ISSN:1306-3111
e-Journal of New World Sciences Academy
2012, Volume: 7, Number: 4, Article Number: 3A0060

Sibel Açık Kemaloğlu[1]
Ömer L. Gebizlioğlu[2]
Ankara University[1]
Kadir Has University[2]
acik@science.ankara.edu.tr
omer.gebizlioglu@khas.edu.tr
Ankara-Turkey

NWSA-PHYSICAL SCIENCES
Received: February 2012
Accepted: September 2012
Series : 3A
ISSN : 1308-7304

BİNOM AYRILMALI İLERLEYEN II. TÜR SANSÜRLEME ALTINDA PARETO YAŞAM ZAMANI VERİLERİNİN İSTATİSTİKSEL ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada rasgele ayrılmalı ilerleyen II. tür sansürleme şeması altında Pareto dağılımına sahip yaşam zamanı verilerinin istatistiksel analizi ele alınmıştır. Söz konusu şemada, bir sistemde sistem birimlerinin bozulması veya hasarlı duruma düşmesine ilişkin bir gözlemleme veya deney tasarımı şeması olup rastgele zamanlarda oluşan her bir bozulma veya hasar vakası anında sistemden ayrılan birimlerin sayısı Binom dağılımı özelliklerine sahiptir. Bozulma veya hasar zamanları ile sistemden ayrılan birimlerin sayısını içeren model parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilmiştir. Böyle bir deneyin sonlandırılması için gereken beklenen süre hesaplanmıştır. İlerleyen II. tür sansürleme ve diğer örnekleme şemaları için beklenen test süreleri ile ilgili irdemeler ve bazı sayısal sonuçlar elde edilmiş ve yorumlamaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İlerleyen II. Tür Sansürleme, Rastgele Ayrılma, Binom Dağılımı, En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi, Beklenen Test Süresi

STATISTICAL ANALYSIS OF PARETO DISRIBUTED LIFETIME DATA UNDER TYPE II PROGRESSIVE CENSORING WITH BINOMIAL REMOVALS

ABSTRACT

This study considers the analysis of Pareto distributed lifetime data which are observable under progressive type II censoring with random removals, where the number of units removed at each failure time follows a binomial distribution. Maximum likelihood estimators of the model parameters are derived. The expected time that is required to complete the type II cencored experimental or observational sheme is determined. Some numerical computations of expected test times are performed for the scheme at hand and interpretation of results is provided.

Keywords: Progressive Type II Censoring, Random Removals, Binomial Distribution, Maximum Likelihood Estimator, Expected Test Time

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Geleneksel II. tür sansürleme şeması uygulanan deneysel veya gözlemsel çalışmalarda, bozulma veya hasar vakaları gözlemleme süreçlerinde sayısı baştan belirlenen toplam *n* birim bulunmaktadır; tüm birimlerin bozulmasına veya hasar durumuna uğramasına kadar beklemek yerine, *m*. inci $(1 \leq m \leq n)$ bozulma veya hasar zamanında deney veya gözlemleme bitirilmektedir. Böylece, bir II. tür sansürlenmiş şema altında, *n* birimlik bir kümede elde edilen m bozulma veya hasar sayısı ve bunlara ait rasgele vaka zamanları istatistiksel örneklemi oluşturmaktadır. Deney veya gözlem sürecine kısaca test denilecek olunursa; testin bitiş anından sonra başka zaman noktalarında olası bozulan veya hasara uğrayan birimlerin varlığı söz konusu olup bunların saptanması veya gözlenmesi mümkün olmamaktadır. Bu nitelikte bir deney veya gözlemleme süreci araştırmacıları ilerleyen tür sansürleme durumunda bırakır ki, II. tür sansürlemede deney veya gözlemlemenin bitiş noktasından sonra bozulma veya hasar vakası oluşumları kaydedilemez ve bilinemez hallerdir [1]. Mann vd.(1974), Lawless (1982) ve Meeker ve Escobar (1998) geleneksel ikinci tür sansürleme şeması üzerinde değişik yaşam zamanı dağılımlarını kullanarak çeşitli çalışmalar yapmışlardır.

