SACCHERİ'NİN *EUCLİDES*'İ ÜZERİNE BİR METODOLOJİK-TARİHSEL ÇALIŞMA*

Yrd. Doç. Dr. Samet BAĞÇE**

I. GİRİŞ

Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfi, 19. yüzyıl matematik düşüncesinde meydana gelen en önemli gelişmelerden biridir. Bu keşfin pek çok önemli problemlerin doğmasına yol açan uzun ve oldukça karmaşık bir tarihi vardır. Bu sorulara yanıt vermek için çeşitli bakış açılarından bu keşfin tarihine ilişkin değişik açıklamalar ve yorumlar ileri sürülmüştür.

Bunların arasında, kendinden sonra gelen Coolidge[1], Boyer[2] ve Klein[3] gibi yazarların yürüttüğü araştırmaların ve tartışmaların çerçevesini belirleyen yorum, Bonola'nınki[4] gibi görünmektedir. Adı geçen yazarların tarihsel yorumlarında birtakım anlaşmazlık noktaları bulunmasına karşın, uğraştıkları konuya yaklaşımlarında bir ortaklık söz konusudur.[5] Sahip oldukları ortak tavır, G. Saccheri'den (1733) E. Belrami'ye (1868) kadar gerçekleştirilen geometri çalışmalarını tek bir soruya yanıt vermek için yürütülmüş girişimler olarak görmeleridir. Bu soru da, Euklid'in diğer tüm postulatları ve aksiyomları çerçevesinde, paralellik postulatının zorunlu olarak doğru olup olmadığı sorusudur. Gray'in de yerinde gözlemiyle ifade ettiği gibi, "standart yorum, çoğu kez, paralellik postulatının Öklitçi geometriden mantıksal olarak bağımsız (logical independence) olup olmadığı sorusuna yapılan göndermelerle sona ermektedir (Bonola, Chap. V, §94, Appendix V; Coolidge, pp. 84-88; Kline, Chap. 38, §4 ve Chap. 42)".[6]

Böylece problem, geometrinin temellerine (foundation) dair bir problem olarak algılanmıştır. Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfinin bir sonucu olarak, probleme negatif bir çözüm sağlanmış oldu. "Standart yoruma"a göre, Saccheri'den Beltrami'ye kadar gerçekleştirilen geometri çalışmaları, geometrinin temellerine dair çalışmalar olarak görülmelidir ve geometri tarihini en iyi biçimde anlamanın

---

* Bu makale, Zaragoza (İspanya)'da yapılan *XIXth International Congress of History of Science*'da sunulmuş ve yakında yayınlanacak olan "A Study in the Heuristic of Girolamo Saccheri's Geometrical Study on the Problem of Parallels" adlı makale temelinde hazırlanarak ODTÜ Matematik Bölüm Seminer Dizi'sinde sunmuş olduğum konuşmamın bir versiyonudur. Materyalin Türkçe'ye tercümesi için yaptığı çalışmalardan dolayı Şevket Severge'ye ve ayrıca Ahmet İnam'a katkılarından dolayı teşekkür ederim.

** Samet Bağçe, Felsefe Bölümü, ODTÜ, 06531 Ankara. sbagce@rorqual.cc.metu.edu.tr

1 J. L. Coolidge: *A History of Geometrical Method*, Oxford: Clarendon Press, 1940/1947.

2 C. B. Boyer: *A History of Mathematics*, New York: Wiley, 1968.

3 M. J. Klien: *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, London: Oxford University Press, 1972.

4 R. Bonola: *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development*, New York: Dover, 1912/1955.

5 J. Gray, konuya çok benzer yaklaşımlarda bulunduklarından dolayı, bu sunumları "standart açıklama" adı altında sınıflandırmıştır; bkz. "Non-Euclidean Geometry: A Re-Interpretation", *Historia Mathematica*, **6**, 1979, 236-258, sf. 237.

6 J. Gray: *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, Second Edition, Oxford: Clarendon Press, 1989, sf. 169.

yolu da onu, bu tip çalışmaların çizgisel (linear) bir birikimi olarak görmekten geçmektedir.

Standart yorum, bu geometri çalışmalarının bazı yönlerinin iyi bir değerlendirmesini vermektedir. Bonola'nın Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfinin tarihini *öncüler* ve *kurucular* olarak, niteliksel bakımdan farklı iki döneme ayırması buna örnektir.[1] Bu ayrımı geçerli kılacak herhangi bir neden ileri sürmemesine karşın, Bonola, dikkatimizi sadece tarihsel bir olguya çekmek ister gibidir. *Öncüler*, Öklitçi geometriyi savunmaya çalışırken, Öklitçi-olmayan geometrilerin bazı çok önemli teoremlerini, elbette farkında olmadan, keşfetmişlerdi. Oysa, *kurucuların* amacı bilinçli olarak bütünüyle yeni bir geometri inşa etmekti. Demek ki, yaptığı bu ayrımla Bonola, bu iki geometricilerin yöntemlerindeki, kullandıkları tekniklerdeki ve yaklaşımlarındaki farklılığa değil; sonuçlar arasındaki, yani bu iki geometrinin ileri sürdüğü teoremler arasındaki farklılığa dikkat çekmek amacını taşımaktaydı. Yalnızca temelci (foundational) çalışmalarla ve aksiyomatik sorunlarla ilgilenen biri olmasından dolayı, bu amaç, Bonola'nın özgün ilgi alanıyla da oldukça uyumludur.

Gene de, bu ayrımın üzerinde yeterince durulmamıştır ve böylece onun heuristik (yol-açıcı) değeri doğru olarak anlaşılamamıştır. *Öncüler*, çalışmalarını eski geometrinin ideolojisine bağlı kalarak; *kurucular* ise, tersine, yeni bir geometriyi yeni düşüncelerle, yöntemlerle ve yaklaşımlarla kurmuşlardır. Fakat *öncüler*, eski geometrik düşüncelerin ve yöntemlerin bazı yeni uygulamalarını ortaya koyarak, yeni bir geometrinin yaratılmasına giden yolu açmışlardır. Demek ki, bu geometricilerin çalışmaları arasındaki temel faklılık, onların *yaklaşımlarında* (approaches) aranmalıdır. Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfinde can alıcı rolü oynayan da işte bu farklılıklardır. Standart yorum, bu ayrımla dikkatimizi belirli ölçülerde, matematiksel yöntemlerdeki farklılığa çekmektedir: 18. yüzyılda Saccheri ve J. H. Lambert (1728-1777) paralellik problemini çözme uğraşlarında klasik geometriyi kullanmışlardır. 19. yüzyılının ilk dönemlerinde ise J. Bolyai (1802-1860) ve N. I. Lobachevsky (1793-1856) analizi kullandılar; aynı yüzyılın ortalarında da B. Riemann (1826-1866) ve E. Beltrami (1835-1900) diferansiyel tekniklere yöneldiler. Aynı zamanda, 19. yüzyılın ilk dönemlerinde pek çok matematikçi de daha önceden kabul edilemez olan şeylerin aslında doğru olabileceğini de düşünmeye başlamıştı: Öklitçi geometriden farklı bir geometri, mantıksal ve fiziksel olarak mümkün olabilirdi, yani yeni geometrinin formal yapısı fiziksel evrenimize ilişkin empirik bulguları ifade edebilme imkanına sahip olabilir.

