Platon'un Matematiği*

Anders WEDBERG
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Gazi TOPDEMİR**

Her bilim felsefesi doğal olarak kendi zamanındaki bilim anlayışına ve elbette filozofun kendi bilimsel bilgi düzeyine bağlıdır. Platon'un matematik felsefesini anlamak için biz matematiğin Platon için ne anlam ifade ettiğini göz önünde bulundurmalıyız.[1]

Platon matematikten söz ettiğinde, genellikle aritmetik ve geometriyi, birincil düzeyde de geometriyi düşünür. Bazen de o ayrı bir disiplin olarak solid geometriyi vurgular ve astronomiyi (gök kinematiği) ve müzikal harmoni kuramını da ekler.[2] Fakat bu disiplinler ilk ifade edilenlerle kıyaslandığında çok az gelişmişlerdir ve Platon bunların çok azını kendi matematik felsefesinde söz konusu etmiştir. İzleyen sayfalarda ben bundan dolayı dikkatimi Platon'un aritmetik ve geometriyle ilgili görüşleri üzerinde yoğunlaştıracağım.

Geometri, Platon için kendi zamanında geliştirilmiş olan ve şimdi Euclid geometrisi olarak bilinenlerdi. Heat'e göre kuramların çoğu Platon zamanında halihazırda var olan *Elemetler*'de Euclid tarafından meydana getirilmiştir:

"Bu *nedenle, her ne kadar konunun biçimi, düzenlenişi ve özel durumlarda* kullanılan yöntemleri Euclid'de rastladığımızdan farklıysa da, Platon'un zamanına kadar geometri ve aritmetiğin düşünülen içeriğinde özce yer almayan, Eudoxus'un yeni orantı kuramı ve sonuçları hariç, Euclid'in *Elementler*'inin bütünü göz önüne alındığında, muhtemelen çok az şey vardır"[3]

Tüketim yöntemi seyrek olarak Eudoxus'tan önce kullanılmışsa da, bu yöntemin sistemli kullanımı bu matematikçiye aittir ve bu bir istisna sayılmalıdır.[4] Elbette Euclid'in kendisinin Grek geometrisini sistemleştirmesi Platon'un ölümüne kadar yazılmamıştı. Bununla birlikte, uygun bir terminolojik anachronism (çağ aşımı) ile, ben, Platon'un "Euclid Geometrisi" olarak düşündüğü geometriyi göstereceğim.

Şimdilerde bizim aritmetik olarak gösterdiğimiz alan içerisinde, Platon bazen "aritmetik" ve "lojistik" arasında bir ayrıma gider. Daha sonraki Grek matematik terminolojisinde bu kavram çifti sıklıkla sayı kuramı (modern anlamda) ve pratik hesaplama sanatı, somut sayısal problemlerle işlem yapma ve aynı zamanda kesirleri[5] hesaba katma, arasında kabaca bir ayrıma karşılık gelir. Fakat Platon'da bu ayrım diğer bir öneme daha sahip olmalıydı. *Devlet* ve *Philebus*'a göre "lojistik" gibi "aritmetiğin" de popüler ve felsefi iki türü vardır; ilki somut ("iki

---

* Adı geçen yazarın *Plato's Philosophy of Mathematics*, (Almqvist, Stockholm, 1955) adlı kitabının dördüncü bölümünün çevirisidir.

** A.Ü. Dil ve Tarih Coğrafya Fakültesi, Bilim Tarihi Anabilim Dalı Öğr. Üyesi

[1] Krş. I, 1.

[2] Matematik alanına ilişkin araştırmalar özellikle *Devlet* 522 d-531c'de; *Yasalar* 819 a-822c; *Epinomis* 990 a-991 b'de verilmiştir. Krş. Aynı zamanda *Gorgias* 450 c-451 c; *Phaedrus* 271 c-d; *Philebus* 55 c-57 e. *Devlet* 528 a-c'de stereometriden henüz varolmayan olarak söz edilmektedir.

[3] T. Heat: *A History of Grek Mathematics*, cil I, (Oxford 1921), s. 217.

[4] Krş. J. L. Coolidge: *The Mathematics of Great Amateurs* (Oxford 1949), s. 1.

