Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **13** (2013) 011301 (1-7) AKU J. Sci. Eng. **13** (2013) 011301 (1-7)
DOI: 10.5578/fmbd.5424 ***Araştırma Makalesi / Research Article***

Yarı Değişmeli Halkaların Bir Genelleştirmesi

Murat ATİK
Özel Zafer Lisesi, Afyonkarahisar.
e-posta: halitmuratatik@hotmail.com

Geliş Tarihi:21.03.2013; Kabul Tarihi:06.05.2013

Anahtar kelimeler
İnmiş halkalar;
Yarıdeğişmeli halkalar;
Katı halkalar.

Özet

R bir halka ve α da R nin bir endomorfizması olmak üzere eğer, $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $\alpha(a)Rb = 0$ olmasını gerektiriyor ise, bu durumda α endomorfizmasına soldan yarıdeğişmelidir denir. Eğer bir R halkasının soldan yarıdeğişmeli bir α endomorfizması varsa, bu durumda R halkasına soldan α −yarıdeğişmeli halka denir. Bu çalışmada yarıdeğişmeli halkalar için bilinen bir çok sonuç soldan α −yarıdeğişmeli halkalara genelleştirilecektir.

A Generalization of Semicommutative Rings

Key words
Reduced Rings;
Semicommutative Rings; Rigid Rings.

Abstract

For an endomorphism α of a ring R, the endomorphism α is called left semicommutative if $ab = 0$ implies $\alpha(a)Rb = 0$ for $a, b \in R$. A ring R is called left α −semicommutative if there exists a left semicommutative endomorphism α of R. In this paper, varios results of semicommutative rings are extended to left α −semicommutative rings.

1. Giriş

Bu çalışma boyunca R birimli bir halkayı ve aksi belirtilmedikçe α da R halkasının birimden ve sıfırdan farklı bir endomorfizmasını gösterecektir. Eğer bir R halkasının sıfırdan farklı eşkare elemanı yoksa, bu halkaya inmiş (reduced) bir halka denir. (Lambek, 1971) de; $a, b, c \in R$ için

$$abc = 0 \Longrightarrow acb = 0$$

şartını sağlayan bir halkayı simetrik halka olarak adlandırmıştır. Diğer taraftan (Habeb, 1990) da, $a, b \in R$ için

$$ab = 0 \Longrightarrow ba = 0$$

gerektirmesini sağlayan halkaları sıfır değişmeli olarak isimlendirirken aynı şartı sağlayan halkalara (Cohn,1999) da terslenebilir (reversible) halkalar demiştir. Terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi yarıdeğişmeli (semicommutative) halkalardır. $a, b \in R$ için $ab = 0 \Longrightarrow aRb = 0$ oluyorsa bu R halkasına yarıdeğişmeli bir halka denir. Her inmiş halka simetrik fakat bunun tersi doğru değildir. Her simetrik halka da yarıdeğişmeli bir halkadır. Yarıdeğişmeli halkalarla ilgili günümüze kadar birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bir kısmı kaynaklar bölümünde verilmiştir. Tekrar α bir R halkasının bir endomorfizması olmak üzere eğer $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ veya denk olarak $\alpha(a)a = 0 \Longrightarrow a = 0$ oluyorsa bu durumda R halkasına α −katı (α −rigid) halka denir. (Krempa, 1996). Eğer R bir α −katı halka ise, bu durumda açık olarak R inmiş bir halka ve α bir monomorfizmadır.

2. Materyal ve Metot

Son yıllarda yarıdeğişmeli halkaların bir genelleştirilmesi (Başer,M. , Harmancı, A. ve Kwak, T.K. , 2008) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada; R bir halka ve α ; R nin bir endomorfizması olmak üzere, $a, b \in R$ için $ab = 0 \Longrightarrow aR\alpha(b) = 0$ şartını sağlayan halkalar α −yarıdeğişmeli halkalar olarak adlandırılmıştır. Bu çalışmada ise $a, b \in R$ için

$$ab = 0 \Longrightarrow \alpha(a)Rb = 0 \ldots\ldots (P)$$

özelliğini sağlayan halkalar dikkate alınmıştır. Şimdi;

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasının

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$\beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmalarını göz önüne alalım. Bu R halkasının α −yarıdeğişmeli olduğu yukarıda adı geçen makalede gösterilmiştir. Fakat bu halka (P) özelliğini sağlamaz.