Tüm bunlara karşın, yanlızca bir aksiyomatik sistemin temellerine dair çalışmalara ve aksiyomatik sorunlara vurgu yapan standart yorum, geometri tarihinin pek çok önemli yönünü değinmeden bırakmıştır. Örneğin, belirli geometrik yöntemlerin neden daha önceden değil de, o dönemde öyle kullanıldıklarına ya da gene belirli geometrik yöntemlerin daha sonraki geometrik yöntemlerin gelişmesine ve kullanılmasına nasıl katkıda bulunduğuna ilişkin konularda herhangi bir açıklama ileri sürmemiştir. Dahası, standart yorum, problemlerin doğasındaki değişimlerle ve eğer ortaya çıkmışlarsa, bu değişimlere nelerin yol açtığıyla da ilgilenmemiştir. Bu da aslında, standart yorumu üretenlerin, geometrik sonuçların elde edilme biçimlerine önem vermemelerinden kaynaklanmaktadır. Öyleyse, bu yorum, benim geometrik gelişmenin heuristiği

[1] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. xii.

diyeceğim şeyin farkına varmada yetersiz kalmaktadır. "Heuristik" derken kastetiğim şeyler şunlardır:

(i) Geometricilerin problem çözümlerinde kullandıkları yöntemler;

(ii) Geometrik dilin, problemlerin ve teorilerin karakterizasyonları;

(iii) Geometricilerin kendi niyetleri.

Özel olarak bakıldığında, Saccheri'nin *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733)[1] adlı çalışmasının standart yoruma göre yapılan açıklaması buna istisna teşkil etmez. Bu açıklamaya göre, Sacceheri'nin çalışması paralellik postulatının ateşli bir savunusudur ve böyle olduğu için de, geometrinin temellerine dair bir çalışmadır. Öklitçi-olmayan geometrilerden biri, Bolyai-Lobachevsky geometrisi, Saccheri'nin dar-açı hipotezi üzerine yaptığı çalışmaların neticesinde keşfedilmiştir:[2]

"Saccheri'nin çalışması, amacına ulaşmamış bile olsa, hala büyük bir önem taşımaktadır. Bu çalışmada, en kararlı çaba beşinci postulat için harcanmıştır. Saccheri'nin *Dar Açı Hipotezinin* (Hypothesis of the Acute Angle) sonuçları arasında bir çelişki bulamamış olması olgusu, ister istemez tutarlı bir mantıksal geometrik sistemin bu postulat üzerinde yapılandırılıp yapılandırılamayacağı sorusunu ve Öklitçi postulatın ispatının olanaksız olduğu fikrini gündeme getirmiştir".[3]

Geometrik sonuçların elde ediliş biçimlerine önem vermemesinden dolayı, standart yorum, Saccheri'nin paralellik problemi üzerine olan çalışmasının da pek çok önemli yönüne değinmemiştir. Bu makalede, bu önemli yönleri sergilemek için, Saccheri'nin çalışmasını şu üç sorunun ışığında değerlendireceğim:

---

[1] G. Saccheri: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur Prima ipsa universae Geomertiae Principia* (Milan, 1733), İngilizceye çev. Geoge B. Halsted: *Girolamo Saccheri's Euclides Vindicatus,* Chicago and London: Open Court, 1920. Bu kitap bu makalede *Euclides* olarak anılmıştır.

Saccheri'nin hayatına ve çalışmalarına ilişkin olarak kısa notlar verilecek olusa şunlar söylenebilir. 1667 yılında sonradan Cenova Cumhuriyeti olacak olan San Remo'da doğan Girolama Saccheri, bir Cizvit geometriciydi. Öğretmeninin, diğer bir Cizvit geometrici, Thomas Ceva'nın olduğu Milano'daki Collegio di Brera'da öğrenim gördü. Öğretmeni aracılığıyla Giovanni Ceva ile tanıştı. Turin'de felsefe ve apologetik öğreten Saccheri, daha sonra üniversitede matematik öğretmenliği yapacağı Pavia'ya taşındı. 1733 yılında Pavia'da öldü.

Giovanni Ceva, Saccheri'nin koordinat geometrisiyle ilgilenmesini sağladı ve onu koordinat geometrisi üzerine olan ilk kitabını, *Ouaesita Geometria*'yı (Milan, 1694) yazması için yüreklendirdi. Bu kitapta Saccheri, aralarından bir tanesi de "Viviani'nin penceresi" olarak bilinen elementer ve koordinat geometrisindeki bir dizi problemi çözmüştür.

Saccheri'nin ikinci kitabı, mantık üzerine olan *Logica Demonstrativa*'dır (Milan, 1697). Bu kitapta, geometricilerin yöntemlerine benzer bir biçimde birbirine bağlı bir dizi kanıtlama biçimi üzerinde eleştirel irdelemelerde bulunarak skolastik mantığını dönüştürmüştür.

Pavia'da geçirdiği yıllar içerisinde, Saccheri, 1702 yılında *Nea-Statica*'yı yazmıştır. Bu kitabı için Thomas Ceva'nın *De Natura Gravium*'undan (Milan 1669) ilham almış ve kısmi olarak da onunla polemiğe girmiştir.

Saccheri'nin son kitabı , Euklid geometrisinin hakkını vermek için yazdığı *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*'tur (Milan, 1733).

[2] Saccheri'nin dörtgeni, a ve b açılarının toplamının dik, dar ya da geniş olmasına göre ya Euklidesçi, ya hiperbolik, ya da eliptik olan yanlızca bir tek gerçek elementer düzlem geometrisi tanımlar [bkz. şekil 1]. Saccheri'nin aksiyomlarının yanlızca hiperbolik değil eliptik geometriye de götürebileceği kolayca görülebilir. [karş. A. Dou: "Logical and Historical Remarks on Saccheri's Geometry", *Notre Dame Journal Formal Logic*, **XI**, 1970, 385-415, bkz. sf. 387].

[3] Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 43-44.

(i) Dolaylı ispatlama yöntemi olan *reductio ad absurdum* Saccheri'nin onu kullandığı biçimde niçin daha önceden kullanılmamıştır?

(ii) Paralellik probleminin doğasında herhangi bir değişim olmuş mudur, eğer olmuşsa bunlara neler yol açmıştır?

(iii) Saccheri'nin çalışması, kendinden sonraki geometrik çalışmalardaki egemen olan yaklaşımlara ve yöntemlere yol açmış mıdır?

Buradaki amacım, yukarıdaki sorulara cevap vererek, Saccheri'nin çalışmasını yeni bir heuristik getiren bir çalışma olarak göstermektir. Bu iddianın desteklenmesi, geometri tarihini, artık tabii devamlılığın ve ilerlemenin olmadığı, geometri teorilerinin sonuçlarının çizgisel bir toplamı olarak değil de, tersine devamlılığın ve ilerlemenin örnek bir modeli olarak görmemizi sağlayacaktır. Bununla bağlantılı olarak, geometri tarihini en iyi biçimde anlamanın yolunun geometri teorilerinin heuristiklerini incelemekten geçtiğini ileri sürmekteyim.

Yukarıdaki sorulara yanıt vermeye başlamadan önce, heuristik yaklaşımın değerini göstermek için, Saccheri'nin paralellik postulatı üzerine yazdığı *Euclides*'in ana hatlarını özetlemek yararlı olacaktır.

