



**Mustafa Halûk Saraçoğlu**

Dumlupınar University, mhaluk.saracoglu@dpu.edu.tr, Kütahya-Turkey

**Mehmet Tevfik Bayer**

Dumlupınar University, mtevfik.bayer@dpu.edu.tr, Kütahya-Turkey

**Yunus Özçelikörs**

Eskişehir Osmangazi University, yunuso@ogu.edu.tr, Eskişehir-Turkey

<http://dx.doi.org/10.12739/NWSA.2015.10.1.1A0356>

**ÖZEL ORTOTROP TABAKALI PLAKLARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ŞEKİL DEĞİŞTİRME ANALİZİ**

**ÖZET**

Bu çalışmada özel ortotrop tabakalı plaklar modellenerek denge denklemleri oluşturulmuştur. Bu denge denklemleri sonlu farklar yöntemi ile çözülmüştür. Bunun için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Sonlu fark bölüm sayısına göre değişen plak orta noktasının çökme değeri incelenerek doğru sonlu fark bölüm sayısı tespit edilmiş ve buna göre orta düzlemin şekil değişikliği elde edilmiştir. Dört kenarından Navier SS-1 sınır şartlarına sahip özel ortotrop tabakalı plaklar çeşitli yükleme durumlarına göre incelenmiştir. Konu ile ilgili literatürdeki örnekler çözümlenerek elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlar ile büyük bir uyum içerisinde olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Özel Ortotrop Tabakalı Plak, İnce Plak, Sonlu Farklar Metodu, Navier SS-1, Plak Orta Nokta Çökmesi

**DISPLACEMENT ANALYSIS OF SPECIALLY ORTHOTROPIC LAMINATED PLATES BY FINITE DIFFERENCE METHOD**

**ABSTRACT**

In this study; specially orthotropic laminated plates are modeled and equilibrium equations are obtained. These equilibrium equations are solved by finite difference method. A computer code is developed for this purpose. Depending on the finite difference mesh size the correct plate mid-point deflection value is determined and displacement of the mid-plane are obtained. Specially orthotropic laminated plates having Navier SS-1 boundary conditions at the four edges are analyzed for various loading conditions. Some examples which are taken from literature are solved and it is observed that our results are in good agreement with them.

**Keywords:** Specially Orthotropic Laminates, Thin Plate, Finite Difference Method, Navier SS-1, Plate Mid-Point Deflection

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Plaklar yüzeysel taşıyıcı sistemlerdir. Günümüzde yapı mühendisliğinin yanında gemi ve uçak mühendisliği gibi alanlarda da kullanılmaktadır [1]. Bu çalışmada özel ortotrop tabakalı plaklar bazı kabullere göre modellenerek denge denklemleri oluşturulmuştur. Oluşturulan bu denge denklemlerinin diferansiyel formu ise sayısal çözüm yöntemlerinden sonlu farklar yöntemi ile yapılmıştır. Dört kenarından Navier SS-1 sınır şartlarına sahip özel ortotrop tabakalı plaklar çeşitli yükleme durumlarına göre incelenmiştir.

Mühendisliğin pek çok alanında uygulama alanı bulan plaklar, yeni malzeme tekniklerinin gelişmesiyle teorik ve pratik çalışmalar yapan mühendislerin sürekli olarak ilgi alanında kalmaktadır. Timoshenko ve Woinowsky-Krieger 'in yazmış oldukları kitap bu konudaki temel çalışmalardan birisidir [2]. Daha sonra J. Ye, R. Szilard, C. Hwu gibi araştırmacılar da bu konuda kitap yazmışlardır [3, 4 ve 5]. Reddy ve Gera yayınladıkları makalelerinde sonlu farklar yöntemi kullanarak ince plakların analizlerini gerçekleştirmişlerdir [6]. A. Houmat, değişken aralıklı liflerden oluşmuş özel ortotrop tabakalı plakların serbest titreşimlerini incelemiştir [7]. Caprino ve Crivelli Visconti özel ortotrop tabakalı plaklar hakkında yaptıkları çalışmalarını bir not olarak yayınlamışlardır [8]. Reddy kitabında özel ortotrop tabakalı plakların klasik tabakalı plak teorisi ile analizini bir bölüm olarak sunmuştur [9]. Saraçoğlu ve Özçelikörs, yaptıkları çalışmada tabakalı kompozit plakların sonlu farklar yöntemi ile statik analizini sunmuşlardır [10].