Gerçekten;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R \text{ için } AB = O$$

fakat

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \text{ için } \alpha(A)CB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

Yani $\alpha(A)RB \neq O$ dır. Diğer taraftan R halkasının β endomorfizması ile birlikte (P) özelliğini sağladığı Örnek 3.5 de gösterilmiştir. Fakat bu R halkası β −yarıdeğişmeli değildir.

Gerçekten;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in R \text{ için } AB = O$$

fakat

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R \text{ için } AC\beta(B) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

Yani $AR\beta(B) \neq O$ dır. Sonuç olarak α −yarıdeğişmeli halkaların sınıfı ile (P) özelliğini sağlayan halkaların sınıfı birbirinden farklı, yani aralarında bir ilişki yoktur.

Yukarıdakilerin ışığı altında, biz bu çalışmada soldan α −yarıdeğişmeli halka kavramını tanımlayacağız. Soldan α −yarıdeğişmeli halkalar α −katı halkaların bir genelleştirilmesi olduğu kadar yarıdeğişmeli halkalarında bir genişlemesi olacaktır. Böylece α −katı halkalar ile ilgili önceden bilinen pek çok sonuç bizim teoremlerimizin bir sonucu olarak elde edilecektir.

3. Soldan $\alpha -$ yarı değişmeli Halkalar

Bu bölümdeki amacımız soldan α −yarıdeğişmeli halka kavramını tanıtmak ve bu halka sınıflarının özelliklerini incelemek olacaktır. Soldan α −yarıdeğişmeli halka kavramı sadece α −katı halkaların bir genelleştirmesi değil aynı zamanda yarıdeğişmeli halkalarında bir genelleştirmesidir. Aşağıdaki tanımı vererek başlayalım.

Tanım 3.1. R bir halka ve α da R nin bir endomorfizması olsun. $a, b \in R$ için

$$ab = 0 \ \Longrightarrow \alpha(a)Rb = 0$$

oluyorsa, bu durumda α ya $soldan\ yarıdeğişmeli$ dir denir. Eğer R halkasının soldan α yarı değişmeli bir α endomorfizması varsa, bu durumda R halkasına $soldan\ \alpha - yarıdeğişmeli$ halka denir.

I_R; R halkasının birim endomorfizması olmak üzere; eğer R soldan I_R −yarıdeğişmeli ise, bu durumda açık olarak R halkası yarı değişmelidir. Soldan α −yarıdeğişmeli bir halkanın $\alpha(S) \subseteq S$ şartını sağlayan her bir S alt halkasıda aynı zamanda soldan α −yarıdeğişmeli bir halkadır.

Uyarı 3.2. R bir soldan α −yarıdeğişmeli bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $\alpha(a)Rb = 0$ ve özel olarak $\alpha(a)b = 0$ olur. R soldan α −yarıdeğişmeli halka olduğundan $\alpha^2(a)Rb = 0$ elde ederiz. Böylece tümevarım hipotezinden herhangi bir k pozitif tamsayısı için

$$\alpha^k(a)Rb = 0 \text{ ve } \alpha^k(a)b = 0$$

olur.

Yukarıdaki tanımdaki gerektirmenin tersinin genellikle sağlanmadığını aşağıdaki örnekten görürüz. Aşağıdaki örnek aynı zamanda R soldan α −yarıdeğişmeli olmayacak şekilde yarıdeğişmeli bir R halkasının bir α endomorfizmasının var olduğunu gösterir.