II. *EUCLIDES*'İN ANA HATLARI

Saccheri'ye göre, Euklid'in *Elements*'inde bir tanesi paralellik postulatı olmak üzere üç tane "kara leke" vardır.[1] *Euclides*'te Saccheri, "paralellik postulatının doğruluğundan hiç kimsenin şüphesi olmadığı" inancından dolayı, Euclid'in *Elements*'ini bu "kara lekeden" temizlemeyi amaç edinir.[2] Bunu gerçekleştirmek için de ilk olarak, ispatları beşinci postulata bağlı olmayan, Euklid'in *Elements*'inin ilk 28 önermesini varsayar. Sonra da beşinci postulatın dolaylı bir ispat yöntemiyle yani, ispatlanacak olan önermenin yanlış olduğu varsayılarak ve bundan çelişme çıkararak önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşma yöntemi olan *reductio ad absurdum*'la haklılığını göstermeye girişir. Saccheri, postulatın doğru olduğunu göstermek istemekteydi, ama postulatı kendinden önce gelen geometricilerin yapmış olduğu gibi problemli kanılara dayanılarak ispatlanan bir teorem olduğunu göstermek niyetinde değildi.

Başka bir deyişle, paralel çizgilerin var-olduklarının ve tekliklerinin yadsınmasının,

Euklid'in diğer postulatlarıyla ve aksiyomlarıyla bağdaşmaz olduğunu göstermek istemekteydi. Beşinci postulatın yanlış olduğu iddiasını geometrik olarak uygun bir biçime koymak amacıyla, bugün *Saccheri dörtgeni* olarak bilinen, A'da ve B'de dik açıya sahip ve AD=BC olan belirli bir düzlem figürünü kullanır.

Euklid'in ilk dört postulatı temelinde, Saccheri, $\angle ADC=\angle BCD$ olduğunu ispatlar, çünkü eğer P ve Q noktaları, sırasıyla AB ve CD parçalarının orta noktalarına karşılık geldiği farz edilirse, ADP ve BCP dik üçgenleri eşittir.[3] Böylece, $\angle ADP=\angle BCP$ ve PD=PC olur. O halde, DPQ üçgeninin kenarları, karşılıklı olarak, CPQ üçgeninin kenarlarına eşittir. Sonuç olarak da, bu iki üçgen eşittir.[4] Böylece, $\angle ADC=\angle ADP+\angle PDC=\angle BCP+\angle PCD=\angle BCD$ olur. C ve

[1] Saccheri, not 9'daki aynı eser, sf. 5-7.
[2] Saccheri, not 9'daki aynı eser, sf. 5.
[3] T. L. Heath: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York: Dover, 1956, bkz. Book I, önerme 4, sf. 247-250. Bu kitap, bu makalede *Elements* olarak anılmıştır.
[4] Bkz. Heath, not 14'deki aynı eser, Book I, önermeler 4 ve 8, sf. 261 ve 284. Dahası bu önermeler paralellik postulatına başvurulmadan ispatlanmıştır.

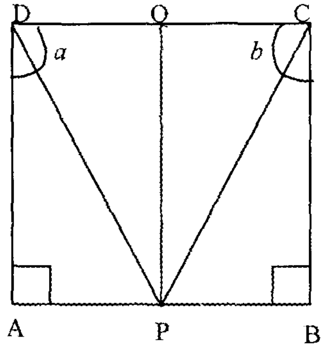
D'deki eşit açılara *b* ve *a* dersek, şu üç olasılık tüketici (exhaustive) ve dışlayıcı (exculisive) olarak söz konusudur.[1]

(i) a+b=π, yani, bu açılar dik açıdır, ya da

(ii) a+b>π, yani, bu açılar geniş açıdır, ya da

(iii) a+b<π, yani bu açılar dar açıdır.

Saccheri bu olasılıklara, sırasıyla, dik açı, geniş açı ve dar açı hipotezleri adını verir [(i) HRA, (ii) HOA, ve (iii) HAA olarak kısaltılmıştır].



Saccheri, ilk olarak her hipotezin verili bir dörtgende geçerli olduğunu, fakat zorunlu olarak diğerlerinde geçerli olmayabileceğini varsayar. Yani henüz bu aşamada, geniş açılı bir dörtgeni düzlemin bir bölgesinde, dar açılı bir dörtgeni de başka bir bölgesinde düşünmekte serbestiz. Saccheri, V-VII önermelerde, eğer bu üç hipotezden biri, Saccheri dörtgenlerinden biri için doğru olursa, o hipotezin böylesi bütün dörtgenler için doğru olacağını ispatlar. Bu teoremler uzayın, her hipotez için homojen olduğunu göstermektedir, yani, uzay geometrik olarak her yerde aynıdır.

Saccheri, daha sonra, üçgenlere dair ve üç kısımdan oluşan şu sonucu ispatlar:

"Herhangi bir dik açılı üçgende, geri kalan dar açılar bir arada alındıklarında, dik açı hipotezine göre, tek bir dik açıya eşittirler; geniş açı hipotezine göre, bir dik açıdan büyüktürler; dar açı hipotezine göre ise bir dik açıdan küçüktürler".[2]

Daha sonra Saccheri, XI. önermede aksiyomlarının HRA ile birlikte, Öklitçi geometrinin postulatlarıyla eşdeğer olduğunu ispatlar. XII. önermede ise, HOA söz konusu olduğunda, herhangi iki doğrunun sonlu bir uzaklıkta daima birbirlerini keseceklerini gösterir.[3] Böylelikle, bu önerme, Saccheri'nin aksiyomlarının HOA ile birlikte, eliptik geometrinin aksiyomlarıyla denk olduğunu ortaya koyar. Daha sonra, XXV. ve XXXII. önermelerde, HAA söz konusu olduğunda, *l* doğrusu dışındaki A noktasından geçen ve *l*'ye asimptotik olan iki doğru çizginin olduğunu kanıtlar. Böylece, Saccheri bu önermeler ve aksiyomlarının HAA ile birlikte, hiperbolik geometrinin aksiyomlarıyla eşdeğer olduğunu gösterir.

Yukarıda görüldüğü gibi, Saccheri'nin dörtgeni aracılığıyla üç klasik geometri, yani, Öklitçi, hiperbolik ve eliptik geometriler tanımlanabilir olmasına karşın, Saccheri yanlızca Öklitçi geometrinin doğru olduğu iddiasını

---

[1] Euklidçi geometriye göre, her üçgen, *büyüklüğü* ve *uzaydaki konumu* ne olursa olsun toplamları 180°'ye eşit olan açılara sahiptir. Bunun zıttıysa, uzayda biryerlerde herhangi büyüklükte bir üçgenin açılarının toplamının ya 180°'den az ya da çok olduğudur. Saccheri güçlü bir alternatif olan *tüm* üçgenlerin ya dar ya da geniş olduğunu doğru olduğu fikriyle başlamıştır.

[2] Saccheri, not 9'daki aynı eser, önerme IX, sf. 41-43.

[3] Saccheri bu önermede, iki doğrunun, toplamları π'den küçük açılar yapan transversalle birleştiklerini varsayıyor görünmektedir. Buna karşın Dou'nun kendi makalesinde belirttiği gibi [not 10'daki aynı eser, sf. 407], eğer HOA altında iki doğru, toplamları π'ye eşit açıları yapan transversalle birleşiyorlarsa, bu durumda problem bir öncekine indirgenir ve böylece iki doğru her iki yönde de birleşir.

girişmiştir ve XIV. önermede "kendi kendini çürüttüğünden dolayı geniş açı hipotezinin, kesinlikle yanlış olduğu" sonucuna ulaşmıştır.[1]

Saccheri, XIV. önermede ifade edilen sonucu, XI.-XIII. önermelere dayanarak elde etmiştir. Buna karşın, HOA'yı eleyişi problematik olarak değerlendirilebilir, çünkü bunu yaparken HOA için geçerli olmayan ve ispatı doğrunun sonsuz uzunluğuna dayanan Euklid'in *Elements*'inin 16. önermesine dayanmıştır.[2] HOA'daki doğru çizgilerin ise, sonsuz uzunluğa sahip olarak varsayılamayacağı açıktır. Bu varsayım bir dörtgendeki iki geniş açının olasılığını ortadan kaldırır ve bu anlamda da HRA'yı ispatlar.[3] Fakat bu varsayım, bu açıların dar açı olma olasılıklarını engellememektedir.

