve $I_r\subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f=(f_t)\in B(F),\mu\in(0,1]$ ve her $x\in a,b]$ olsun. $0<\mu\le\eta\le1$ ve $0<p<\infty$ için

$i)$ Eğer (4) eşitsizliği sağlanırsa $N_{\Phi^*,p}^{\eta}(f)\subset N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$,

$ii)$ Eğer (5) eşitliği sağlanırsa ve $f=(f_t)\in B(F)$ ise $N_{\Phi,p}^{\mu}(f)\subset N_{\Phi*,p}^{\eta}(f)$

dır. Burada $B(F)$, $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tüm sınırlı fuzzy fonksiyon dizilerinin kümesini göstersin.

İspat:

$i)$ $\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subseteq J_r$ olsun ve (4) eşitsizliği sağlansın.

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}}\sum_{t\in J_r,x\in a,b]}(d(f_t(x),f(x)))^p \ge\frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\mu}}\frac{1}{h_r^{\mu}}\sum_{t\in I_r,x\in a,b]}(d(f_t(x),f(x)))^p$$

eşitsizliğinden $\forall r\in\mathbb{N}$ için $N_{\Phi^*,p}^{\eta}(f)\subset N_{\Phi,p}^{\mu}(f)$ kapsaması elde edilir.

$ii)$ $(f_t) \in N^{\mu}_{\Phi,p}(f)$ ve (5) eşitliği sağlansın. $f = (f_t) \in B(F)$ olduğundan $d(f_t(x), f(x)) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Şimdide $\forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ ve $h_r \leq \ell_r$ olduğundan

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$= \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_n - I_n, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$+ \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^{\eta}}\right) M^p + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\leq \left(\frac{\ell_r - h_r^{\eta}}{h_r^{\eta}}\right) M^p + \frac{1}{h_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}} - 1\right) M^p + \frac{1}{h_r^{\mu}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$

buradan da $\forall r \in \mathbb{N}$ için $N^{\mu}_{\Phi,p}(f) \subset N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f)$ kapsaması elde edilir.

Teorem 2.6 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 2.7. $\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (4) eşitsizliğini sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $N^{\mu}_{\Phi^*,p}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi,p}(f)$,

$ii)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $N_{\Phi^*,p}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi,p}(f)$,

$iii)$ $N_{\Phi^*,p}(f) \subseteq N_{\Phi,p}(f)$

dir.

Sonuç 2.8. $\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (5) eşitliğini sağlansın. Bu taktirde

$i)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $B(F) \cap N^{\mu}_{\Phi,p}(f) \subseteq N^{\mu}_{\Phi^*,p}(f)$,

$ii)$ Her $\mu \in (0,1]$ için $B(F) \cap N^{\mu}_{\Phi,p}(f) \subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$,

$iii)$ $B(F) \cap N_{\Phi,p}(f) \subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$

dir.

Teorem 2.9. $\Phi = (t_r)$ ve $\Phi^* = (s_r), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f = (f_t) \in B(F), \mu \in (0,1]$ ve her $x \in a,b]$ olsun. $\mu, \eta \in R$ sayısı olmak üzere $0 < \mu \leq \eta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ için

$i)$ (4) eşitsizliği sağlansın. Eğer bir dizi f ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f)$ yakınsak ise bir dizi f ye $S^{\mu}_{\Phi}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır,

$ii)$ (5) eşitliği sağlansın. Eğer bir dizi $f = (f_t) \in B(F)$ olsun. Bir dizi f ye $S^{\mu}_{\Phi}(f)$ $-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f)$ yakınsaktır.

İspat:

$i)$ $f = (f_t) \in N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f), \forall r \in \mathbb{N}$ için $I_r \subseteq J_r$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{t \in J_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$= \sum_{t \in J_r, x \in a,b], |f_t - f| \geq \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$+ \sum_{t \in J_r, x \in a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))$$
$$\geq \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| \geq \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$+ \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\geq \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| \geq \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\geq |\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

ve böylece

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\geq \frac{1}{\ell_r^{\eta}} |\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

$$\geq \frac{h_r^{\mu}}{\ell_r^{\eta}} \frac{1}{h_r^{\mu}} |\{t \in I_r : d(f_t(x), f(x) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