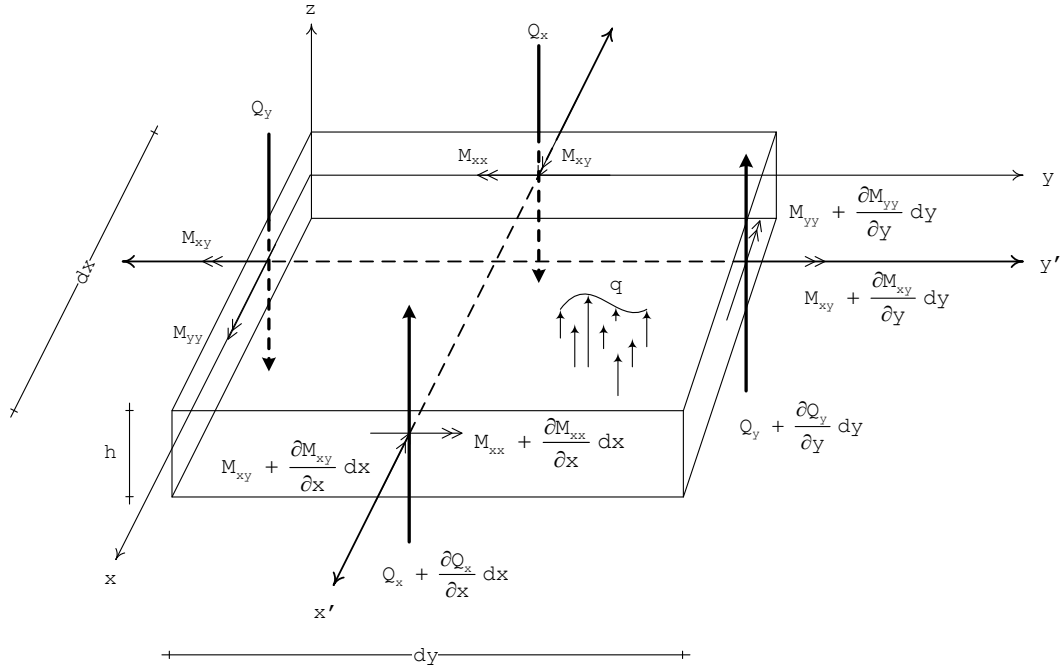
## 2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFICANCE)

Özel ortotrop tabakalı plaklarda, plağı oluşturan tabakalar kompozit malzemeden imal edilmiş olup bir doğrultuda liflerle güçlendirilmişlerdir. Kompozit tabakalı plaklarda, tüm tabakalardaki liflerin doğrultuları aynı ise ortotrop tabakalı plaklar elde edilir. Eğer lif doğrultuları plağın incelendiği düzlem içi eksenlere (x veya y) paralel olursa özel ortotrop tabakalı plaklar elde edilmiş olur. Bu çalışmada, basit mesnetli dikdörtgen özel ortotrop tabakalı plakların şekil değiştirme analizi Sonlu Farklar Yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Sonlu Farklar Yönteminde kurulan Sonlu Fark Ağı'nın büyüklüğüne göre çözülecek olan lineer denklem takımının büyüklüğü değişir. Buna göre çözüm için gerekli bilgisayar kapasite ihtiyacı da değişir. Kurulan bu denklem takımındaki katsayı matrisinin band matris olma özelliği kullanılarak ve iyi bir programlama tekniği ile bu ihtiyaç azaltılmış, çözüm için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

## 3. MATERYAL VE METOT (MATERIAL AND METHOD)

### 3.1. Materyal (Material)

Belirli bir yayılı q yükü ile yüklü yüzeysel taşıyıcı plak elemanında kesit zorları Şekil 1'de gösterilmektedir. Düşey z eksenini yönündeki denge denklemleri yazıldığında plak denklemleri elde edilir.



Şekil 1. Plak elemanında moment ve kesme kuvveti yönleri [2]  
(Figure 1. Moment and shear force directions on plate element [2])

Plak denklemleri moment ifadeleri cinsinden şu şekildedir:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow M_{xx,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + q = 0 \quad (1)$$

Bu plak denklemindeki moment ifadeleri özel ortotrop tabakalı plaklar için  $D_{ij}$  eğilme rijidlikleri ve  $w_0$  plak orta düzlemi çökmesinin bazı türevleri ile ifade edilirse şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -(D_{11} w_{0,xx} + D_{12} w_{0,yy}) \\ M_{yy} &= -(D_{12} w_{0,xx} + D_{22} w_{0,yy}) \\ M_{xy} &= -(2 D_{66} w_{0,xy}) \end{aligned} \quad (2)$$

Bu ifadelerdeki  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$  eğilme rijidlikleri  $N$  toplam tabaka sayısı olmak üzere  $\bar{Q}_{ij}$  sabitlerine ve tabakanın  $z$  kalınlık koordinatına bağlı olarak şu şekilde ifade edilir:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) = \sum_{k=1}^N D_{ij}^k \quad (3)$$

Kompozit bir tabakada lifler tek yönlü olarak düzenlendiğinde lif doğrultusunda yüksek dayanım ve rijitlik olur.  $D_{ij}$  eğilme rijidliklerinin ifadelerindeki  $\bar{Q}_{ij}$  sabitleri özel ortotrop tabakadaki lif eksenini ile problem eksenindeki  $\theta$  oryantasyon açısına da bağlı olarak şu şekilde tarif edilir:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2 (Q_{12} + 2 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2 (Q_{12} + 2 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 Q_{12} - 2 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)\end{aligned}\quad (4)$$

Bu tariflerdeki  $Q_{ij}$  ifadeleri ise dört bağımsız elastik sabit ( $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ ) ile tarif edilir.

$$\begin{aligned}Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{\nu_{12} E_2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \\ Q_{66} &= G_{12}\end{aligned}\quad (5)$$

Bu moment ifadeleri plak denkleminde kullanılırsa bu durumda özel ortotrop tabakalı plakların düşey yönde denge denklemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$D_{11} w_{0,xxxx} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) w_{0,xyxy} + D_{22} w_{0,yyyy} = q \quad (6)$$