II. tür sansürlemenin bir genelleştirilmesi ilerleyen II. tür sansürlemedir. Bu şema altında, sıfır zamanında *n* birim testte bulunacak ve *m* birimin bozulması veya hasarı (bundan sonra, kısaca bozulma denilecektir) gözlemlenecek olursa; ilk bozulma anının hemen ardından, rastgele olarak r_1 adet birimin sistemden, bir diğer deyişle testten ayrılacağı belirtilmektedir. Daha sonra gözlenen ikinci bozulmanın hemen ardından, rastgele olarak r_2 yaşayan birim testten ayrılır. Bu süreç *m*. bozulmanın gözlenme zamanına kadar sürer, kalan $r_m = n - r_1 - r_2 - \cdots r_{m-1} - m$ birimin hepsi deneyden ayrılır ve deney biter. Bu sansürleme şemasında $r_1, r_2, \ldots, r_m$ (ve dolayısıyla *m*) değerlerinin hepsi önceden belirlenmiştir. Bu sansürleme türünün bir sonucu olarak elde edilen *m* sıralı değer, ilerleyen II. tür sansürlenmiş sıra istatistikleri olarak adlandırılır. Eğer $r_1 = r_2 = \cdots = r_{m-1} = 0$, yani $r_m = n - m$ ise, şema II. tür sansürleme şemasına dönüşür. Bu durumda sadece ilk *m* klasik sıra istatistiği gözlenir. Eğer $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$ ve $m = n$ ise ilerleyen II. tür sansürleme şeması, sansürleme olmaması(tam örneklem durumu) durumuna dönüşür. Bu ise, bütün *n* klasik sıra istatistiklerinin gözlenmesi demektir [1 ve 2]. İlerleyen II. tür sansürleme altında yaşam zamanın dağılımının parametreleri ile ilgili istatistiksel çıkarımlar birçok kişi tarafından çalışılmıştır. Bunlardan çalışmamızı doğrudan ilgilendiren bazıları Cohen(1963), Mann (1971), Wingo (1973), Cohen ve Norgaard (1977), Gibbons ve Vance (1983), Wong (1993) ve Balakrishnan ve Sandhu (1996)'nun çalışmalarıdır.

Birbirinden bağımsız *n* adet birimin bir testte bulunduğu varsayılsın ve bunların bozulma veya hasara uğrama zamanlarına kadar geçen süreler yaşam zamanları olarak adlandırılsın. Yaşam zamanları dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve birikimli dağılım fonksiyonu $F(x)$ olsun. $X_{i:m:n}, i = 1,2,\ldots,m$ bu *m* gözlenebilir bozulma zamanlarını göstersin. Böylece bütün *m* ilerleyen II. tür sansürlenmiş sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{1:m:n},X_{2:m:n},\ldots,X_{m:m:n}}(x_1,x_2,\ldots,x_m)=c\prod_{i=1}^{m}f(x_i)\left[1-F(x_i)\right]^{r_i},\ x_1<x_2<\cdots<x_m \qquad (1)$$

ile ifade edilecektir. Burada $c=n(n-r_1-1)\cdots(n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}-m+1)$ dir.

Bu şemada $r_1,r_2,\cdots,r_m$ lerin hepsi önceden belirlenmiştir[1]. Halbuki uygulamada bu sayı rasgele olarak ortaya çıkabilir. Örneğin bir klinik testten ayrılan hastaların sayısı rastgeledir ve önceden belirlenemeyebilir. Bazı güvenirlik deneylerinde deneyi yapan kişi, bazı test birimlerinin bozulmamış olmasına rağmen, testi sürdürmesinin tehlikeli olacağına ya da uygun olmayacağına karar verebilir. Böyle durumlarda ayrılma modeli rastgeledir [10, 11, 14, 15 ve 16]. Rastgele ayrılmaların modellenmesi konusunda ilk düşünceyi Yuen ve Tse (1996) ortaya atmıştır. Onlar ayrılanların sayısını düzgün dağılım olarak ele almışlardır. Daha sonra Tse vd. (2000), ayrılanların sayısının dağılımını binom dağılımı olarak ele almış ve yaşam zamanı dağılımının parametreleri hakkında istatistiksel sonuç çıkarımı yapmıştır. Kemaloğlu ve Gebizlioğlu (2009) ise binom ayrılmalı ikinci tür sansürleme altında aktüeryal risk analizi konusunda analitik model geliştirmiş ve sayısal örneklerle açıklayıcı yorumlar ortaya koymuştur.

2. ÇALIŞMANIN ÖNEMİ (RESEARCH SIGNIFINANCE)

Literatürde her bir bozulma ya da hasarın ardından ayrılanların sayısı önceden belirlenmiştir. Halbuki uygulamada bu sayı rastgele olarak ortaya çıkabilir. Bu çalışmada ayrılanların sayısının dağılımı Binom dağılımı alınarak ilerleyen II. Tür sansürleme altında istatistiksel çıkarsamalar yapılmış, beklenen test süresi hesaplanarak tam örnekleme durumu ile karşılaştırılmıştır.