Öte taraftan ise Saccheri'nin kafa karıştıcı şöyle bir ifadesi de söz konusudur:

"Euklid'in Birinci Kitabındaki önermelerinden, sadece 27.yi ve 28.yi değil, 16.yı ve 17.yi bile, her bakımdan kısıtlanmış bir üçgenin söz konusu olduğu yerler dışında, asla kullanmayacağım".[4]

Saccheri'nin bu ifadesi, I.16-17 ve I.27-28 önerme çiftleri arasında ayırım yaparak I.16'yı niçin kullandığını açıklamaktadır. Dou'nun doğru olarak gözlemleyip ifade ettiği gibi, birinci çiftteki önermeler kısıtlanmış üçgenler sınıfı için geçerliyken; paralel doğruların varlığını temellendiren ikinci çifttekiler içinse geçerli değildir.

I.27-28 önermeleri zorunlu olarak doğruların sonsuz uzunlukta olmalarını gerektirir. Buna karşılık, I.16-17 önermeleri yalnızca, üçgenin içinde bulunan ve bir köşeden (vertex) karşı kenarın orta noktasına giden doğru parçalarının, bu doğrunun yarı uzunluğundan daha kısa olduğunda geçerlidir.[5] Böylece buradan elde edeceğimiz şey, I.16-17 önermelerinin *lokal olarak* geçerli olduğu, buna karşın I. 27-28 önermelerinin HOA çerçevesinde zorunlu olarak yanlış olduğudur.

HOA söz konusu olduğunda, Saccheri'nin kafasındaki şey, Dou'nun da belirttiği gibi, XII. önermede içeriliyormuş gibi gözüken, AB üzerindeki AD, BC

---

[1] Saccheri, not 9'daki aynı eser, sf. 59-61.

[2] Doğruların sonsuz uzunlukta oldukları varsayımı, I.17,I.21 ve I.26-28 önermelerinin ispatlarında da kullanılmıştır. Bunların sonuncusunda, Euklid ilk olarak beşinci postulatı kullanır. I.16 önermesi "herhangi bir üçgende, eğer kenarlardan biri uzatılırsa, dış açı hem iç hem de zıt açıdan büyük olur" der [Heath, not 14'teki aynı eser, sf. 279-281]. Ve diğer beş önerme, I.17, I.21 ve I.26-28, I. 16'ya dayanır. Ek olarak, Saccheri, önerme I.16'yı ilk olarak kendi kitabındaki III. önermenin ispatında kullanmıştır.

[3] Saccheri'nin III. den XIII. ye kadar olan önermelerin ispatlarında doğruların sonsuz uzatılabilirliği varsayımını kullanmış olmasından dolayı, bu önermelere verdiği ispatların geçerliliği sorgulanmıştır. Örneğin, P. Staeckel: *Die Theorie der Parallellinen von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig, 1895; (bkz. sf. 52 ve sf. 62) adlı çalışmasında değerlendirme yaparken, HOA'daki ispatın yetersiz olduğunu belirmiştir [karş. Dou, not 10'daki aynı eser, sf. 388 ve C. Segre: "Congetture intorno all'influenza di Girilamo Saccheri Sulla formazione della geometria non-euclidea", *Atti Acc. Scienza di Torino*, **XXXVIII**, 1903, 535-547, sf. 535]. Buna karşın, eğer Euklid'in 2. postulatı doğruların sınırsız uzatılabilirliğini garanti altına alan bir şey olarak yorumlanırsa, o zaman Saccheri, HOA'yı eleyişinde haklı olur. Ek bilgi için bkz. Dou, not 10'daki aynı eser, sf. 387-388 ve L. Sklar: *Space, Time, and Space-Time*, Berkeley, LA, London: California University Press, 1977, sf. 17-18. Dahası Dou, "kenarlarıyla bütün olarak sınırlanmamış bir üçgene uygulanmadıkları sürece, Saccheri'nin 27.ve 28. ve hatta I.16 ve I.17 önermeleri olmadan iş yapabileceğini" ileri sürmüştür" [bkz. "The 'Corollarium II'to the proposition XXIII of Saccheri's Euclides", *Pulicacions Matematiques*, **36**, 1992, 533-540; sf. 534].

[4] Bkz. Sacheri, not 9'daki aynı eser, *Preface*.

[5] Bkz. Dou, not 10'daki aynı eser, sf. 388-389.

dikey çizgilerinin birbirleriyle kesişmesi gerektiğidir.[1] Tam da bu nedenden dolayı Saccheri, I.16-17 önermelerini, "her bakımdan kısıtlanmış bir üçgenin söz konusu olduğu yerler hariç" asla kullanmayacağını söylemektedir.

Yukarıda belirtildiği gibi, Saccheri, XI.-XIII. önermeleriyle XIV. önermeye giden yolu hazırlamaktadır. Önerme XIII'ün ifade ettiği şudur:

"Eğer AD ve XL gibi iki doğruyla kesişen XA doğrusu (uzunluğu her ne kadar büyük olarak tayin edilmiş olursa olsun), onlarla aynı yönde yaptığı iç açılar, XAD ve AXL, iki dik açıdan küçüklerse, bu ikisinin (bu iki açıdan birinin dik açı olmaması halinde bile), bu açıların yönünde bir noktada kesişeceğini ve eğer dik açı hipotezi doğruysa, sonlu ya da kesilmiş bir uzaklıkta kesişeceğini iddia etmekteyim".

Bu önerme, sadece önceki XI. ve XII. önermeleri bir araya getirmekte ve HRA'yı temellendirmektedir. Buradan ise Saccheri dörtgeninin bir dikdörtgen olması gerektiği, yani bu dörtgenin açılarının toplamının dört dik açıya eşit olacağı sonucu çıkacaktır. Neticede, Euklid'in bu postulatından çıkartılan bildik teoremler de temellendirilmiş olurlar. Demek ki, HOA yanlıştır; bir başka deyişle, bu önerme Saccheri'yi XIV. önermede ifade ettiği şu sonuca ulaştırmaktadır:

"Geniş açı hipotezi kesinlikle yanlıştır, çünkü kendi kendini çürütmektedir".

Saccheri'nin buraya kadar yaptıkları yanlızca işin yarısını halletmektedir. Bundan sonra HAA'nın yanlış olduğunun gösterilmesine sıra gelmiştir. Fakat ne kadar denerse denesin, HAA'da herhangi bir mantıksal çelişki bulamamıştır. Bu noktada da mantığın kendisine dayanmak yerine, HRA'nın doğru olduğuna ilişkin kendi inancına dayanarak bir karara varmıştır. Bunu yaparken ise, çizgilerin doğasına dair olan bir dizi inanca başvurmuştur. Bu inançlara göre, çizgiler birtakım şeyleri yapamazlar.