Örnek 3.3. $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ halkası olsun. R değişmeli ve inmiş halka olduğundan da R yarıdeğişmeli bir halkadır. R halkasının

$$\alpha: R \to R,\ \alpha\big((a,b)\big) = (b,a)$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda açık olarak $\alpha; R$ nin bir otomorfizmasıdır. $a = (1,0),\ b = (1,0) \in R$ için $\alpha(a)Rb = 0$ fakat $ab = (1,0) \neq 0$ dır. Üstelik, R soldan α −yarıdeğişmeli değildir. Gerçekten;

$$(1,0), (1,0) \in R \text{ için } (1,0)(1,0) = (0,0)$$

fakat

$$(0,0) \neq \alpha\big((1,0)\big)(1,1)(0,1) \in \alpha\big((1,0)\big)R(0,1)$$

dir.

Teorem 3.4. Bir R halkasının α −katı olması için gerek ve yeter koşul R nin inmiş soldan α −yarıdeğişmeli bir halka ve α nın bir monomorfizma olmasıdır.

İspat. R; α −katı bir halka olsun. Bu durumda kolayca görülebilir ki R inmiş ve α bir monomorfizmadır. Şimdi R nin soldan α −yarıdeğişmeli olduğunu gösterelim.

Bunun için $a, b \in R$ ve $ab = 0$ olsun. $r \in R$ keyfi olsun. R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha(a)rb)\alpha(a)rb &= \alpha\big(\alpha(a)\big)\alpha(r)\alpha(b)\alpha(a)rb \\ &= \alpha\big(\alpha(a)\big)\alpha(r)\alpha(ba)rb \\ &= \alpha\big(\alpha(a)\big)\alpha(r)\alpha(0)rb \\ &= \alpha\big(\alpha(a)\big)\alpha(r)0rb \\ &= 0\end{aligned}$$

olup, R; α −katı olduğundan $\alpha(a)rb = 0$ ve R keyfi olduğundan da $\alpha(a)Rb = 0$ elde edilir.

Tersine olarak $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olsun. R soldan α −yarıdeğişmeli halka olduğundan $\alpha(a)R\alpha(a) = 0$ ve özel olarak da

$$\alpha(a)\alpha(a) = \alpha(a^2) = 0$$

elde edilir. α monomorfizma olduğundan $a^2 = 0$ ve R inmiş olduğundanda $a = 0$ bulunur ki, bu da bize R nin α −katı olduğunu gösterir.■

Aşağıdaki örnek Teorem 3.4. deki "R bir inmiş halka" ve "α bir monomorfizma " şartlarının kaldırılamayacağını gösterir.

Örnek 3.5. (1) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere

$$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

halkasını göz önüne alalım.

$$\beta: R \to R, \qquad \beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Açık olarak α bir otomorfizmadır. R halkasının inmiş olmadığı ve böylece de β −katı olmadığı kolayca görülebilir.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R \text{ için } AB = O$$

olsun. Buradan $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ olur. Keyfi bir $\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix} \in R$ için

$$\begin{aligned}\beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & k \\ 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ahc & ahd + akc - bhc \\ 0 & ahc \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. $ac = 0$ ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası sıfır bölensiz olduğundan $a = 0$ veya $c = 0$ olur. Eğer $c = 0$ ise, bu durumda $bc = 0$ olur. Böylece $\beta(A)RB = O$ olur. Eğer $a = 0$ ise, bu durumda $ad = 0$ olur. Böylece tekrar $\beta(A)RB = O$ olur. Sonuç olarak R bir soldan β −yarıdeğişmeli halka olur.

(2) F bir cisim ve $R = F[x]$ olsun.

$$\alpha: R \to R\,, \quad \alpha\big(f(x)\big) = f(0)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon açık olarak R

halkasının bir endomorfizmasıdır. Bu durumda R halkası değişmeli tamlık bölgesi ve böylece de inmiş halka olur. Ayrıca, açık olarak α bir monomorfizma değildir. $f(x)$, $g(x) \in R$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda $f(x) = 0$ veya $g(x) = 0$ olur. Böylece $\alpha\big(f(x)\big) = 0$ veya $g(x) = 0$ olur. Sonuç olarak $\alpha\big(f(x)\big)Rg(x) = 0$ elde edilir ki bu da bize R halkasının soldan α −yarıdeğişmeli olduğunu gösterir. $0 \neq x \in R$ için $x\alpha(x) = 0$ olduğundan R halkası α −katı değildir.