3. YÖNTEM(METHOD)

3.1. Binom Ayrılmalı İlerleyen II. Tür Sansürleme Altında Çıkarsama (Inference Under Type II Progressive Censoring With Binomial Removals)

Ayrılan birimlerin sayısı ne olursa olsun, genellikle her bir ayrılma olayı eşit bir olasılıkla ortaya çıkmayacaktır. Herhangi bir birim, diğerlerinden bağımsız olarak, p olasılığı ile testten ayrılıyorsa, testten bozularak ayrılanların sayısı binom dağılımını oluşturacaktır [10].

Sunduğumuz model yaklaşımında; yaşam zamanının dağılımı Pareto dağılımı olarak ele alınacak, ayrılmaların sayısının ise Binom dağılımına sahip olduğu varsayılacaktır.

3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi (Maximum Likelihood Estimator)

İlerleyen II. tür sansürleme şeması altında bir sistemdeki elemanların veya birimlerin bozulma anına kadar olan yaşam zamanı dağılımı *v* parametreli Pareto ise *X*'in yaşam zamanını gösterdiği Pareto olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\frac{v}{x^{v+1}},\quad x>1,\ v>0 \qquad (2)$$

ve birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x)=1-x^{-v},\quad x>1 \qquad (3)$$

dir. Notasyonlarda sadelik için $X_{i:m:n}$ yerine X_i kullanılsın. $X_1<X_2<\cdots<X_m$ Pareto dağılımdan alınan bir ilerleyen II. tür

sansürlenmiş örneklemi göstersin Testten ayrılmalar veya bozulmaların sayısı m önceden belirlenmiş olmak üzere; $X_1, X_2, \cdots, X_m$'nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, eşitlik (1)'den yola çıkarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_m}(x_1,x_2,\ldots,x_m) = c\prod_{i=1}^{m} f(x_i)\left[1-F(x_i)\right]^{r_i} = c\prod_{i=1}^{m} v x_i^{-(v+1)}\left[1-1+x_i^{-v}\right]^{r_i}$$
$$= cv^m \prod_{i=1}^{m} x_i^{-v-1} x_i^{-vr_i} = cv^m \prod_{i=1}^{m} x_i^{-v(r_i+1)-1} \tag{4}$$

Burada $c = n(n-r_1-1)\cdots(n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}-m+1)$dir.

Önceden belirlenmiş ayrılma sayılı $R=r$, ilerleyen II. tür sansürleme için koşullu olabilirlik fonksiyonu ifadesi

$$L(v \mid R=r) = cv^m \prod_{i=1}^{m} x_i^{-v(r_i+1)-1} \tag{5}$$

olup, burada *c* daha önce ifade (1)'de tanımlandığı gibidir.

R_i rastgele değişkenlerinin Binom dağılımına uygun olarak dağıldığı durumda, her birim *i*. bozulmanın ardından, aynı *p* olasılığı ile sistemden ayrılır. Bu durumda, bozulan birimlere dair olasılık dağılımı ifadesi koşullu olasılıkla belirtilebilir ve

$$P(R_i = r_i \mid R_{i-1} = r_{i-1},\ldots,R_1 = r_1) = \binom{n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j}{r_i} p^{r_i}(1-p)^{n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j} \tag{6}$$

ifadesini alır. Burada $0 \le r_i \le n-m-r_1-\cdots-r_{i-1},\ i=1,2,\ldots,m-1$'dir.

Aynı zamanda; R_i lerin X_i lerden bağımsız olduğu varsayılırsa, $X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ ve $R=(R_1,R_2,\cdots,R_m)$'nin ortak olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$L(x,r;v,p) = L(v \mid R=r)P(R,p)$$