[5] Krş. J. Klein: "Die Griechische Logistik und die Entstehung der Algebra", *Quellen und Studien* ..., B:3 (1936), özellikle ss. 29-36.

kol" ya da "iki öküz" gibi) sayılarla, ikincisi ise soyut matematik sayılarla ilgilidir.[1] *Gorgias*'da "aritmetik", "tek ve çiftin [sayılar] her birinin ne kadar büyük" olduğunun bilgisidir; oysa "lojistik"in ise "tek ve çiftin hem kendilerine göre hem de birbirlerine göre ne kadar büyük olduğunu soruşturduğu söylenmektedir.[2] Belki, Platon'un burada zihninde bulunan ayrıma göre, "lojistik" sayılar arasındaki aritmetiksel ilişkilerin kuramıyken, "aritmetik" ise basit anlamda sayma sanatıdır. *Ion* diyalogunda Socrates .... parmaklarının sayısının beş olduğunu aritmetik aracılığıyla sayarak bildiğini söyler.[3] Fakat Platon böyle bir ayrıma sıkı bir şekilde bağlanmış görünmemektedir. *Protogoras* diyalogunda, Socrates, zamana bağlı olarak değişime uğrayan görünüşler tarafından yanıltılmaksızın, zevklerin ve acıların boyutunu ölçebileceğimiz, bir ölçüm sanatına gereksinim olduğunu ileri sürer.

"Şimdi eğer, yaşamımızın korunması tek ya da çiftin seçimine bağlı olsaydı, her birini ister uzakta ister yakında olsun, kendisiyle ya da öbürüyle karşılaştırarak çoğu ya da azı seçmemiz gerekseydi, yaşamımızı ne koruyabilirdi ? Bu bir bilgi, (bilim) olmaz mıydı? Burada söz konusu, fazlalığı ve ya eksikliği ölçme sanatı olduğuna göre, bir ölçme bilgisi (bilimi), ve bu sanat tek ve çifte uygulandığına göre aritmetiğin bilgisi olmaz mıydı ? İnsanlar bunu kabul ederler mi, etmezler mi ?[4]

Burada açıkçası Socrates, aritmetiğe, *Gorgias*'ta lojistiğe yüklediği karşılaştırmalı sayılar fonksiyonuna benzer bir fonksiyonu yüklemektedir. Fakat belki, "aritmetik" ve "lojistik" arasındaki Platoncu ayrım diğer görüş noktalarından daha çok önemli[5] olsa da, bu incelemede bizi fazla ilgilendirmeyecektir. İzleyen sayfalarda ben, anachronistic olarak "aritmetik" terimini Platon'un zaman zaman çizdiği yukarıda belirtilen ayrımı içerisindeki bütün alanı örtecek şekilde kullanacağım.

Platon genellikle sayılar hakkında konuştuğunda, her zaman olmasa da, pozitif tam sayılar (1), 2, 3, ... dizisini düşünmektedir. Bunların tek (1), 3, 5, ... ve çift (2), 4, 6, ... sayılar gibi iki almaşık (alternating) diziye bölünmeleri açıkçası Platon'un gözünde diğer her hangi bir bölümlemeden daha temeldir. Bu yüzden o sıklıkla aritmetikten tek ve çift sayılar bilimi olarak söz eder.[6] *Parmenides* diyalogundaki bir pasajda, o pozitif tam sayılar dizisinin sonsuzluğunu açıkça belirtmekte ve bir kanıtlama vermektedir –ana çizgileriyle ve oldukça karmaşık bir şekilde, doğrudur.[7] Aynı diyalogda o, şimdilerde yineleme aracılığıyla kanıtlama ya da matematiksel tümevarım olarak bilinen şey aracılığıyla evrensel aritmetiksel

---

[1] *Devlet* 524 d-526 b, *Philebus* 56 d-57 a.

[2] *Gorgias* 451 a-c, Krş. *Karmides* 166 a, burada "lojistik" aynı biçimde açıklanmaktadır.

[3] *Ion* 537 e.

[4] *Protogoras*, 356 e-357 a.

[5] Krş. J. Klein: *op. cit.* And O. Becker: "Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente", *Quellen und Studien...*, B:3, (1936), ss. 548-550.