Eğer R halkası bir tamlık bölgesi ise, bu durumda R hem yarıdeğişmeli hem de R nin her α endomorfizması için soldan α −yarıdeğişmeli dir. Örnek 3.5(1) aynı zamanda tamlık bölgesi olmayan fakat soldan α −yarıdeğişmeli bir R halkasının var olduğunu gösterir.

Önerme 3.6. R soldan α −yarıdeğişmeli bir halka olsun. Bu durumda;

(i) $\alpha(1) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olmasıdır.

(ii) Eğer $\alpha(1) = 1$ ise, bu durumda R abelian halkadır. (Yani R deki tüm idempotentler merkezil dir.)

İspat. (i) $\alpha(1) = 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $e^2 = e \in R$ ise, bu durumda $e(1-e) = 0$ ve $(1-e)e = 0$ olur. R soldan α −yarı değişmeli olduğundan $\alpha(e)R(1-e) = 0$ ve $\alpha(1-e)Re = 0$ elde edilir. Özel olarak $\alpha(e)(1-e) = 0$ ve $\alpha(1-e)e = 0$ olur. $\alpha(e)(1-e) = 0$ dan $\alpha(e) = \alpha(e)e$ elde edilir. $\alpha(1-e)e = 0$ dan $\big(1-\alpha(e)\big)e = 0$ ve böylece de $\alpha(e)e = e$ olur. Sonuç olarak $\alpha(e) = e$ bulunur. Tersi açıktır.

(ii) $\alpha(1) = 1$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. (i) deki gibi $\alpha(e)R(1-e) = 0$ ve $\alpha(1-e)Re = 0$ olduğunu görürüz. Böylece (i) den dolayı $eR(1-e) = 0$ ve $(1-e)Re = 0$ olur. O halde her $r \in R$ için $er(1-e) = 0$ ve $(1-e)re = 0$ olurki buradan $er = ere = re$ bulunur. Sonuç olarak R bir abelian halkadır.■

Örnek 3.7. $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ halkasını ve

$$\alpha: R \to R, \quad \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

endomorfizmasını göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R \text{ için } AB = O$$

olsun. Bu durumda $cf = 0$ ve böylece de $c = 0$ veya $f = 0$ elde ederiz. Bu ise $\alpha(A)RB = 0$ olduğunu verir. Sonuç olarak R soldan α −yarıdeğişmeli bir halkadır. $\alpha(1) \neq 1$ ve R nin abelian olmadığı açıktır.

Sonuç 3.8. Yarı değişmeli halkalar abelian dır.

R bir halka ve M de bir (R, R) −bimodül olsun. Bu durumda

$$T(R, M) = R \oplus M = \{(r, m) | r \in R, m \in M\}$$

kümesi bileşensel toplama ve

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu $T(R, M)$ halkası $\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \middle| r \in R,\ m \in M\right\}$ matris halkasına izomorftur. α; R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $\bar{\alpha}: T(R, R) \to T(R, R)$

$$\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

fonksiyonu da $T(R, R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır.

Örnek 3.9. Örnek 3.5.(1) deki soldan α −yarıdeğişmeli R halkasını göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R, R),$$

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R, R)$$

için $AB = O$ dır. Fakat

$$C = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R,R)$$

İçin

$\bar{\alpha}(A)CB =$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan $\bar{\alpha}(A)T(R,R)B \neq O$ olur. Böylece $T(R,R)$ soldan α −yarıdeğişmeli değildir.

Önerme 3.10. R inmiş bir halka olsun. Eğer R soldan α −yarıdeğişmeli bir halka ise, bu durumda $T(R,R)$ soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli halkadır.

İspat. İlk olarak R nin inmiş bir halka olması için gerek ve yeter koşulun

$$"a,b \in R \text{ için } ab^2 = 0 \Rightarrow ab = 0"$$

olduğunu gösterelim. Bunun için R inmiş bir halka ve $a,b \in R$ için $ab^2 = 0$ olsun. Bu durumda $abb = 0$ dır.