Burada *P*(*R*,*p*), *R* 'lerin ortak olasılık dağılımı olup, fonksiyonel ifadesi

$$P(R,p) = P(R_{m-1}=r_{m-1} \mid R_{m-2}=r_{m-2},\ldots,R_1=r_1)\cdots(R_2=r_2 \mid R_1=r_1)P(R_1=r_1)$$

$$= \frac{(n-m-\sum_{j=1}^{m-2} r_j)!}{r_{m-1}!(n-m-\sum_{j=1}^{m-1} r_j)!} p^{r_{m-1}}(1-p)^{n-m-\sum_{j=1}^{m-1} r_j}\cdots$$
$$\frac{(n-m-r)!}{r_2!(n-m-r_1-r_2)!} p^{r_2}(1-p)^{n-m-r_1-r_2} \frac{(n-m_1)!}{r_1!(n-m-r_1)!} p^{r_1}(1-p)^{n-m-r_1} \tag{7}$$

$$= \frac{(n-m)!}{\prod_{i=1}^{m} r_i!(n-m-\sum_{j=1}^{m-1} r_j)!} p^{\sum_{j=1}^{m-1} r_j}(1-p)^{(m-1)(n-m)-\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)r_j}$$

olarak elde edilir. *P*(*R*,*p*), *v* parametresini içermediğinden *v* 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi (MLE), $L(x,v \mid R=r)$'nin en çoklanması veya maksimize edilmesiyle bulunur. Benzer şekilde $L(x,v \mid R=r)$, Binom dağılımı parametresi *p* 'yi içermediğinden, *p*'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $P(R,p)$'nin maksimize edilmesiyle bulunur. Diğer bir deyişle, rasgele ayrılmalar içeren ilerleyen sansürlemeye Binom dağılımının bütünleştirilmesi μ ve v parametrelerinin tahmininde herhangi bir zorluğa neden olmamaktadır. Buna göre, v'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$\log L(v \mid R=r) = \log\left(cv^m \prod_{i=1}^{m} x_i^{-v(r_i+1)-1}\right) = \log c + m\log v - \sum_{i=1}^{m}\big(v(r_i+1)-1\big)\log x_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(v \mid R=r)}{\partial v} &= \frac{m}{v} - \sum_{i=1}^{m}(r_i+1)\log x_i = 0 \\ &\Rightarrow \frac{m}{v} = \sum_{i=1}^{m}(r_i+1)\log x_i \\ &\Rightarrow \hat{v} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(r_i+1)\log x_i \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde elde edilir.

p 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi ise aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \ln P(R,p) &= \ln(n-m)! - \ln\prod_{i=1}^{m} r_i! - \ln\Big(n-m-\sum\nolimits_{j=1}^{m-1} r_j\Big)! + \ln p^{\sum_{j=1}^{m-1} r_j} \\ &\quad + \ln(1-p)^{(m-1)(n-m)-\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)r_j} \\ &= \ln(n-m)! - \ln\prod_{i=1}^{m} r_i! - \ln\Big(n-m-\sum\nolimits_{j=1}^{m-1} r_j\Big)! + \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} r_j \ln p \\ &\quad + \Big((m-1)(n-m) - \sum\nolimits_{j=1}^{m-1}(m-j)r_j\Big)\ln(1-p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P(R,p)}{\partial p} &= \frac{\sum_{j=1}^{m-1} r_j}{p} - \frac{(m-1)(n-m) - \sum_{j=1}^{m-1}(m-j)r_j}{1-p} = 0 \\ &= \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} r_j - p\Big((m-1)(n-m) - \sum\nolimits_{j=1}^{m-1}(m-j)r_j + \sum\nolimits_{j=1}^{m-1} r_j\Big) = 0 \end{aligned}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} r_j}{(m-1)(n-m) - \sum_{j=1}^{m-1}(m-j-1)r_j} \tag{9}$$

3.1.2. Beklenen Test Süresi (Expected Test Time)

Güvenirlilik ve risk yönetimi alanlarında pratik uygulamalarda testi gerçekleştiren kişi belirli bir zaman içinde testin tamamlanıp tamamlanamayacağı ile ilgilenebilir. Bu bilgi, deneyi yapan veya gözlemlemeyi yürüten kişi için uygun bir örnekleme planı seçmek adına önemlidir, çünkü testi bitirmek için gerekli süre, direkt olarak maliyet ile ilgilidir. Rasgele ayrılmalı ilerleyen II. tür sansürleme durumunda m. inci sıra istatistiğinin beklenen değeri hesaplanarak beklenen test süresi bulunur. Aşağıda beklenen test süresinin nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir. Bu belirlemelerle, tam örnekleme durumu ile Binom ayrılmalı II. tür sansürleme durumunun karşılaştırmasını yapmak gerek yöntemsel gerek uygulama bağlamında epeyce önemli bir konudur. Bu nedenle aşağıdaki sunumlarda θ, μ, m ve n'ye değerler vererek tam örnekleme durumu ile Binom ayrılmalı II. tür sansürleme şeması karşılaştırılacaktır.