yazabiliriz. (4) eşitsizliği sağlandığı için $f = (f_t)$ dizisi f ye kuvvetli $N^{\eta}_{\Phi^*,p}(f)$ $-$toplanabilir ise f ye $S^{\mu}_{\Phi}(f)$ $-$istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $S^{\mu}_{\Phi}(f) - \lim f_t(x) = f(x)$ ve $f = (f_t) \in B(F)$ olsun. Bu taktirde $d(f_t(x), f(x)) \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_r, x \in a,b]} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$= \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in J_r - I_r, x \in a,b], |f_t - f| \geq \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$+ \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\leq \left(\frac{\ell_r - h_r}{\ell_r^{\eta}}\right) M^p + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\left(\frac{\ell_r - h_r^{\eta}}{\ell_r^{\eta}}\right) M^p + \frac{1}{\ell_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^{\eta}} - 1\right) M^p + \frac{1}{h_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| \geq \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$
$$+ \frac{1}{h_r^{\eta}} \sum_{t \in I_r, x \in a,b], |f_t - f| < \varepsilon} (d(f_t(x), f(x)))^p$$

$$\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\eta}-1\right)M^p+\frac{M^p}{h_r^\eta}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f(x)\geq \varepsilon\}|\varepsilon^p+\frac{h_r}{h_r^\eta}\varepsilon^p$$

$$\leq \left(\frac{\ell_r}{h_r^\eta}-1\right)M^p+\frac{M^p}{h_r^\mu}|\{t\in I_r: d(f_t(x),f(x)\geq \varepsilon\}|\varepsilon^p+\frac{\ell_r}{h_r^\eta}\varepsilon^p$$

yazabiliriz. (5) eşitliği ile bir dizi f ye $S_\Phi^\mu(f)$ $-$istatistiksel yakınsak ise f ye kuvvetli $N_{\Phi^*,p}^\eta(f)$ yakınsaktır.

Teorem 2.9 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 2.10. $\Phi=(t_r)$ ve $\Phi^*=(s_r),\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f=(f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (4) eşitsizliğini sağlansın. Bu taktirde her $\mu\in(0,1]$ için,

$i)$ $N_{\Phi^*,p}^\mu(f)\subseteq S_\Phi^\mu(f)$,

$ii)$ $N_{\Phi^*,p}(f)\subseteq S_\Phi^\mu(f)$,

$iii)$ $N_{\Phi,p}(f)\subseteq S_\Phi(f)$

dir.

Sonuç 2.11. $\Phi=(t_r)$ ve $\Phi^*=(s_r),\forall r\in\mathbb{N}$ için $I_r\subseteq J_r$ olacak şekilde iki lacunary dizi olsun. $f=(f_t)$ fuzzy değerli fonksiyon dizisi ve (5) eşitliğini sağlansın. Bu taktirde her $\mu\in(0,1]$ için,

$i)$ $B(F)\cap S_\Phi^\mu(f)\subseteq N_{\Phi^*,p}^\mu(f)$,

$ii)$ $B(F)\cap S_\Phi^\mu(f)\subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$,

$iii)$ $B(F)\cap S_\Phi(f)\subseteq N_{\Phi^*,p}(f)$

dir.

3. Sonuçlar

Bu çalışmada, literatürde bilinen fuzzy fonksiyon dizilerinin tanımı ve dizilerin noktasal yakınsaklığı kavramı kullanılarak, fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden p $-$lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda fuzzy fonksiyon dizilerinin μ dereceden kuvvetli p $-$lacunary istatistiksel yakınsaklık ile fuzzy fonksiyon dizilerinin μ. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanarak $S_\Phi^\mu(f), N_\Phi^\mu(f)$ ve $N_{\Phi,p}^\mu(f)$ uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları ile ilgili sonuçlar elde edilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Kaynakça

[1] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, Inform and Control, 8, ss. 338-353.

[2] Matloka, M. (1986) .Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28, ss. 28-37.

[3] Nanda, S. (1989). On sequence of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems,33, ss. 123-126.

[4] Nuray, F. and Savaş, E. (1995). Statistical convergence of fuzzy numbers, Mathematica Slovaca, 45 (3), ss. 269-273.

[5] Subrahmanyam, P.V. (1999). Cesàro summability for fuzzy real numbers, The Journal of Analysis, 7, ss. 159-168.

[6] Kwon, J.S. (2000). On statistical and Cesàro convergence of fuzzy numbers, Korean Journal of Computational.&Appllied Mathematics, 7 (1), ss. 195-203.

[7] Aytar S.and Pehlivan, S. (2007) Statistical cluster and extreme limit points of sequences of fuzzy numbers, Information Sciences, 177, 3290--3296.