Demek ki, Saccheri'nin HAA'yı reddetme girişimi, mantığa değil de, beşinci postulatın geçerliliğine ilişkin sezgisine dayandığından dolayı, kusursuz bir girişim değildir. Ona göre "Dar Açı Hipotezi kesinlikle yanlıştır, çünkü doğru çizginin doğasına aykırıdır".[2] XXXIII. önermesini kanıtlamak için beş yardımcı teoreme (lemma) ve iki teorem sonucuna (corollary) yaslanır.[3] Saccheri'nin kanıtı, şekiller için sonlu bir uzaklıkta geçerli olan belirli özelliklerin sonsuzluğa uzatılmasına dayanmaktadır; yani özel olarak, iki çizginin buluştukları sonsuzluk noktasında bir ortak dikey çizginin bulunabileceği düşüncesine dayanmaktadır.[4] Böylece, Saccheri'nin HAA'nın olanaksızlığına ilişkin ispatı geçersizdir. Bell'e göre, Saccheri "infinitesimallerin hatalı kullanımından dolayı" yanılmıştır.[5]

HAA'nın geçersizliğine ilişkin ispatının tatminkar olmadığının farkında olması sebebiyle Saccheri, kitabının geri kalan bölümünde, kendinden öncekilerin kullandığı eşit uzaklık fikrini yeniden uyarlayarak istediği sonuca ulaşma çabasını sürdürmüştür.

---

[1] Bunun için bu makaledeki not 18'e bakınız.
[2] Saccheri, not 9'daki aynı eser, önerme XXXIII, sf. 208.
[3] Saccheri, not 9'daki aynı eser, sf. 173-207.
[4] Bonola, not 5'deki aynı eser, sf.43; bkz. Gray, not 7'deki aynı eser, sf. 68.
[5] E. T. Bell: *The Development of Mathematics*, New York: Dover, 1972, bkz. sf. 327.

III. HEURİSTİK YAKLAŞIMDA *EUCLİDES*

Şimdi, heuristik yaklaşımın değerini ortaya koymak için, daha önce sorulmuş olan üç soruya dönmek istiyorum.

Birinci soru, Saccheri'nin belirli bir biçimde kullanıldığı söz konusu yöntemin niçin daha önceden kullanılmadığına dairdi. Kendisinin yazdığı ikinci kitap, *Logica demonstrativa*'dır (Turin, 1697). Euklid'in *Elements*'in üzerine modellendirilmiş bir mantık kitabı olarak büyük bir öneme sahiptir. Saccheri'nin bu kitaptaki ilgisi açıkça, matematikteki tanımlamalarla ve *reductio ad absurdum* yoluyla yapılan argümanların önemine yöneliktir.[1]

Saccheri, *nominal tanımlar (definitiones quid nominis* ya da *nominales*), ve *real tanımlar (definitiones quid rei* ya da *reales*) arasında bir ayrım yapmıştır. Birinciler, yanlızca, verili bir terime eklenen anlamı açıklama amacındayken; ikinciler, sadece kelimenin anlamını açıklamayı değil, bunun yanında, tanımlacak şeyin varlığının da olumlanmasını, yani geometri bağlamında, onu çizebilmenin (construction) olanağını göstermeyi amaç edinmiştir.[2]

Definitiones nominales kendi içlerinde oldukça keyfidirler; bu anlamda, ne ispata ihtiyaçları vardır, ne de herhangi bir ispatta kullanılabilirler. *Nominales*'leri kullanmamızın sebebi, onları mümkün olduğu kadar çabukcak *reales*'lere dönüştürme isteğimizdir. Bir *definitio quid nominis*, *definitio quid rei* haline, "bir *postulat* yoluyla, ya da bir şeyin *varolup olmadığı* sorusunun olumlu olarak yanıtlanabildiği zaman gelmektedir".[3]

Saccheri ye göre, *nominal* ve *real* tanımlar arasındaki karışıklık, hatalı kanıtlamaların en zengin kaynaklarından biridir. Bu anlamda tehlike de, tanımın "karmaşıklığı", yani tanımlanacak şeye ait olan özelliklerin çeşitliliğinin sayısı oranında artmaktadır. Artması ise, atfedilen özellikler arasında bağdaşmaz olanların olabileceği ihtimaline, yani atfedilen özelliklerin verili bir figürde aynı zamanda olmasının, bilimin kısmi olarak temelini oluşturan *diğer* postulatlar yoluyla olanaksızlığının ispatlanmasına karşılık gelmektedir.

Saccherinin bu konudaki ek aydınlatıcı çalışmaları, temel postulatlar arasındaki bağdaşmazlığın (incompatibility) varlığını dışarıda bırakma zorunluluğunun tanınmasına yol açarak, sorunu daha da geniş bir çerçeveye oturtmuştur. Bu yaklaşım formal ve demonstratif bilimin temelini oluşturmaktadır. Temel postulatlar arasındaki bağdaşmazlığın varlığı, yanlızca bu önermelerin kendi aralarında doğrudan doğruya çelişmeye düştüklerini göstererek değil, aynı zamanda, direkt olarak farkına varılmayacak bir biçimde, yani aralarından birinin yanlış olduğunun diğerleri aracılığıyla gösterilmesiyle de ortaya konabilir.

Bu yaklaşım, matematiğin işlevi bakımından, yani temel önermelerin mantıksal bağdaşırlığı (logical compatibility) bakımından ve verili bir öncül

---

[1] Saccheri, kendisinin en önemli katkısının, bu tür akılyürütmenin sistematik olarak ilk bu kitapta ele alınması olduğunu ileri sürer [karş. Saccheri, not 9'daki aynı eser, *Introduction;* aynı zamanda bkz. Dou, not 10'daki aynı eser, sf. 395].

[2] Saccheri, Euklid'in *Elements*'inin Birinci Kitabının 46. önermesindeki daire çizimi örneğini verir: Böyle bir şeklin varolup olmadığını bilmediğimizde, Eulides'in çemberi yaptığı gibi tanımlamaya hakkı olmadığı iddia edilebilir. Saccheri, böylesi bir karşı çıkışın, ancak Euklid'in ispatı ve çizimi yapmadan önce bu tür bir şekli verili olarak kabul etmişse bir anlam taşıyacağı karşılığını verir. Sonra da Euklid'in bu şeklin varlığını, onun Birinci Kitap önerme 46'da tanımlanmasından sonraya dek, asla varsaymadığını ileri sürer [karş. Saccheri, not 9'daki aynı eser, *Introduction*].

[3] Saccheri, not 9'daki aynı eser, sf. xviii.

dizgesini tutarlı şekilde takip eden sonuçların, direkt olarak yorumlamaya veya empirik doğrulamayı gerektirmeden geliştirilmesi açısından büyük bir öneme sahiptir. Postulatların karşılıklı bağdaşırlık koşulunun tek nesnesi olmalarından dolayı, bu türden bir bağdaşırlığın gerçekten olup olmadığı sorusu temel bir sorudur. Postulatların mantıksal bağdaşırlığı problemi ise *Logica*'nın son bölümünün ana konusudur.