[6] Krş. Daha önce *Protogoras* ve *Gorgias*'tan alınan pasajlar ve ilaveten, *Gorgias* 453 e, *Karmides* 166 a, *Phaedo* 104 a-b, *Devlet* 510 c, *Theaetetus* 185 d, 198 a, *Devlet Adamı* 262 e, *Parmenides* 143 d-144a, *Epinomis* 990 c, Platon'un niçin tek ve çift sayılar arasında bir ayrımda ısrar ettiğinin ilginç olası bir nedeni O. Toeplitz: "Die mathematische Epinomis-stelle", *Quellen und Studien ...*, B: 2 (1933), ss. 335-336. Krş. Aynı zamanda O. Becker: *op. cit.*, s. 545.

[7] *Parmenides* 143 a-144a. Kanıtlama 1 ve 2'nin var olduğu sayıntısıyla başlar. Onlara ekleyerek 3'ü elde ederiz. Çarpma yoluyla 2x2, 3x3, ve 3x2'yi elde ederiz. Böylece çift kere çift, tek kere tek, çift kere tek ve tek kere çift ortaya çıkar. Böylece akıl yürütme her birinin sonsuz sayıda olduğu bir çok sayıyla sonuçlanır. Eğer Platon burada çarpmanın sınırsız, toplamanın da yalnızca 1 ve 2 örneğinde olduğunu söylüyorsa, bu yöntem bize yalnızca 2^a, 3^a ve $2^a \times 3^b$ biçimindeki sayıları vermektedir. Eğer her zaman 1'in toplanmasına olanak sağlanırsa, çarpmaya başvurmaksızın bütün sayıları elde ederiz. (Sayı dizilerini türetmek için çift kere tek ve tek kere çift arasındaki ayrımın önemi yoktur.) Verilen herhangi bir çift sayı örneğinde ancak, herhangi bir tek sayı örneğinde olmadığı durumda, 1'in toplanmasına izin veren sayı dizilerini üretme yöntemi *Phaedo* 105e'de ima edilmiştir. Krş. I, 3.

önermelerin kanıtlanma olasılığına bütünüyle yabancı olmadığının kanıtını verir.[1]

1 tam sayısının konumu Grek matematiğinde biraz belirsizmiş gibi görünmektedir. Sıklıkla 2'nin ilk sayı olduğu varsayılmaktadır. Nedeni sayının "birimlerin çokluğu" ya da böyle bir çokluğun "ölçüsü" olarak düşünülmesiydi ve verilen bir türün birimi olan 1 henüz bir çokluk değildi.[2] Bu görüşe uygun olarak, Platon *Devlet*'in yedinci kitabında, "sayı ve bir"i, anlatırken, 1'i bir sayı değil, 2, 3, ... ile eşit derecede bir şeymiş gibi açıklar[3] ve *Phaedo* diyalogunda ise açıkça tek sayılar dizisini 3, 5, ... ile aynı tutmaktadır.[4] Fakat açıkçası Platon da dahil Greklerin, bu noktada her zaman yanılmaz bir biçimde tutarlı olmadıkları görülmektedir. *Fizik* kitabının aynı bölümünde biz Aristoteles'in hem "en küçük sayıyı, kelimenin tam anlamıyla, 'sayı' 2'dir" hem de "sayı ile ilgili olarak minimum 1'dir (ya da 2) olduğunu söylediğini belirledik.[5] *Kanunlar*'ın yedinci kitabında Platon, aynı şekilde 1'in bir sayı olmadığı doktrinini unutur, insanın yazgısını tartıştığında, eğer "1'in, 2'nin, 3'ün ya da kısacası tek ve çift bütün sayıların bilgisi olmasaydı, bütünüyle saymak olanaksız olurdu" demektedir.[6] 1'in bir sayı olmadığı görüşü, genelde, Grek aritmetiği üzerinde etkisi olmayan felsefi bir görüş olarak kalmış gibidir. Aritmetiksel hesaplamalarda ve türetmelerde 1 genellikle 2, 3, ... sayılarıyla aynı değerde kabul edilmiştir.[7]