$R=r$ olması koşulu ile X_m'nin beklenen değeri

$$E(X_m \mid R=r)=\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{\alpha_i-1}\quad,\ \alpha_i>1 \tag{10}$$

dir. Burada $\alpha_1=vn$ ve $\alpha_i=v(n-r_1-r_2-\cdots-r_{i-1}-i+1),\ i=2,3,...,m$ dir [1].

Böylece rastgele ayrılmalı ilerleyen II. tür sansürleme altında beklenen test süresi eşitlik (10) ifadesinin her iki tarafının *R* 'ye göre beklenen değerinin alınmasıyla hesaplanabilir. Başka deyişle, beklenen test süresi

$$\begin{aligned}
E(X_m)&=E_R\left[E(X_m \mid R=r)\right]=\sum_{r_1=0}^{g(r_1)}\sum_{r_2=0}^{g(r_2)}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{g(r_{m-1})}E(X_m \mid R=r)P(R,p)\\
&=\sum_{r_1=0}^{g(r_1)}\sum_{r_2=0}^{g(r_2)}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{g(r_{m-1})}\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{\alpha_i-1}\right]\\
&\quad P(R_{m-1}=r_{m-1}\mid R_{m-2}=r_{m-2},...,R_1=r_1)\cdots(R_2=r_2\mid R_1=r_1)P(R_1=r_1)\\
&=\sum_{r_1=0}^{g(r_1)}\sum_{r_2=0}^{g(r_2)}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{g(r_{m-1})}\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{v(n-r_1-r_2-...-r_{i-1}-i+1)}{v(n-r_1-r_2-...-r_{i-1}-i+1)-1}\right]\\
&\quad\frac{(n-m)!}{\prod_{i=1}^{m}r_i!(n-m-\sum_{j=1}^{m-1}r_j)!}\,p^{\sum_{j=1}^{m-1}r_j}(1-p)^{(m-1)(n-m)-\sum_{j=1}^{m-1}(m-j)r_j}
\end{aligned} \tag{11}$$

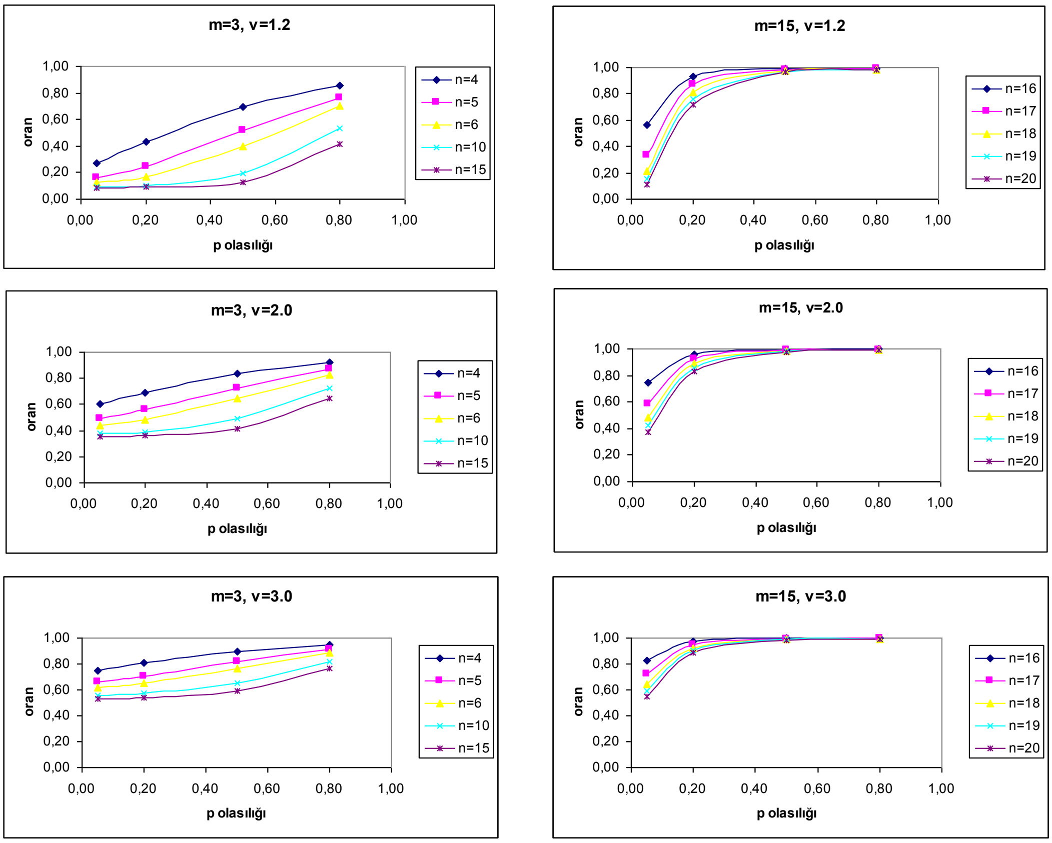
olarak bulunur.