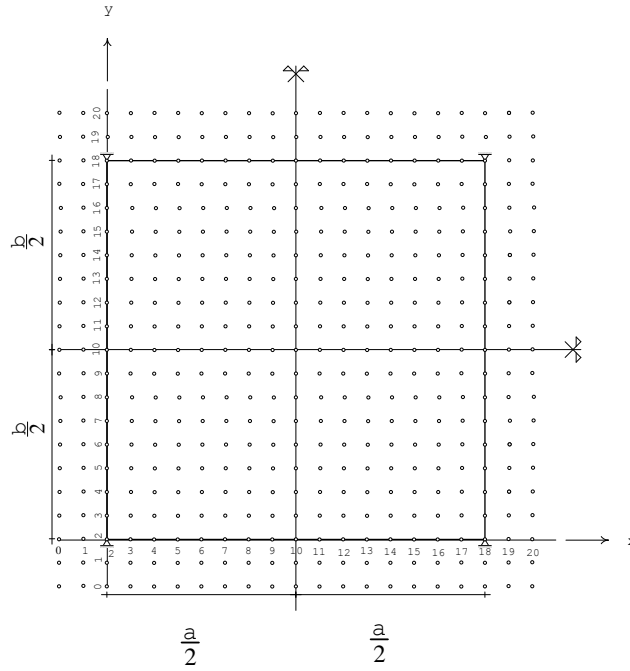
Bu dördüncü mertebeden diferansiyel denklemde  $w_0$  çökmeleri bilinmeyenlerdir.

### 3.2. Metot (Method)

Özel ortotrop tabakalı plakların şekil değiştirme analizinde  $w_0$  düşey çökme değerleri 6 ifadesindeki diferansiyel denklemlerin çözümü neticesinde elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Sonlu farklar yönteminde sınır şartlarının gerçekleşmesi kesindir fakat diferansiyel denklemin sağlanması yaklaşıktır. Bu çalışmada incelenen plaklar basit mesnetlidir [9].

Sonlu farklar yönteminde çözüm için diferansiyel denklemdeki türevlerin yerine sonlu fark ağı düğüm noktalarındaki  $w_0$  değerlerinin konulması gerekir. Çalışmada, [10] nolu referansın ekler kısmından alınan sonlu fark ifadeleri kullanılmıştır. Bu şekilde düğüm noktalarındaki  $w_0$  yer değiştirmeleri cinsinden lineer denklem takımları elde edilmektedir. Elde edilen bu denklemler çözülerek her nokta için bilinmeyen  $w_0$  düşey çökme değerleri hesaplanır. Şekil 2'deki gibi bir plağın çeyreğinde x eksenini yönündeki bölüm sayısı n ve y eksenini yönündeki bölüm sayısı m olmak üzere plakta n x m sonlu fark ağı oluşturulur. Sonlu farklar yönteminde bölüm sayısı arttıkça deplasman değerleri kesin sonuca daha da yaklaşmaktadır. Özel ortotrop tabakalı plakta hesaplanan  $\bar{w}_0$  plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri ile m bölüm sayısı arasındaki ilişkiyi gösteren bir grafik çizildiğinde teorik olarak grafiğin yataya teğet haline gelmesi gerekir. Bu yatay teğetin  $\bar{w}_0$  eksenini kestiği değer en doğru  $\bar{w}_0$  boyutsuz orta nokta çökme değeridir.

Yapılan çözümlerde m sayısı çok büyük olduğunda bu eğrinin yataya teğet olarak kalmadığı ve beklenen teorik davranıştan sapıldığı görülmüştür. Bu durumda eğrinin dönüm noktasındaki  $\bar{w}_0$  boyutsuz orta nokta çökme değeri doğru değere en yakın olarak kabul edilir.



Şekil 2. Sonlu fark ağ noktaları [1]  
(Figure 2. Finite difference mesh points [1])

$h$  plağın  $z$  yönündeki kalınlığı,  $a$  plağın  $x$  yönündeki uzunluğu,  $q$   $z$  ekseninin tersi yönünde etki eden yükün şiddeti ve  $E_2$  elastisite modülü olmak üzere  $w_0$  çökmeleri aşağıdaki şekilde boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\bar{w}_0 = w_0 \times \frac{E_2 h^3}{a^4 q} \quad (7)$$

En doğru  $\bar{w}_0$  boyutsuz orta nokta çökme değerini veren sonlu fark bölüm sayısı  $m$  hesaplandıktan sonra elde edilen bu değere göre plağın çeyreğinin tüm sonlu fark noktalarındaki  $\bar{w}_0$  boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır.

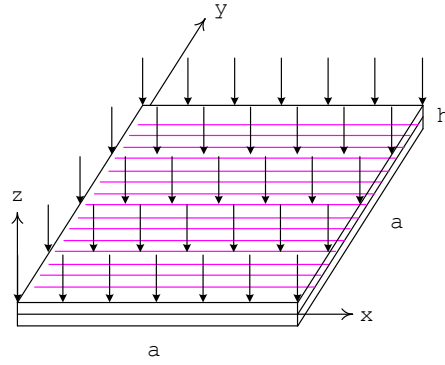
#### 4. ÖRNEKLER VE TARTIŞMA (EXAMPLES AND DISCUSSION)

Geliştirilen bilgisayar programı yardımıyla sonlu farklar metodu kullanılarak geometrileri, malzemeleri ve yükleme durumları farklı olan özel ortotrop plak çözümleri yapılabilmektedir. Örnek olarak, cam-epoksi malzemesinden imal edilmiş düzgün yayılı yük taşıyan özel ortotrop kare plak, sinüzoidal yayılı yük taşıyan özel ortotrop kare plak ve düzgün yayılı yük taşıyan özel ortotrop dikdörtgen plak problemleri ayrı başlıklar altında aşağıda çözülmüşlerdir.