Diğer taraftan $(ab)^2 = abab = a0 = 0$ ve R inmiş olduğundan $ab = 0$ bulunur. Tersine

$$"a,b \in R\ için\ ab^2 = 0 \Rightarrow ab = 0"$$

olsun. R nin inmiş olduğunu gösterelim. Bunun için $r \in R$ için $r^2 = 0$ olsun. Buradan $1r^2 = 0$ olup hipotezden $1r = 0$ yani $r = 0$ bulunur. Sonuç olarak R inmiş halka olur. Şimdi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R,R) \text{ için } AB = O$$

olsun. Bu durumda $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ olur. Böylece

$$0 = ad + bc = (ad + bc)c = bc^2 = 0$$

ve R inmiş olduğundan $bc = 0$ ve böylece de $ad = 0$ olur. R soldan α −yarıdeğişmeli halka olduğundan $\alpha(a)Rc = 0, \alpha(b)Rc = 0$ ve $\alpha(a)Rd = 0$ olur. Sonuç olarak $\bar{\alpha}(A)T(R,R)B = 0$ olur ki bu da bize $T(R,R)$ nin soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli olduğunu gösterir.■

Sonuç 3.11. Eğer R bir α −katı halka ise, bu durumda $T(R,R)$ soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli bir halkadır.

İspat. Teorem 3.4. ve Önerme 3.10. dan açıktır.

Bir R halkasının $T(R,R)$ aşikar genişlemesi

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a,b,c,d \in R \right\}$$

halkasına genişletilebilir. Eğer $\alpha: R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda

$\bar{\alpha}: S_3(R) \longrightarrow S_3(R),$

$$\bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) & \alpha(c) \\ 0 & \alpha(a) & \alpha(d) \\ 0 & 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

fonksiyonu da bir homomorfizmadır.■

Örnek 3.12. Örnek 3.3. deki $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ değişmeli inmiş halkasını ve bu halkanın $\alpha((a,b)) = (b,a)$ otomorfizmasını göz önüne alalım. Bu durumda $S_3(R)$ halkası soldan $\bar{\alpha}$ −yarı değişmeli bir halka değildir. Gerçekten;

$$A = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (1,0) \end{pmatrix} \in S_3(R),$$

$$B = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,1) \end{pmatrix} \in S_3(R)$$

için $AB = O$ dır. Fakat $\bar{\alpha}(A)BB = B = O$ olduğundan $\bar{\alpha}(A)S_3(R)B \neq O$ dır.

Önerme 3.13. R bir inmiş halka olsun. Eğer R soldan α −yarıdeğişmeli bir halka ise, bu durumda

$$S_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a,b,c,d \in R \right\}$$

halkası soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli bir halkadır.

İspat.

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & a' & d' \\ 0 & 0 & a' \end{pmatrix} \in S_3(R)$ için

$$AB=O$$

olsun.

Bu durumda aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$(1)\ aa'=0,$

$(2)\ ab'+ba'=0,$

$(3)\ ac'+bd'+ca'=0,$

$(4)\ ad'+da'=0.$

R soldan α −yarıdeğişmeli halka olduğundan (1) denkleminden $\alpha(a)Ra'=0$ olur.

(2) denkleminden $(ab'+ba')a'=b(a')^2$ ve R inmiş halka olduğundan $ba'=0$ olur. Benzer olarak (4) denkleminden $da'=0$ ve $ad'=0$ buluruz. Aynı zamanda (3) denkleminden

$$(ac'+bd'+ca')a'=c(a')^2$$

ve buradan $ca'=0$ elde edilir. Böylece (3) denklemi $ac'+bd'=0$ haline gelir. Bu durumda

$$0=a(ac'+bd')=a^2c'$$

ve böylece $ac'=0$ ve buradan da $bd'=0$ olur. R soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli olduğundan

$$\alpha(a)Ra'=0, \alpha(a)Rb'=0, \alpha(b)Ra'$$
$$=0, \alpha(a)Rc'=0, \alpha(a)R$$
$$=0, \alpha(b)Rd'=0, \alpha(c)Ra'$$
$$=0, \alpha(d)Ra'=0$$

olur. Bunları kullanarak $\bar{\alpha}(A)S_3(R)B=O$ olduğunu görebiliriz ki, bu da bize $S_3(R)$ halkasının soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli halka olduğunu gösterir.