Burada $g(r_1)=n-m$, $g(r_i)=n-m-r_1-r_2-...-r_{i-1}$, $i=2,3,...,m$ dir ve *P(R,p)* eşitlik (7)'de tanımlanmıştır. (11) eşitliğinde $r_1=r_2=\cdots=r_{m-1}=0$ alınarak II. tür sansürlemenin beklenen test süresi elde edilebilir. Benzer şekilde, (11) eşitliğinde $m=n$ ve $r_1=r_2=\cdots=r_m=0$ alınarak bir tam örnekleme planının beklenen süresi bulunabilir.

Ortaya konulan sonuçlarla rasgele ayrılmalı ilerleyen II. tür sansürlenmiş örneklemin ve tam örneklemin beklenen test süreleri elde edilmiştir. Yaşam testi üzerinde *n*, *m* ve *p*'nin etkilerini tespit etmek için bu iki beklenen süre karşılaştırılacaktır. Bu maksatla yapılan hesaplamalar aşağıda bir tablo halinde belirtilmiş, ilgili *n* ve *m* değerleri ile *v* ve *p* parametreleri arasındaki fonksiyonel ilişkiler ise grafiksel gösterimlerle ortaya konulmuştur. Şekil 1' de sunulan grafiklerde oran, ilerleyen II. tür sansürleme durumundaki beklenen test sürelerinin, tam örnekleme durumundaki beklenen test süresine bölünmesi ile elde edilmektedir.

Tablo 1. $E(X_m)$-İlerleyen II. tür sansürleme durumunda beklenen test süreleri
(Table 1. $E(X_m)$-Expected test times under porgressive type II censoring)

		v=1.2				v=2.0				v=3.0			
		ayrılma olasılığı *p*											
m	*n*	0.05	0.2	0.5	0.8	0.05	0.2	0.5	0.8	0.05	0.2	0.5	0.8
3	3	14.2418	14.2418	14.2418	14.2418	3.2000	3.2000	3.2000	3.2000	2.0250	2.0250	2.0250	2.0250
	4	3.8540	6.1964	9.8693	12.1939	1.9330	2.2187	2.6667	2.9501	1.5148	1.6298	1.8102	1.9244
	5	2.2881	3.4856	7.3145	10.9033	1.5726	1.7802	2.3175	2.7819	1.3392	1.4339	1.6628	1.8547
	6	1.8405	2.4283	5.6665	9.9601	1.4154	1.5563	2.0710	2.6539	1.2541	1.3249	1.5550	1.8007
	10	1.3661	1.4790	2.7623	7.6123	1,2009	1.2529	1.5600	2.3178	1.1283	1.1593	1.3169	1.6556
	15	1.2158	1.2706	1.7609	5.9606	1.1226	1.1514	1.3223	2.0637	1.0796	1.0976	1.1947	1.5425
6	6	25.0694	25.0694	25.0694	25.0694	4.4329	4.4329	4.4329	4.4329	2.5061	2.5061	2.5061	2.5061
	8	4.3631	11.4621	21.2084	23.6540	2.1341	2.9988	4.0387	4.2893	1.6256	1.9680	2.3603	2.4532
	10	2.4347	6.1902	18.4670	22.7246	1.6596	2.2978	3.7429	4.1924	1.3923	1.6788	2.2481	2.4169
	12	1.9369	3.9239	16.3634	22.0345	1.4701	1.9198	3.5059	4.1192	1.2885	1.5095	2.1564	2.3894
	18	1.4695	1.9971	12.1033	20.6322	1.2557	1.4638	2.9936	3.9673	1.1627	1.2813	1.9524	2.3316
	20	1.4030	1.8062	11.0947	20.2865	1.2222	1.3967	2.8647	3.9293	1.1422	1.2441	1.8996	2.3171
9	9	35.0075	35.0075	35.0075	35.0075	5.3917	5.3917	5.3917	5.3917	2.8514	2.8514	2.8514	2.8514
	10	14.7658	28.1154	33.9350	34.5342	3.5868	4.7771	5.2961	5.3495	2.2261	2.6385	2.8183	2.8368
	12	4.8383	18.7709	32.1479	33.7953	2.2906	3.8665	5.1338	5.2829	1.7052	2.3100	2.7616	2.8136
	15	2.5984	11.0677	30.0452	32.9949	2.1337	3.0016	4.9381	5.2097	1.4348	1.9781	2.6924	2.7880
	18	2.0397	7.1226	28.3734	32.4017	1.5194	2.4769	4.7787	5.1550	1.3178	1.7626	2.6354	2.7687
	20	1.8476	5.5621	27.4203	32.0774	1.4360	2.2378	4.6862	5.1248	1.2702	1.6591	2.6020	2.7580
15	15	53.4157	53.4157	53.4157	53.4157	6.9221	6.9221	6.9221	6.9221	3.3643	3.3643	3.3643	3.3643
	16	29.9414	49.7704	52.9458	53.1619	5.1362	6.6448	6.8864	6.9028	2.7918	3.2754	3.3528	3.3581
	17	17.9107	46.4696	52.5135	52.9338	4.0539	6.3881	6.8533	6.8854	2.4189	3.1922	3.3422	3.3525
	18	11.5607	43.4687	52.1131	52.7273	3.3698	6.1496	6.8226	6.8696	2.1659	3.1142	3.3323	3.3474
	19	8.0862	40.7309	51.7403	52.5389	2.9179	5.9276	6.7939	6.8552	1.9874	3.0408	3.3231	3.3428
	20	6.1008	38.2256	51.3916	52.3658	2.6058	5.7203	6.7670	6.8419	1.8564	2.9717	3.3144	3.3385