##### 4.1. Örnek 1 (Example 1)

Cam-epoksi malzemesinden imal edilmiş  $q_0$  düzgün yayılı yük taşıyan basit mesnetli özel ortotrop kare plakta plak orta düzleminin çökme değerleri hesaplanmıştır [6].

Cam-epoksi için malzeme özellikleri  $E_1=7.8 \times 10^6 \text{psi}$ ,  $E_2=2.6 \times 10^6 \text{psi}$ ,  $\nu_{12}=0.25$  ve  $G_{12}=1.3 \times 10^6 \text{psi}$  şeklindedir. Bu malzeme özellikleri oran olarak ise  $E_1/E_2=3$ ,  $G_{12}/E_2=0.5$  şeklindedir. Bu örnekteki kare plağın kenar uzunlukları  $a$  ve kalınlığı  $h$ 'dir (Şekil 3).



Şekil 3. Düzgün yayıllı yüklerle yüklü basit mesnetli özel ortotropik kare plak  
(Figure 3. Simply supported specially orthotropic square plate under uniformly distributed load)

Referanstaki[6] plak orta noktasının boyutsuz çökme değerinin ( $\bar{w}'_0$ ) bu çalışmada kullanılan boyutsuz çökme değeri ( $\bar{w}_0$ ) ile uyumlu hale gelmesi için  $\lambda$  çarpanı kullanılmalıdır.

$$\bar{w}'_0 = \lambda \bar{w}_0 \quad (8)$$

$\lambda$  çarpanı malzeme özelliklerine bağlı olup aşağıda tarif edilmektedir.

$$\lambda = \left( \frac{\nu_{12} \times E_1}{12 \times (E_1 - \nu_{12}^2 \times E_2)} + \frac{G_{12}}{6 \times E_2} \right) \times 10^3 \quad (9)$$

$\lambda$  çarpanı cam-epoksi malzemesi için şu şekildedir:

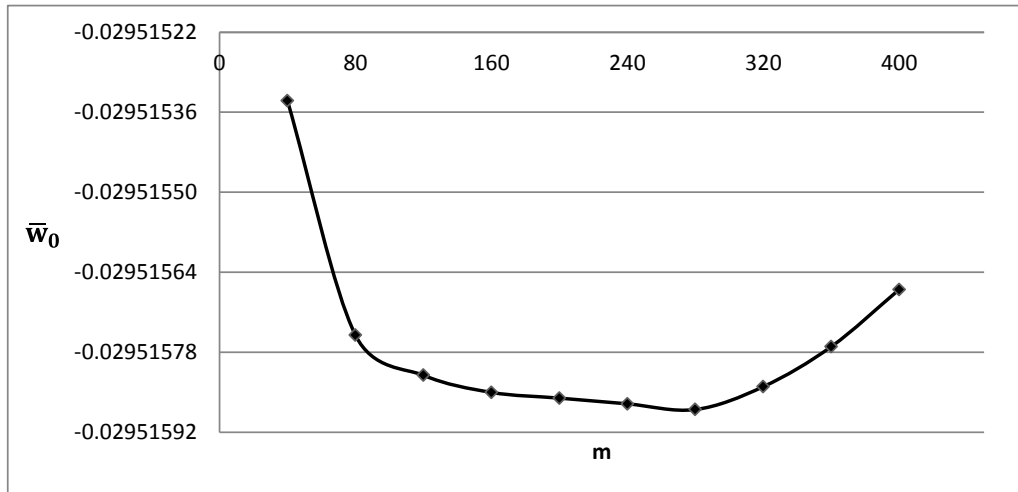
$$\lambda^{ce} \cong 104.61 \quad (10)$$

Sonlu fark ağı bölüm sayısına göre plak orta noktasının boyutsuz çökme değerinin değişimi Tablo 1'de ve Şekil 4'te gösterilmiştir.

Tablo 1. Düzgün yayılı yüklerle yüklü özel ortotrop (cam-epoksi) kare plağın plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri  
(Table 1. Nondimensionalized mid-point deflection values of a specially orthotropic (glass-epoxy) square plate under uniformly distributed load)

m	$\bar{w}_0$	Eğim	Eğrilik
40	-0.02951534		
80	-0.02951575	-1.01E-08	
120	-0.02951582	-1.90E-09	5.15E-12
160	-0.02951585	-6.22E-10	8.02E-13
200	-0.02951586	-2.54E-10	2.30E-13
240	-0.02951587	-4.01E-10	-9.23E-14
280	-0.02951588	-1.07E-11	2.44E-13
320	-0.02951584	9.65E-10	6.10E-13
360	-0.02951577	1.57E-09	3.76E-13
400	-0.02951567	2.48E-09	5.68E-13

Bu problemde orta noktanın doğru çökme değerine karar verilirken eğimin işaret değiştirdiği nokta dikkate alınmıştır. Buna göre m=280 için hesaplanan -0.02951588 değeri, özel ortotrop (cam-epoksi) kare plakta plak orta noktasının doğruya en yakın boyutsuz çökme değeridir. Bu değer hesaplanan  $\lambda$  çarpanı ile referanstaki boyutsuz çökme değerine dönüştürüldüğünde -3.08765 elde edilir.