"0" sayısını ve negatif tam sayıları elbette, Platon bilmiyordu. Bu sayılar Avrupa matematiğine çok daha sonraki bir dönemde girmiştir.[8] Diophantus ilk kez pozitif tam sayılara benzer şekilde kesirleri aritmetiksel varlıklar olarak kabul etti. İlk dönem Grek matematiğinde kesirler yalnızca tam sayılar arasındaki ilişki

---

[1] *Parmenides* 149 a-c. Platon aşağıdaki biçimde biri diğeriyle ilişki içerisinde olan sonlu doğrusal terim dizileri düşünür:
Böyle bir dizide birbirini izleyen her hangi iki terim bir bağlantı oluşturur. Platon böyle bir dizide terimlerin sayıları ve bağlantı sayısı arasındaki ilişkiye değinir. Eğer dizi yalnızca bir terime sahipse, bağlantı yoktur ve bu bir dizi değildir. Bir bağlantı içeren terimlerin en az sayısı ikidir. Bağlantıların sayısı da birdir:
"Eğer ikiye hemen devamında bir üçüncü eklenirse 3 terim ve 2 bağlantı olacaktır. Böylece 1 eklendiğinde 1 bağlantı da eklenmiş olur. Her zaman bağlantıların sayısı terimlerin sayısının 1 eksiğidir. Çünkü her eklenen terim sayısı aynı ilk iki terimin bağlantılarının sayısının arttığı gibi, bütün bağlantıların sayısını aşacaktır. Çünkü birincisinden sonra her eklenen terim bağlantıların sayısını bir arttırır".
n terimine uygun bağlantıların sayısını C(n) şeklinde gösterebiliriz. Platon bizim dikkatimizi şu durumlara çekmektedir:
(i) $2=C(2)+1$
(ii) $C(n+1)=C(n)+1$,
Buradan her $n \geq 2$ için,
(iii) $n=C(n)+1$ olduğunu çıkarır.
Çünkü (ii) şunu gerektirir: (ii) eğer $n=C(n)+1$ ise, o zaman $n+1=C(n+1)+1$ olur. Bu da gerçekte, tekrar yoluyla düzenli bir kanıtlamadır. Benzer bir akıl yürütme İkinci Analitikler 42 b 1-10'da yer almaktadır. Euclid *Elemetler*'in IX. kitabının 8. önermesini esas itibariyle tekrar yöntemiyle kanıtlamaktadır.

[2] Krş. Euclid'in *Elementler*'i, VII. Kitap, tanım 2, buna göre "sayı birimlerden oluşan bir çokluktur". Crysippus, lamblichus'un 1 sayısını "çokluğun birliği" olarak düşündüğünü söylemektedir, fakat Iamblichus bu görüşü yanlış kabul ederek eleştirmektedir. Krş. T. Heat: *A History of Greek Mathematics*, cilt I, s. 69.

[3] *Devlet*, 524 d.

[4] *Phaedo* 104 a-b.

[5] *Fizik* 220 a 27-32. Krş. Aynı zamanda *Metafizik* 1080 a 30-35. Burada sayı ard arda devam eden "1, 2, 3, ..." diye adlandırılmaktadır. Bununla birlikte, Aristoteles'te etkin olan görüş, 1'in bir sayı olmadığı ve bu nedenle, 2'nin en küçük sayı olduğudur. Krş. v.d. Wielen: op. cit. 3. bölüm.

[6] *Kanunlar* 818 c. Krş. aynı zamanda *Büyük Hippias* 302 a.

[7] Her zaman değil fakat v. d. Wielen: op. cit., s. 14'de Euclid'in aritmetiksel bir önermeyi 1 (*Elementler*, VII. Kitap, 15. önerme) ve sayı (VII. Kitap önerme 9) için kanıtladığına işaret etmektedir.