Saccheri'nin bu çalışması göz önüne alındığında, onun *Logica*'da elde ettiği sonuçları *Euclides*'de kullanmış olduğunu görmek hiç de şaşırtıcı değildir.[1] Bir başka deyişle, bu kanıtlama sürecinin *Logica*'daki kullanılış biçimiyle, daha sonra *Euclides*'deki kullanılma biçimi arasında kesin bir paralellik söz konusudur:

"Belki de bu noktada, yanlış her hipotezin reddedilişinin kesinlikle kanıtlanması konusunda niçin bu denli arzulu olduğum sorabilir. Bu amaçla, buradan yola çıkarak, Euklid tarafından ileri sürülen ünlü aksiyomun *kendi başına* (başka hiçbir şeye dayanmadan) bilinebileceğini, elbette bir sebebe dayanarak, daha kapsayıcı biçimde ortaya konabileceğini söylüyorum. Çünkü aslında bu, her temel hakikatin özelliği gibi görünüyor; çelişiğini göz önüne alalım bu hakikatin, belli bir çetin akıl yürütme ile haklılığını göstermeye çabalayalım. Sonunda geleceğimiz yer, hakikatin kendisidir. İçtenlikle itiraf etmeliyim ki, gençlik yıllarımdan başlayarak temel hakikatler konusundaki görüşlerim *Logica Demostrativa* adlı yapıtımda görüldüğü gibi, bu çizgide oluştu".[2]

Logica'nın sonuçlarının *Euclides*'teki kullanımı, Saccheri'nin iki doğru arasındaki paralellizmle uğraştığı zamanda, dikkati postulatlar arasındaki bağdaşırlık sorununa açık bir biçimde yönelterek, onun iki amacı gerçekleştirmesine imkan yaratmıştır. Bu amaçlar:

(i) genel olarak, Euklid'in *Elements*'indeki geometrinin tutarlı (consistent) olduğunun gösterilmesi, ve

(ii) özel olarak da, paralellik postulatının doğruluğunun diğer ilk dört postulattan ve ilk 28 önermeden çıkarılabilir olduğunun gösterilmesi.Yani, bu dolaylı akıl yürütme biçimine başvurarak Saccheri, üç hipotez bağlamında –HRA, HAA ve HOA– paralellik problemini yeniden formüle etmek istemiştir. Bu türden bir kavrayış, istenilen sonucu kesinlikle elde etmek için *reductio ad absurdum*'un kullanılmasına izin vermiştir. Eğer ki, ikinci ve üçüncü hipotezlere dayanan geometrilerin kendi kendileriyle çelişik olduğu gösterilebilirse, birinci, yani Öklitçi hipotez doğru olacaktır.

Sonuç olarak, tüm bu mantıksal aletlerle donanmış olan Saccheri'nin bu tarz bir akılyürütme biçimini, yani *reductio ad absurdum*'u bu çerçevede paraleller problemi üzerine olan incelemesine uyguladığını görmek doğaldır. Gerçekten de o, geometrinin prensiplerini mantık çerçevesinde açıklamaya çalışıyordu. Saccheri bu dolaylı akılyürütme biçimini ilk kullanan kişi olmamasına karşın –ki daha önce Euklid tarafından kullanılmıştır–, Saccheri bu yöntemi bu biçimde mantık ve geometri üzerine yapılan sistematik bir incelemede kullanan ilk kişidir. Onun *Euclides*'i, büyük bir olasılıkla, problemi üç hipotez bağlamında yeniden

---

[1] Saccheri'nin paralel postulatının ispatına karşı duyduğu ilginin nedenlerinden birinin de, kendi akılyürütme şeklini Klavyus'un yasası aracılığıyla test etmek olduğu ileri sürülmüştür [karş. Saccheri, not 9'daki aynı eser, *Introduction*; Dou, not 10'daki aynı eser, sf. 405].

[2] Saccheri, not 9'daki aynı eser, sf. 237.

tanımlamak ve böylece de ona etkili bir çözüm önermek için *reductio ad absurdum*'u bu özel biçimiyle kullanan ilk çalışmadır.

İkinci soru paralellik probleminin doğasında herhangi bir değişiklik olup olmadığına, ve eğer olmuşsa, buna nelerin yol açtığına dair soruydu. Bunun için öncelikle bu problemin tarihine kısaca bakmamız gerekmektedir.

Paralellik problemi, Saccheri'den çok önceleri, Euklid zamanından beri, geometricilerin kafasını oldukça karıştırmıştı; çünkü o sezgisel olarak bir türlü kavranamıyordu ve belirsiz bir uzaklıkta kesişen doğrulara ilişkin bir şey atfediyordu. Paralellik postulatına dair olan şüpheleri ortadan kaldırmak için pek çok girişimde bulunulmuştu. Euklid zamanından yaklaşık olarak 1800'lere kadar gerçekleştirilen girişimler, her ne kadar tarihsel olarak biraradalık sergilemişlerse de, bu girişimler şu üç kategori içerisinde karakterize edilebilir:

(i) Paralellik postulatını doğrudan doğruya Euklid'in geri kalan postulatlarından ve aksiyomlarından çıkarma girişimleri;

(ii) Paralellik postulatını daha açık ve sezgisel bir postulatla değiştirmek için yapılan girişimler;

(iii) Paralellik postulatını reddetmenin ne gibi sonuçlar doğuracağını keşfetmek için gerçekleştirilen girişimler.

Tarihsel olarak bilinen ilk önemli girişimlerden biri, beşinci postulatı geri kalan postulatlardan, aksiyomlardan ve *Elements*'in ilk 28 önermesinden çıkarmaya çalışan Ptolemy (M.S. 2.Yüzyıl) tarafından yapılmıştır. Ancak, Ptolemy, örtük olarak, iki doğrunun bir uzayı kapatamayacağı gibi bir varsayım yapmıştır ve bu da otomatik olarak istenen sonucun alınmasını sağlamıştır.[1]

Diğer bir girişim Proklus (410-485) tarafından gerçekleştirilmiştir. İspatlamasını, kesişen iki doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığın, iki doğruyu yeterince uzatarak, istediğimiz büyüklüğe getirilebileceği önermesine dayandırmıştı.[2] Bu ispat doğruydu, ancak Proklus'un yaptığı, şüpheli bir postulatı bir diğer şüpheli postulatla değiştirmekten ibaretti. Bu ispat Klavyus tarafından eleştirilmiştir ve bu eleştiri de Saccheri tarafından desteklenmiştir.[3]

Benzer olarak Nasirüddin el-Tusi'de (1201-1274), her yerinden verili bir doğru çizgiye her noktasından eşit uzaklıkta bulunan bir eğrinin kendisinin de bir doğru olduğunu varsayarak, postulatın bir ispatını vermiştir. Yani postulatı bu varsayımdan çıkarmıştır.[4] Sezgisel olarak doğruluk fikriyle çelişik görünmesinden dolayı, el-Tusi doğruların bir an için birbirlerine yaklaşıyormuş gibi görünmeleri, ama sonradan ayrılmaları olasılığı fikrini devre dışı bırakmıştır. Oysa sorun, herhangi bir kanının akla yatkınlığı değil, paralellik postulatının mantıksal zorunluluğudur. el-Tusi'nin ortaya koymuş olduğu şey, birbirlerine yaklaşıyor gibi görünen doğruların belirli bir özelliğinin varsayıldığı durumda, postulatın bir teorem olduğudur.

---

[1] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 3-4; Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 204-206.

[2] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 4-7; Gray, not 7'deki aynı eser, sf. 36-38; Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 206-208.

[3] Karş. Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 208.

[4] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 9-12; Gray, no 7'deki aynı eser, sf. 49-53; Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 208-210.

John Wallis (1616-1703) ise kendinden önceki matematikçilerin çalışmalarında bir başarıya yol açmayan eşit uzaklık fikrini terketmiştir. Onun, postulatın ispatlanması için yaptığı girişim, bir figür verili olduğunda, verili olanla benzer ve herhangi bir büyüklükte olan başka bir figürün olanaklı olduğu varsayımına dayanmaktadır.[1] Wallis, bu varsayımın sadece üçgenler için geçerli olduğunu düşünmüştü.[2] Sezgisel olarak bu anlayışın doğru olduğu düşünülse de, bu fikir postulatın kendisinden daha açık değildir. Saccheri'nin belirttiği gibi, benzer üçgenlerin varlığına dair olarak düşünülen bu postulat, "dik açı hipotezinin" ve böylece de paralellik postulatının koşulsuz olarak varsayılmasına denktir.[3]

Öte yandan, Saccheri yukarıda sözü edilen bu iki stratejiden herhangi birini benimsemek yerine, paralellik postulatının gerekliliğini göstermek için *reductio ad absurdum*'u kullanmıştır. Paralellik postulatının doğruluğunun, postulatın olumsuzundan (negation) çıkarılacağına dair beklenti, Saccheri'nin problemi üç alternatif hipotez –*dik*, *geniş* ve *dar açı* hipotezleri–çerçevesine formüle etmesine olanak sağlamıştır.