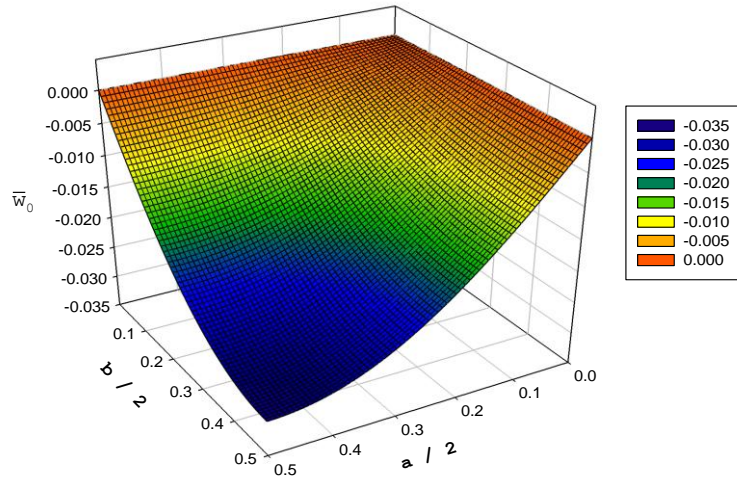
Şekil 4. Düzgün yayılı yüklerle yüklü özel ortotrop (cam-epoksi) kare plağın plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri  
(Figure 4. Nondimensionalized mid-point deflection values of a specially orthotropic (glass-epoxy) square plate under uniformly distributed load)

Elde edilen orta noktanın boyutsuz çökme değeri, Tablo 2'de görülen (-3.0876) referans değerinden %0.002 farklılık göstermektedir. Pratik olarak bu çökme değerleri aynı kabul edilmelidir.

Tablo 2. Düzgün yayılı yükü yüklü özel ortotrop (cam-epoksi) kare plağın plak orta noktasının  $\bar{w}'_0$  boyutsuz çökme değerleri[6]  
(Table 2. Nondimensionalized mid-point deflection values  $\bar{w}'_0$  of a specially orthotropic (glass-epoxy) square plate under uniformly distributed load [6])

Ağ	Reddy&Gera	% Fark	Reddy MFEM	% Fark	Bu çalışma	%Fark
2 x 2	-2.6816	-13.149	-3.104	0.534	-	-
4 x 4	-2.9844	-3.342	-3.093	0.175	-	-
6 x 6	-3.0416	-1.490	-3.090	0.081	-	-
280 x 280	-	-	-	-	-3.08765	0.002
kesin	-3.0876					

Sonlu fark bölüm sayısı  $m=280$  değerine göre plağın çeyreğinin tüm sonlu fark noktalarındaki  $\bar{w}_0$  boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır. Plağın şekil değiştirmesi grafik olarak Şekil 5'te gösterilmiştir.

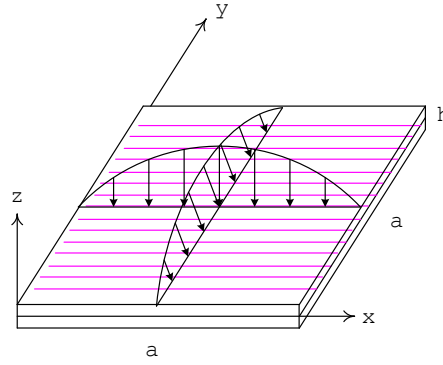


Şekil 5. Düzgün yayılı yükü yüklü özel ortotrop (cam-epoksi) kare plağın orta düzleminin çeyreğinin şekil değiştirmesi  
(Figure 5. Mid-plane displacements of quarter of the specially orthotropic (glass-epoxy) square plate under uniformly distributed load)

#### 4.2. Örnek 2 (Example 2)

Sinüzoidal yayılı yükü yüklü dört kenarından basit mesnetli özel ortotrop tabakalı kare plak için orta düzleminin boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır [9]. Bütün tabakalarda lif yönü aynıdır ve x yönündedir (Şekil 6). Malzeme özellikleri oran olarak  $E_1/E_2 = 25$ ,  $G_{12}/E_2 = 0.5$  ve  $\nu_{12} = 0.25$  şeklindedir.





Şekil 6. Sinüzoidal yayıllı yüklerle yüklü basit mesnetli özel ortotrop kare plak  
(Figure 6. Simply supported specially orthotropic square plate under sinusoidally distributed load)