[8] *Fizik* 215 b 12-13'de Aristoteles, 'hiçbir şey'in her hangi bir sayıyı aşabilen 'hiçbir şeyin' çarpımı gibi bir sayıya bir oran taşıyabileceğini yadsımaktadır. (Krş. T. Heat: *Mathematics in Aristotle*, s. 117.) Bu ifade bununla birlikte, bir sayı olarak 'hiçbir şeyin' (sıfır) tanınmasını gerektirmez.

anlamında düşünülmüştür.[1] Her ne kadar ölçüştürülemeyen geometrik büyüklüklerin varlığı Platon'un zamanındaki Grek matematikçilerince bilinmekteyse de, onlar hiçbir zaman irrasyonel sayıları karşılayan kuram oluşturmadılar. Oransızlık geometri alanıyla sınırlıydı.[2] Bu konuda Platon genel çağdaş matematik düşünce eğilimini izlemiş görünmektedir. *Yasalar* diyalogunda Platon oranlanabilir ve oranlanamaz çizgiler, yüzeyler ve cisimler arasındaki farkın anlaşılmasının önemini vurgulamaktadır.[3] *Theatetus* diyalogunda diyalogun adını aldığı matematikçi birim uzunluklarla oranlanamaz olan kare kökler genel kuramını uzun uzadıya açıklar. Theatetus'un sözleri geometrik bir oranlanamaz kavramı içermektedir. Örneğin iki sayısının kare kökü bir çizgi parçası olarak düşünülmüştür. Öyle ki, bu parçanın karesi birim kareninkinden iki kez daha büyük kenara sahiptir.[4] *Epinomis*'de (orijinalliği tartışmalı olan bir eser) geometrinin "kendileri farklı olan fakat yüzeylerine bakarak benzeştirilen" sayıların incelenmesi olduğunu belirttiği ilginç bir pasaj vardır.[5] Platon'un ifadelerini aşırı bir biçimde matematikte daha sonraki gelişmelerin sezilmesi olarak yorumlama eğiliminde olan A.E. Taylor, *Epinomis*'deki bu pasajın bağımsız geometrik gösterimlerin uygunsuzluğunun varlığına işaret ettiğine inanır. Fakat çok daha muhtemelen, Platon burada aşağıdaki anlamda "benzerlik"i düşünüyordu. a ve b gibi iki sayı, eğer a, a' . a" nin, ve b de b' . b" nin sonucuysa ve a'/a" = b'/b" yi oluşturuyorsa, "benzer"dir. Bu anlamda, örneğin, 1 ve 2 sayıları "kendi başlarına benzer değildir". Fakat bunlar hacimleri 1'e 2 olarak oranlanan kareler gibi iki benzer yüzey olduğu anlamında sayılar yüzeylere bakarak benzeştirilebilir.[6]

Her ne kadar Platon sıklıkla aritmetik ve geometri arasında kesin ayrım yapıyorsa da, ki bu farkı biz daha sonra ayrıntısıyla ele alacağız, onun aritmetiksel sayı kavramının, kendisince açıkça düşünülmemiş bir geometrik öğeye sahip olduğu çok açık olarak görünmektedir. Platon'un temel düşüncesinde geniş etkisi olan Pythagorcular'a göre sayılar (1), 2, 3...., muhtemelen uzaydaki noktaların düzenlenmesiyle benzerdir. Platon bu görüşe karşı çıkar ve bu karşı çıkışı ona aritmetiği geometriden radikal bir biçimde ayırmasına neden olur. Fakat bununla birlikte, Pythagorcu görüşten bir şey muhtemelen Platon'da kalır. Onun fikrinde

Aritmetiğin temel konusunu oluşturan ayrılmaz ve bölünemez olan ideal "birimler" Pythagorcu noktaların hayaletleri olarak görülmektedir.[7]

---

[1] Krş. *Devlet* 525 d-e, ve J. Klein: op. cit., ss. 45-52.

[2] Bu oransız olma *İkinci Analitikler* 76 b 9'da ifade edilen özel geometrik bir kavramdır.

[3] *Yasalar* 820 a-d. Orantısız büyüklükler aynı zamanda *Büyük Hippias* 303 b'de, *Devlet* 534 d'de ve *Parmenides* 140 b-c'de de açıklanmıştır.

[4] *Theatetus* 147 d-148 b.

[5] *Epinomis* 990 d-e.

[6] Taylor'un yorumu için, krş. onun "Formlar ve Sayılar: Platoncu Metafizik Üzerine İnceleme", *Mind*, 35-36, (1926-27). Burada benimsenen yorum O. Toeplitz tarafından "Die mathematische Epinomis-stelle"de ayrıntılandırılmıştır.

[7] Krş. S. 76.