Şekil 1. Bozulma/ayrılma olaylarında *m*, *v*, *p* ilişkileri
(Figure 1. The relationship of *m*, *v*, *p* under removal events)

Tablo 1 tam örnekleme durumu yanı sıra, ilerleyen II. tür sansürleme altında, n, m, p ve v'nin farklı değerleri için beklenen test sürelerini göstermektedir. m ve n'nin birçok kombinasyonu düşünülmüş; $m = 3, 6, 9$ ve 15 alınmış ve bunlar için seçilen n değerleri Tablo 1'de listelenmiştir. Burada $m = n$ durumu tam örnekleme planına karşılık gelmektedir. Ayrılma olasılığı p'nin farklı değerleri incelenmiştir. Özellikle $p = 0.05$, 0.2, 0.5 ve $0,8$ değerleri tabloda listelenmiştir. Aslında p'nin diğer değerleri için de hesaplamalar yapılmıştır, ancak ayrıntılar gösterilmemiştir.

Verilen n ve m değerleri için beklenen test süresi v'ye bağlıdır. v değerleri arttıkça beklenen test süresi azalır. Sabit bir m değeri için, örneklem hacmi n artarken, rasgele ayrılmalı II. tür sansürlemenin beklenen test süresi azalmaktadır. Beklenen test süresindeki azalma, özellikle $v < 1.5$ değerleri için tam örnekleme şeması ile karşılaştırıldığında önemlidir, $v > 1.5$ iken azalma daha az önem taşımaktadır.

Tablo 1 deki sonuçlarda ayrılma olasılığı p'nin etkisi incelendiğinde, p 'nin test süresi üzerinde dominant bir etken olduğu görülür. Nispeten küçük p için, 0.05 ya da 0.2 gibi, v ya da m değerleri küçük olduğunda, tam örnekleme durumu ile karşılaştırıldığı zaman II. tür sansürleme şeması altında test süresinin daha çok kısaldığı görülmektedir. Diğer yandan p nispeten daha büyük olduğunda, test süresindeki kısalma daha azdır. Bu da, yüksek ayrılma olasılığından dolayı, ayrılmaların sayısının çok olmasına bağlıdır. Testin başlangıcında n birim bulunduğu halde, çalışmanın ilk evrelerinde bunların $n - m$ birimi testten ayrılacaktır. Bu da, gözlemleri yaşam zamanı dağılımının kuyruğuna daha yakın olmaya zorlayacaktır. O nedenle, rasgele ayrılmalı II. tür bir yaşam testini tamamlamak için gerekli deney süresi, m test biriminden m bozulma gözlenen bir tam örnekleme şemasındakine benzemektedir. Böylelikle, büyük bir p bozulma/ayrılma olasılığı söz konusu olduğunda, test birimi n'nin sayısını artırarak, rasgele ayrılmalı II. tür sansürlemede, deney süresinin kısalmasında fazla bir kazanç sağlanamayacağı görülmektedir.