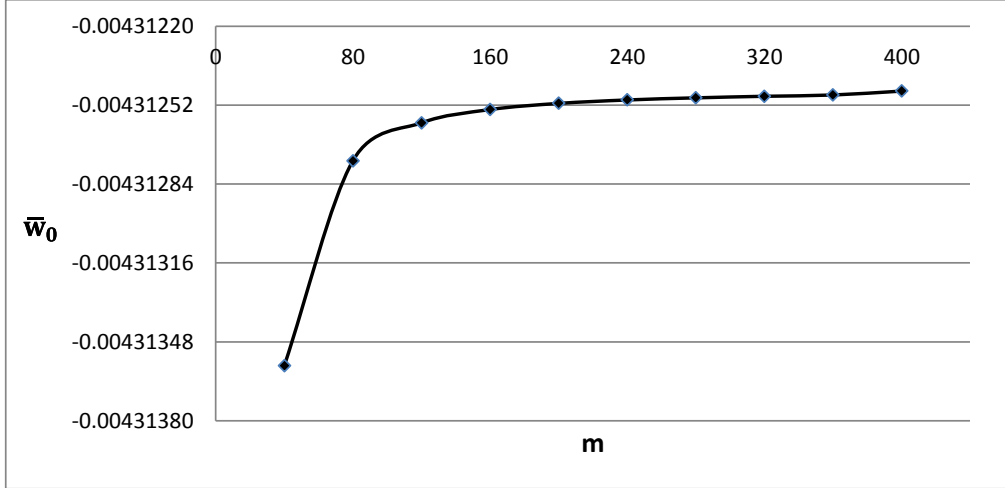
Sonlu fark ağı bölüm sayısına göre plak orta noktasının boyutsuz çökme değerinin değişimi Tablo 3'te ve Şekil 7'de gösterilmiştir.

Sinüzoidal yayıllı yüklerle yüklü özel ortotrop tabakalı kare plak için orta noktadaki boyutsuz çökme değeri 0.004312'dir[9]. Referansta çökmenin işareti (+) kabul edilmektedir.

Tablo 3. Sinüzoidal yayıllı yüklerle yüklü özel ortotrop tabakalı kare plağın plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri  
(Table 3. Nondimensionalized mid-point deflection values of a specially orthotropic laminated square plate under sinusoidally distributed load)

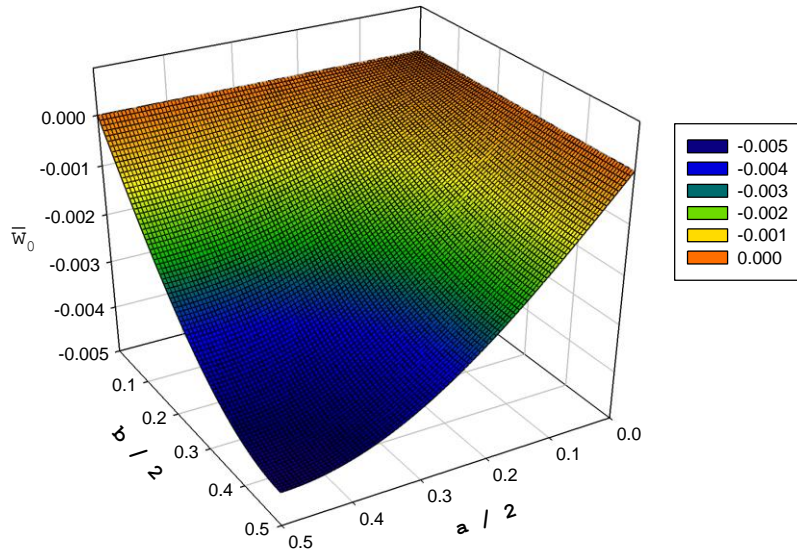
m	$\bar{w}_0$	eğim	eğrilik
40	-0.0043135777		
80	-0.0043127462	2.08E-08	
120	-0.0043125923	3.85E-09	-1.06E-11
160	-0.0043125383	1.35E-09	-1.56E-12
200	-0.0043125133	6.25E-10	-4.53E-13
240	-0.0043124993	3.50E-10	-1.71E-13
280	-0.0043124907	2.16E-10	-8.43E-14
320	-0.0043124844	1.56E-10	-3.73E-14
360	-0.0043124791	1.33E-10	-1.43E-14
400	-0.0043124633	3.95E-10	1.64E-13

Bu problemde plak orta noktasının doğru çökme değerine karar verilirken eğriliğin değiştiği nokta dikkate alınmıştır. Buna göre  $m=360$  için hesaplanan  $-0.00431248$  değeri sinüzoidal yayıllı yüklerle yüklü özel ortotrop tabakalı kare plak için plak orta noktasının doğruya en yakın boyutsuz çökme değeridir. Hesaplanan boyutsuz çökme değeri, referanstaki çözüm ile %0.011 farklılık göstermektedir.



Şekil 7. Sinüzoidal yayılı yüküyle yüklü özel ortotrop tabakalı kare plağın plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri  
(Figure 7. Nondimensionalized mid-point deflection values of a specially orthotropic laminated square plate under sinusoidally distributed load)

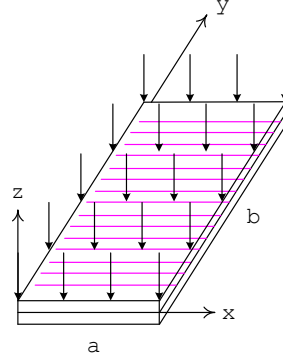
Sonlu fark bölüm sayısı  $m=360$  değerine göre plağın çeyreğinin tüm sonlu fark noktalarındaki  $\bar{w}_0$  boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır. Plağın şekil değiştirmesi grafik olarak Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 8. Sinüzoidal yayılı yüküyle yüklü özel ortotrop tabakalı kare plağın orta düzleminin çeyreğinin şekil değiştirmesi  
(Figure 8. Mid-plane displacements of quarter of the specially orthotropic laminated square plate under sinusoidal distributed load)

### 4.3. Örnek 3 (Example 3)

Düzgün yayılı  $q_0$  yükü ile yüklü dört kenarından basit mesnetli özel ortotrop tabakalı dikdörtgen plak için plak orta düzleminin boyutsuz çökme değeri hesaplanmıştır [1]. Bu tabakalı plak için x yönündeki a boyutu y yönündeki b boyutunun yarısıdır (Şekil 9). Bütün tabakalarda lif yönü aynıdır ve x yönündedir. Malzeme özellikleri oran olarak  $E_1/E_2 = 25$ ,  $G_{12}/E_2 = 0.5$  ve  $\nu_{12}=0.25$  şeklindedir.