Sonuç 3.14.

$([Kim,\ N.K\ and\ Lee,\ Y.,\ 2003,\ Önerme\ 1.2.])$ R bir inmiş halka olsun. Bu durumda $S_3(R)$ halkası yarı değişmeli bir halkadır. $n\geq 2$ bir tamsayı olmak üzere bir R α −katı halkası için

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R \right\}$$

olsun. Önerme 3.13. göz önüne alınarak $n\geq 4$ için $S_n(R)$ halkasının da soldan $\bar{\alpha}$ −yarı değişmeli bir halka olacağı zannedilebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu durumu ortadan kaldırır.

Örnek 2.15. R bir α − katı halka ve

$$S_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, a_{ij} \in R \right\}$$

olsun. R bir α −katı halka olduğundan $([Hung,\ C.Y,\ Kim,\ N.K\ and\ Kwak,\ T.K,\ 2000,\ Önerme\ 5])$ gereğince her $e^2=e\in R$ için $\alpha(e)=e$ dir. Böylece özel olarak $\alpha(1)=1$ dir.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R),$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R)$$

İçin $AB=O$ dır. Fakat

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_4(R)$$

İçin

$$\bar{\alpha}(A)CB=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan $\bar{\alpha}(A)S_4(R)B \neq O$ olur. Yani $S_4(R)$ halkası soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli bir halka değildir. Benzer şekilde $n \geq 5$ içinde $S_n(R)$ halkasının soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli bir halka olmadığı gösterilebilir.

Her bir $i \in \Gamma$ için R_i bir halka ve α_i lerde R_i halkalarının endomorfizmaları olsun. Bu durumda

$$\bar{\alpha}: \prod_{i\in\Gamma} R_i \to \prod_{i\in\Gamma} R_i\,, \quad \bar{\alpha}\big((a_i)\big) = \big(\alpha_i(a_i)\big)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda $\prod_{i\in\Gamma} R_i$ halkasının bir endomorfizmasıdır.

Önerme 3.16. $\prod_{i\in\Gamma} R_i$ halkasının soldan $\bar{\alpha}$ −yarıdeğişmeli olması için gerek ve yeter koşul her bir R_i halkasının soldan α_i −yarıdeğişmeli halka olmasıdır.

İspat. Açıktır.■

Kaynaklar

Başer, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K., 2009. On Extended Riversible Rings. *Algebra Colloquium*, **16**(1), 37-48.

Başer, M.,Harmancı, A. And Kwak, T.K., 2008. Generalized Semicommutative Rings and Their Extensions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **45**(2), 285-297.

Cohn, P.M., 1999. Reversible rings. *Bulletin of the London Mathematical. Society,* **31**, 641-648.

Habeb, J.M., 1990. A note on zero commutative and duo rings. *Mathematical Journal of Okayama University*, **32**, 73-76.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K., 2000. Ore extensions of Baer and p.p.-rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **151**(3), 215-226.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K., 2003. On skew Armendariz rings. *Communications in Algebra*, **31**(3), 103-122.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K., 2005. Extensions of generalized reduced rings. *Algebra Colloquium*, **12**(2), 229-240.

Huh, C. , Lee, Y. and Smoktunowicz, A., 2002. Armendariz rings and semicommutative rings. *Communications in Algebra*, **30**(2) 751-761.

Kim, N.K. and Lee, Y., 2000. Armendariz rings and reduced rings. *Journal of Algebra*, **223**, 477-488.

Kim, N.K. and Lee, Y., 2003. Extensions of reversible rings. *Journal of Pure Applied Algebra*, **185**, 207-223.

Krempa, J., 1996. Some examples of reduced rings. *Algebra Colloquium,* **3**(4), 289-300.

Rege, M.B. and Chhawchharia, S., 1997. Armendariz rings. *Japan Academy. Proceedings. Series A. Mathematical Sciences,* **73**, 14-17.