[8] Altin, Y., Et, M.and Çolak, R. (2006). Lacunary statistical and lacunary strongly convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers, Computers & Mathematics with Applications, 52 (6-7), ss1011-1020.

[9] Karakaş, A., Altin, Y. and Altinok, H. (2014). On generalized statistical convergence of order β-of sequences of fuzzy numbers, Journa of Intelligent &. Fuzzy Systems, 26 (4), ss. 1909-1917.

[10] Zygmund, A. (1968). Trigonometric series: Vols. I, II. Cambridge University Press, London-New York.

[11] Steinhaus, H. (1951). Surla convergence ordinarie et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, ss. 73-74.

[12] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, Colloquium Mathematicum, 2, ss. 241-244.

[13] Fridy, J.A. (1985). On the statistical convergence, Analysis, 5, ss. 301-313.

[14] Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. Mathematica Slovaca, 30 (2), ss. 139-150.

[15] Connor, J.S (1988). The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8 (1-2), ss. 47-63.

[16] Tripathy, B.C. and Sen, M. (2001). On generalized statistically convergent sequences, Indian Journal of Pure Applied Mathematics, 32 (11), ss.1689-1694.

[17] Gadjiev, A. D. and Orhan, C.(2002). Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32 (1), ss. 129-138.

[18] Çolak, R. (2010). Statistical convergence of order α, Modern Methods in Analysis and Its Applications, Anamaya Pub., New Delhi, India, ss. 121-138.

[19] Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M. (1978). "Some Cesaro-type summability spaces", Proc. Lond. Math. Soc., 37, 508-520.

[20] Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary Statistical Convergence, Pacific J. Math. 160 (1) 43-51.

[21] Duman, O. and Orhan, C. (2004). μ-statistically convergent function sequences, Czechoslovak Mathematical Journal. 54 (129) no. 2, ss. 413-422.

[22] Gökhan, A. and Güngör, M. (2002). On pointwise statistical convergence, Indian Journal of Pure Applied Mathematics, 33 (9), ss. 1379-1384.

[23] Çinar, M.; Karakaş, M., Et, M. (2013). On pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions, Fixed Point Theory and Application, 33, 11 pp.

[24] Nuray, F., (1998). Lacunary statistical convergence of sequences of Fuzzy numbers, Fuzzy Sets Syst., 99 353-355.

[25] Şengül, H. and Et, M. (2014). On lacunary statistical convergence of order α, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 34 (2), 473-482.

[26] Bhardwaj, V. K. and Dhawan, S. (2016). Density by moduli and lacunary statistical convergence, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 9365037, 11 pp.

[27] Das, G., and Mishra, S.K. (1983). Banach limits and lacunary strong almost convegence, J.Orissa Math. Soc.2, 61-70.

[28] Puri, M. L. and Ralescu, D.A. (1986). Fuzzy random variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114, ss. 409-422.

[29] Mursaleen, M. and Başarır, M. (2003). On some new sequence spaces of fuzzy numbers, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 34 (9), ss.1351-1357.

[30] Matloka, M. (1987). Fuzzy mappings- sequences and series, Busefal, 30, ss.18-25.

[31] Altin, Y. Et, M. ve Tripathy, B. C. (2007). On pointwise statistical convergence of sequences of fuzzy mappings, Journal Fuzzy Mathematics, 15 (2), ss. 425-433.

[32] Et, M., Tripathy, B.C. ve Dutta, A.J. (2014). On pointwise statistical convergence of order α-of sequences of fuzzy mappings, Kuwait Journal of Science, 41 (3), ss. 17-30.

[33] Et, M. (2014). On pointwise λ-statistical convergence of order α-of sequences of fuzzy mappings, Filomat, 28 (6), ss.1271-1279.

[34] Gong, Z., Zhang, L.ve Zhu, X. (2015). The statistical convergence for sequences of fuzzy-number-valued functions, Information Sciences, 295, ss. 182-195.

[35] Srivastava, P.D. ve Ojha, S. (2014). λ-Statistical convergence of fuzzy numbers and fuzzy functions of order θ, Soft Computing, 18,ss. 1027-1032.

[36] Hung, N. V., Tam, V. M., Tuan, N. H.and O'Regan, D. (2020). Convergence analysis of solution sets for fuzzy optimization problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 369, 112615, 11 pp.

[37] Hazarika, B. (2017). Pointwise ideal convergence and Uniformly ideal convergence of sequence of fuzzy valued functions, Journal of İntelligent & Fuzzy Systems, 32 (3), ss. 2665-2677.