Şekil 9. Düzgün yayılı yükü taşıyan basit mesnetli özel ortotrop dikdörtgen plak

(Figure 9. Simply supported specially orthotropic rectangular plate under uniformly distributed load)

Bu örnekte incelenen özel ortotrop tabakalı dikdörtgen plak problemi geliştirilen bilgisayar programı kullanılarak analiz edilmiştir [1]. Plakın y yönündeki bölüm sayısı m ve x yönündeki bölüm sayısı n olmak üzere m sayısı artırılarak hesaplanan  $\bar{w}_0$  plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri Tablo 4'te listelenmiştir. Tablo 4 kullanılarak Şekil 10'daki grafik çizilmiştir.

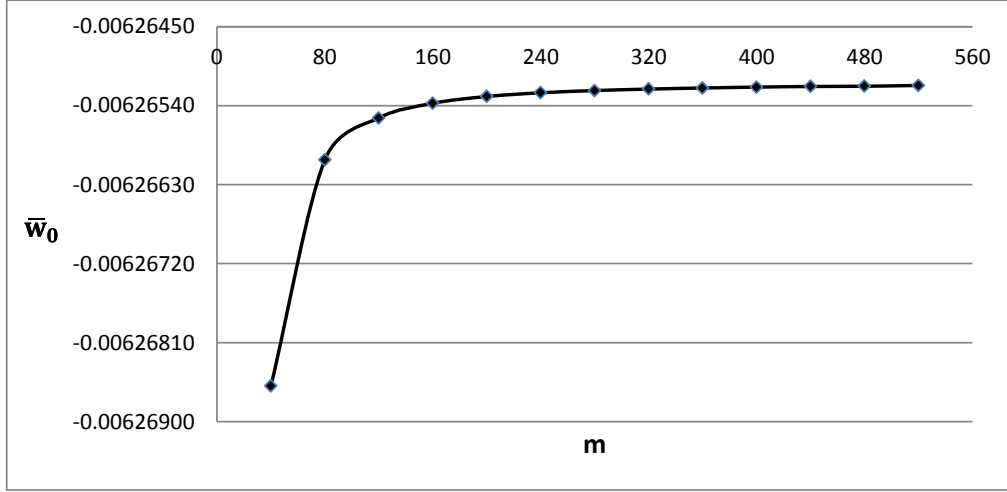
Tablo 4. Düzgün yayılı yükü taşıyan özel ortotrop tabakalı dikdörtgen plakın plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri

(Table 4. Nondimensionalized mid-point deflection values of a specially orthotropic laminated rectangular plate under uniformly distributed load)

n	m	$\bar{w}_0$	Eğim	Eğrilik
20	40	-0.0062685965		
40	80	-0.0062660185	6.45E-08	
60	120	-0.0062655409	1.19E-08	-3.28E-11
80	160	-0.0062653738	4.18E-09	-4.85E-12
100	200	-0.0062652963	1.94E-09	-1.40E-12
120	240	-0.0062652540	1.06E-09	-5.50E-13
140	280	-0.0062652284	6.41E-10	-2.60E-13
160	320	-0.0062652116	4.20E-10	-1.38E-13
180	360	-0.0062651994	3.04E-10	-7.21E-14
200	400	-0.0062651891	2.57E-10	-2.95E-14
220	440	-0.0062651820	1.79E-10	-4.85E-14
240	480	-0.0062651792	6.97E-11	-6.86E-14
260	520	-0.0062651701	2.26E-10	9.76E-14

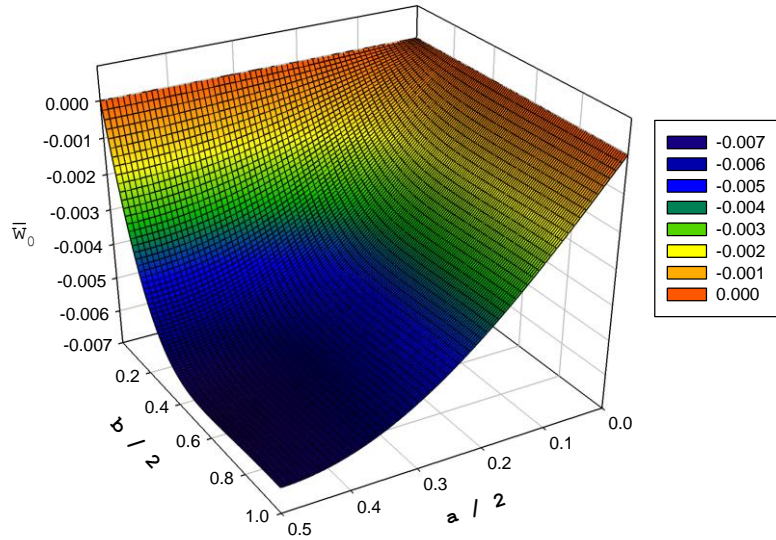
Bu problemde plak orta noktasında doğruya en yakın çökme değerine karar verilirken eğriliğin işaret değiştirdiği nokta dikkate alınmıştır. Buna göre  $m = 480$  için hesaplanan  $-0.00626518$  değeri, özel

ortotrop tabakalı dikdörtgen plakta plak orta noktasının boyutsuz çökme değeridir [1].