Saccheri'nin geometrideki diğer ilgileri, onun ilk kitabının, yani *Quasita geometria*'nın yazılmasına yol açmıştır. Bu kitap Saccheri'ye, paralellik postulatının olumsuzunu uygun bir geometrik formda ortaya koyma yeteneğini vermiştir. Saccheri'nin koordinat geometrisine olan ilgisi onun paralellik problemine yaklaşımında da görülmektedir. Bir başka deyişle, Saccheri paralellik postulatının olumsuzunu belli bir düzlem figürü çerçevesinde formule etmiştir. Bu yolla, paralellik problemini, kendinden önce doğrular ve açılar çerçevesinde verilen tanımlardan farklı olarak, dörtgenler, üçgenler ve açılar çerçevesinde tanımlamıştır. Böylece de, paralellik teorisiyle bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel ilişkiyi açık bir hale getirmiştir. Aşağıda göreceğimiz gibi, bu nokta, konuya ilişkin daha sonraki gelişmeler bakımından büyük bir önem taşımaktadır.

Özetlersek, Saccheri, paralellik problemini, birbirlerini karşılıklı olarak dışarıda bırakan üç ayrı hipotezi *reductio ad absurdum*'un özel bir kullanımıyla formüle eden ilk kişidir. Bu, problemin doğasındaki ilk değişikliktir. İkinci değişiklik ise problemin tanımıyla ilgilidir. Problem, dörtgenler, üçgenler ve açılar çerçevesinde yeniden tanımlanmıştır. Bu da, paralellik teorisiyle bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel bağlantıyı kurmuştur.

Tüm bunlar, Saccheri'nin *reductio ad absurdum*'u ve Saccheri dörtgenini belirli bir biçimde kullanışının neticesinde ortaya çıkan değişikliklerdir. Yani, problemin doğasındaki değişiklikler, Saccheri'nin probleme matematiksel yaklaşımındaki değişikliklerle paralellik arzetmektedir. Saccheri'nin teknikleri ve konuya bütünlükçü yaklaşımı, el-Tusi'nin ve Wallis'in tersine, ama Lambert'inkine benzer biçimde "modern"dir.

Şimdi de üçüncü soruya, yani Saccheri'nin çalışmasının paralellik probleminin çözümü yolunda diğer matematiksel yöntemlerin kullanılmasına, özellikle de analitik tekniklerin kullanımına yol açıp açmadığına, eğer açmışsa, bunu nasıl yaptığına dair soruya geçelim.

---

[1] Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 15-17; Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 210-211.

[2] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 15-17; Gray, not 7'deki aynı eser, sf. 57-58; Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 210-211.

[3] Saccheri, not 9'deki aynı eser, sf. 105-109; burada Saccheri varsayımın bu kadar ileri götürülmesine gerek olmadığını, eş açılı eş olmayan üçgenlerin var olduklarını varsaymanın yeterli olduğunu ileri sürer.

Gray'in Öklitçi-olmayan geometrilerin tarihine ilişkin yaptığı çalışmalarda ifade ettiği gibi [(1979), (1987), (1989)], paralellik probleminin çözülmesindeki ve Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfindeki en önemli basamak, analitik tekniklerin, özellikle de hiperbolik trigonometrinin ve sonra da diferansiyel tekniklerin kullanılmasıdır. Diferansiyel geometrinin kavramlarının kullanılmasına örtük olarak izin verdiği için, analizin kullanımı oldukça önemlidir.

Bilindiği gibi, Lambert, Euler'in "sine" ve "cosine" üzerine olan çalışmalarını geliştirmiş ve hiperbolik fonksiyonlarla sirküler (circular) fonksiyonlar arasındaki benzerliği açık bir hale getirmiştir. Bu da, geometrinin bu alanında, F. K. Schweikart, F. A Taurinus ve K. F. Gauss tarafından analizin ilk olarak kullanılmasına yol açmıştır. Lambert, küresel (spherical) trigonometri formüllerini hiperbolik fonksiyonlar içeren formüller biçiminde yazarak, hiperbolik ve sirküler fonksiyonlar arasındaki bağlantıyı belirgin kıldığında, bu yeni formüllerin HAA'ya dayanan bir geometriye uygulanabilir bir şey olduğu sonucunu çıkarmamıştı; ki bu, sözü edilen yeni formüllerin bir eşkenar üçgenin özel durumunda değerlendirilmesiyle hemen ortaya çıkacak bir sonuçtur.[1]

Lambert bunu yapmak yerine, hiperbolik trigonometri formüllerini, üçgen kenarlarının hayali (imaginary) olarak ele alındığı astronomik çalışmalarında kullanmıştır. Ancak, ne tür bir üçgenin hiperbolik küresel trigonometri yasalarına uyduğu sorusunu kendine sormamıştır. Gray bu konuda şöyle yazmaktadır: "Bu olay, birilerinin paralellik postulatıyla küresel trigonometri arasındaki ilişkiyi ortaya koyması için 60 yıl beklememize yol açacak bir ıskaydı. Bu ilişkiyi kuran da, Schweikart'ın yeğeni ve onun gibi avukat olan F.A. Taurinus'tur".[2]

Lambert, bu çalışmayı 1766'dan sonra, yani paralellik problemine olan ilgisini kaybettikten sonra yapmıştır. Fakat, kendisinin trigonometri üzerine ve hiperbolik fonksiyonlara dair yaptığı çalışmaların önemini yeterince kavrayamamıştı.[3]

Lambert'in paralellik problemine olan ilgisi G. S. Klügel'in *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* (1763) adlı tez çalışmasından gelmektedir. Lambert daha sonra 1766 yılında konuyla ilgili kendi araştırmalarını içeren *Theoria der Parallellienien* adlı bir kitap yazmıştır. Ancak bu kitap, yazarının ölümünden sonra J. Bernouilli ve C. F. Hindenburg tarafından 1786'da yayınlanmıştır.

Saccheri'nin çalışması, kendinden sonraki geometricileri, özellikle de Lambert'i etkilemiştir.[4] Lambert'in Saccheri'nin çalışmasından haberdar olduğu kesindir, çünkü Saccheri'nin çalışmasının bir özeti ve eleştirisi Klügel'in tezinde verilmiştir. Lambert, kendi çalışması olan *Theorie der Paralellien*'de Klügel'in tezini anmış ve onu övmüş olmasına rağmen, ne Saccheri'den ne de onun kitabından hiç bahsetmemiştir.[5]

Lambert sadece Saccheri'nin üç hipotezin aynısıyle iş görmekle kalmamış, aynı zamanda bu hipotezlerle çalışırken Saccheri'nin yönteminden de pek fazla

[1] Karş. Gray, not 6'daki aynı eser, sf. 240 ve sf. 248
[2] Gray, not 6'daki aynı eser, sf. 248; J. Gray: "The Discovery of Non-Euclidean Geometry", E. R. Philips'in (ed.), *Studies in the History of Mathematics MAA Studies in Mathematics*, 26, 1987, 37-60; bkz. sf. 47.
[3] Nedeni , Gray'in belirttiği gibi, Euklidçi geometrinin metafiziksel ideolojisi içinde çalışmış olması olabilir.
[4] Karş. Segre, not 21'deki aynı eser, sf. 535-547.
[5] Karş. Gray, not 6'daki aynı eser, sf. 241; Dou, not 10'daki aynı eser, sf. 396.

ayrılmamıştır. Böylece, ilkin Saccheri tarafından kurulan paralellik teorisi ile bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel bağlantı gündemde kalmıştır. Bu, paralellik probleminde ve Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfinde trigonometrik tekniklerin kullanılmasına yol açan ilk basamak olarak değerlendirilebilir.