Şekil 1, p olasılığının orana karşı grafiğini vermektedir. p olasılığı artarken oran 1'e yaklaşır. Bu artış özellikle m ve v büyük olduğunda hızlı olmaktadır, yani hızlı bir oranda test birimleri bozulmaktadır. Bu sonuçlar; m ve v değerleri küçük olmadıkça test süresinin önemli ölçüde kısaltılmayacağını işaret etmektedir.

4. SONUÇ (CONCLUSION)

Rastgele ayrılmalı II. tür bir sansürleme şeması altında irdelenen bir sistemin birimlerinin bozulması veya hasara uğraması sonucunda sistemden ayrılmalarına ilişkin bir deney veya gözlem sürecinin süresi en çok ayrılma olasılığı p tarafından etkilenmektedir. Eğer p çok büyük değilse(0.5'den küçük), deney süresindeki azalma önemli olabilir. Diğer yandan, p büyükse, test birimlerinin sayısı n büyük olduğunda bile, çoğu birim ilk evrelerde ayrılır ve deney bir tam örnekleme durumuna benzer. Bu nedenle, deney süresindeki kısalma nispeten daha azdır. Eğer deney veya gözlem sürecinde sistem birimlerinin testten ayrılma olasılığının yüksek olması bekleniyorsa, deney süresini bir ölçüde kısaltmak için, çok sayıda test birimi teste alınmalıdır. Bu da gerek pratik kısıtlar, gerek maliyetler gerek istatistiksel sonuç çıkarımı açısından çok anlamlı ve yaralı olmayacaktır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Balakrishnan, N. and Aggarwala, R., (2000). Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications, Birkhäuser, Boston.
2. Cohen, A.C., (1963). Progressively cencored samples in life testing, Technometrics, 5, pp.327-329
3. Cohen, A.C. and Norgaard, N. J., (1977.) Progressively censored sampling in the three parameter Gamma distribution, Technometrics, 19, pp.333–340.
4. Gibbons, D.I. and Vance, L.C., (1983). Estimators for the 2-parameter Weibull distribution with progressively censored samples, IEEE Transactionson Reliability, 32, pp.95–99.
5. Kemaloglu, S.A. and Gebizlioglu, O.L., (2009). Risk analysis under progressive type II censoring with binomial claim numbers, Journal of Computational and Applied Mathematics.Vol.233 (1), pp.61-72.
6. Lawless, J.F., (1982). Statistical Models & Methods for Lifetime Data, John Wiley&Sons, New York.
7. Meeker, W.Q. and Escobar, L.A., (1998). Statistical Methods for Reliability Data, Wiley, New York.
8. Mann, N.R., (1971). Best linear in variant estimation for Weibull parameters under progressive censoring, Technometrics, 13, pp.521–533.
9. Mann, N.R., Schafer, R.E., and Singpurwalla, N.D., (1974). Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, Wiley, New York.
10. Tse, S.K., Yang, C., and Yuen, H.K., (2000). Statistical analysis of weibull distributed lifetime data under Type II progressive censoring with binomial removals, Journal of Applied Statistics, Vol. 27, No. 8, pp.1033-1043.
11. Tse, S.K. and Yang, C., (2003). Reliability sampling plans for the Weibull distribution under type II progressive censoring with binomial removals, Journal of Applied Statistics, Vol. 30, No. 6, pp.709-718.
12. Wingo, D.R., (1973)Solution of the three-parameter Weibull equations by constrained modified quasilinearization (progressively censored samples), IEEE Transactionson Reliability, 22, pp.96–102.
13. Wong, J.Y., (1993). Simultaneously estimating the three Weibull parameters from progressively censored samples, Microelectronics and Reliability, 33, pp.2217–2224.
14. Wu, S.J. and Chang C.T., (2003). Inference in the Pareto distribution based on progressive type II censoring with random removals, Journal of Applied Statistics, Vol. 30, No. 2, pp.163-172.
15. Wu, S.J., (2003). Estimation for the two-parameter Pareto distribution under progressive censoring with uniform removals, Journal of Applied Statistics, Vol. 73(2), pp.125-134.
16. Yuen, H.K. and Tse, S.K., (1996). Parameters estimation for Weibull distributed lifetimes under progressive censoring with random removals, Journal of Statistical Computation and Simulation, 55, pp. 57-71.