Şekil 10. Düzgün yayılı yüklerle yüklü özel ortotrop tabakalı dikdörtgen plağın plak orta noktasının boyutsuz çökme değerleri  
(Figure 8. Nondimensionalized mid-point deflection values of a specially orthotropic laminated rectangular plate under uniformly distributed load)

Sonlu fark bölüm sayısı  $m=480$  ve  $n=240$  değerine göre plağın çeyreğinin tüm sonlu fark noktalarındaki  $\bar{w}_0$  boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır. Plağın şekil değiştirmesi grafik olarak Şekil 11'de gösterilmiştir.



Şekil 11. Düzgün yayılı yüklerle yüklü özel ortotrop tabakalı dikdörtgen plağın orta düzleminin çeyreğinin şekil değiştirmesi  
(Figure 11. Mid-planedisplacements of quarter of the specially orthotropic laminated rectangular plate under uniformly distributed load)

## 5. SONUÇ (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada özel ortotrop tabakalı plakların sehim değerlerinin belirlenmesinde sonlu farklar yöntemi kullanılmış, sayısal hesaplama geliştirilen bir bilgisayar programı yardımıyla yapılmıştır. Navier SS-1 sınır şartlarına uygun basit mesnetli plaklarda düşey yönde denge denklemi yazılarak plak denklemi momentler cinsinden yazılmıştır. Plak denklemi özel ortotrop tabakalı plaklar için  $D_{ij}$  eğilme rijidlikleri ve  $w_0$  çökmesinin bazı türevleri ile ifade edilmiştir. Elde edilen bu dördüncü mertebeden diferansiyel denklemde  $w_0$  çökmeleri bilinmeyenlerdir. Bu bilinmeyenler sonlu farklar yöntemine göre oluşturulan lineer denklem takımının çözümü ile elde edilmiştir.

Sonlu fark bölüm sayısına göre değişen plak orta noktasının boyutsuz çökme değeri incelenerek doğru sonlu fark bölüm sayısı tespit edilmiş ve buna göre orta düzleminin şekil değişikliği elde edilmiştir. Konu ile ilgili üç örnek seçilerek çözümlerin sonucu, sonlu fark bölüm sayısı  $m$  ile plak orta noktası boyutsuz çökme değeri  $\bar{w}_0$  arasındaki ilişkiler tablo ve grafikler şeklinde sunulmuştur. Ayrıca, plağın çeyreğinin tüm sonlu fark noktalarındaki  $\bar{w}_0$  boyutsuz çökme değerleri de hesaplanarak orta düzleminin çeyreğinin şekil değiştirmesi grafik olarak gösterilmiştir. Literatürdeki konu ile ilgili örnekler bu çalışma kapsamında geliştirilen bilgisayar programı ile de çözümlenerek elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Buna göre; sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçların literatürdeki sonuçlar ile büyük bir uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

İleriki çalışmalarda basit mesnetli plakların analizi için yazılan bilgisayar programı farklı mesnet şartları için geliştirilerek çözümler yapılabilir. Ayrıca ilgili plakların dinamik analizi için de bu çalışma geliştirilebilir.

## KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Saraçoğlu, M.H., (2010). Değişken Kesitli Kompozit Çapraz Tabakalı Plakların Sonlu Farklar Metodu ile Gerilme ve Şekil Değiştirme Analizi. Doktora Tezi. Eskişehir: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
2. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S., (1959). Theory of Plates and Shells 2<sup>nd</sup> ed., Singapore: McGraw Hill.
3. Ye, J., (2003). Laminated Composite Plates and Shells, UK: Springer.
4. Szilard, R., (2004). Theories and Applications of Plate analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods, USA: John Wiley&SonsInc.
5. Hwu, C., (2009). Anisotropic Elastic Plates, USA: Springer.
6. Reddy, J.N. and Gera, R., (1979). An Improved Finite-Difference Analysis of Bending of Thin Rectangular Elastic Plates. Computers and Structures, Volume:10, No:3, pp:431-438.
7. Houmat, A., (2012). Nonlinear Free Vibration of a Composite Rectangular Specially-Orthotropic Plate with Variable Fiber Spacing. Composite Structures, Volume:94, No:10, pp:3029-3036.
8. Caprino, G. and Visconti, I.C., (1982). A Note on Specially Orthotropic Laminates. Journal of Composite Materials, Volume:16, No:5, pp:395-399.
9. Reddy, J.N., (2004). Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells-Theory and Analysis 2<sup>nd</sup> ed., USA: CRC Press.
10. Saraçoğlu, M.H. ve Özçelikörs Y., (2011). Tabakalı Kompozit Plakların Sonlu Farklar Yöntemi ile Analizi. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Volume:17, No:1, pp:51-62.