Buna ek olarak, Lambert, *Theoria der Parallellienen*'de çok önemli iki gözlem de yapmıştır.

(i) HAA'da bir doğru parçası, bir açıyla ilişkilendirilebilir ve böylece açıların mutlak ölçüsü uzunluklara transfer edilebilir. Böylece bu yeni geometride uzunluk mutlak hale gelir. Euklid geometrisinde mutlak bir uzunluk ölçüsü yoktur. Öklitçi geometride benzer üçgenlerin varolmasından dolayı, açıların mutlak ölçülerini uzunluklara transfer edemeyiz. Lambert bu yeni geometriyi elemek istemiştir, ancak bunu yapmamıştır.

(ii) Bir düzlem üçgeninin alanı, ikinci ve üçüncü hipotezler çerçevesinde, üç açısının toplamıyla iki dik açının toplamı arasındaki farkla orantılıdır.

Böylece:

k pozitif sabit olarak, HAA'da $\Delta = k(\pi - A - B - C)$, ve HOA'da da $\Delta = k(A + B + C - \pi)$'dır.[1]

Bonola'nın doğru olarak ifade ettiği gibi, Saccheri, HAA'yı tartışırken burada sözü edilen *farkla* (defect) karşılaşmış ve başka dörtgenlerden meydana gelen bir dörtgenin parçalarının *fark*ının toplamını kendisinin *fark*ı olarak sahip olduğuna (XXV. önerme) örtük olarak işaret etmiştir. Buna karşın, bundan alanın bu *fark*a orantılı olduğuna dair hiçbir sonuç çıkarmamıştır.[2]

IV. SONUÇ

Saccheri yanlızca belirli bir Öklitçi geometrik akılyürütme biçimini kullanmakla kalmamış, Öklitçi geometrinin temel kavramlarını da kullanmıştır. Dahası Saccheri, paralellik postulatının ve böylece de Euklid geometrisinin doğruluğuna inanmaktaydı. Euklid geometrisinin matematiksel olarak tek doğru ve olanaklı geometri olmasının yanında, fiziksel dünyamızın zorunlu tasarımı olduğunu da düşünüyordu. Yani, Saccheri, sadece Öklitçi geometrinin belirli bir akılyürütme biçimiyle ve onun temel kavramlarıyla değil, aynı zamanda Öklitçi geometrinin ideolojisi içinde de çalışmıştı. Bunun ise, o dönemde yeni bir geometrik yöntemin, yani Kartezyen yöntemin mevcut olması olgusundan dolayı kaçınılmaz bir karar değil, bilinçli bir karar olduğu düşünülebilir. Bunun nedeni de, onun eski moda geometrik tarzdan hoşlanan bir Cizvit olması olabilir. Fakat yukarıda ifade edildiği gibi, Saccheri'nin matematiksel yöntemi ve paralellik problemine yaklaşımı ile kendinden önceki geometricilerinki arasında çok temel farklılıklar vardır. Onun problem üzerindeki çalışması kendinden öncekilerden görülebilir biçimde farklıdır.

Değinilen tüm farklılıklar ve Saccheri'nin problem üzerinde yürüttüğü çalışmanın getirdiği yenilikler, *reductio ad absurdum*'un kullanılmasından değil, bu eski Öklitçi akılyürütmenin yeni uygulama biçiminden ve problemi yeniden tanımlamada ve çözmede kullandığı Saccheri dörtgeninden gelmektedir. Problemi, daha önceki tanımlamalardan farklı olarak, dörtgenler, üçgenler ve açılar çerçevesinde tasarlayan Saccheri, paralellik kuramı ile bir üçgenin açılarının toplamı arasındaki temel bağlantıyı açığa çıkarmıştır. Bu, Saccheri'nin probleme

---

[1] Karş. Heath, not 14'deki aynı eser, sf. 212-213; bkz. Gray, not 7'daki aynı eser, sf. 74.

[2] Karş. Bonola, not 5'deki aynı eser, sf. 46.

yaklaşımının heuristiğidir, yani, onun heuristiği, *reductio ad absurdum*'un yeni bir uygulama biçiminden ve bu temel bağlantıdan meydana gelmektedir. Saccheri, böylelikle, Öklitçi "araştırma programı" (research programme)[1] içerisinde çalışmasına rağmen, paralellerin doğasına ilişkin yeni bir heuristik geliştirmiştir.

Saccheri'nin bu çalışması, paralellik probleminin trigonometrik dildeki yeni formülasyonunun dile getirilmesinde, böylece de problemin çözümünde ve Öklitçi-olmayan geometrilerin keşfinde ilk basamak olarak değerlendirilebilir. Bu çalışma, öyleyse, Lakatos'un terminolojisiyle, "ilerlemeci problem değişimi"ni (progressive problem shift)[2] yaratan bir çalışma olarak görülebilir.

Saccheri'nin getirdiği bu yeni heuristik, daha sonraları HOA'dan ve HAA'dan yeni sonuçların çıkarılmasıyla ve paralellik postulatı ile küresel trigonometri arasındaki bağlantının keşfine çok yaklaşılmasıyla, Lambert ve Legendre tarafından geliştirilmiştir.Ancak bu bağlantı, açık olarak, Lambert'in kitabını okumuş olan Gauss aracılığıyla Taurinus tarafından görülmüş ve ortaya konmuştur. Bu bağlantıya açıklık kazandırılmasıyla, Saccheri'nin çalışmasında ortaya çıkan sonra da Lambert tarafından geliştirilen bu yeni heuristik, uç noktasına Bolyai'nin ve Lobachevsky'nin çalışmalarıyla ulaşarak yeni bir biçime, yani yeni bir heuristiğe dönüşmüştür.

Saccheri'nin çalışmasının ve genel olarak geometri tarihinin dikkat çekici yönleri, Saccheri'nin paralellik problemine karşı geliştirdiği matematiksel yaklaşım biçiminde ve problemin doğasında yaptığı değişime özellikle dikkat edilerek, yani geometrinin tarihini ve teorilerini açıklama girişimi olan "heuristik" yaklaşımla su üzerine çıkarılmıştır. Geometrik kuramların heuristik yönleri üstüne olan tarihsel ve metodolojik çalışmalar, geometri tarihindeki sürekliliği ve ilerlemeyi gözler önüne serebilir. Benim, geometri tarihinin, geometri teorilerinin sonuçlarının çizgisel bir derlemesi olmadığı ve geometrik teorilerin tarihini en iyi anlama yolunun onların heuristiklerinin incelenmesinden geçtiğine dair olan iddiam tam da bu yüzden ileri sürülmüştür.

---

[1] Karş. I. Lakatos: "Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes", Chap. I, *Philosophical Papers*, Vol. I, J. Worrall & G. Currie (Eds.), Cambridge: Cambrige University Press, 1977.

[2] Karş. Lakatos, not 48'deki aynı eser ve I. Lakatos: *Proofs and Refutations*, J. Worrall & E. G. Zahar (Eds.), Cambridge: Cambrige University Press, 1976.