OKU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
5(1):449-471, 2022

OKU Journal of The Institute of Science and Technology 5(1):449-471, 2022

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Dergisi

Osmaniye Korkut Ata University
Journal of The Institute of Science
and Technology

Banach Uzaylarda s-Sayı Fonksiyonları

Lale CONA[1]*, Ünal Kemal ALKAN[2]

[1]Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Matematik Bölümü, 29100, Gümüşhane, Türkiye
[2]Gümüşhane Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Bölümü, 29100, Gümüşhane, Türkiye

[1]http://orcid.org/0000-0002-2744-1960;
[2]http://orcid.org/0000-0002-9857-9182
* Sorumlu yazar: lalecona@gumushane.edu.tr

Derleme

Makale Tarihçesi:
Geliş tarihi: 02.08.2021
Kabul tarihi:12.11.2021
Online Yayınlanma:08.03.2022

Anahtar Kelimeler:
s-sayıları
Özdeğerler
Yaklaşım sayıları
Weyl sayıları

ÖZ

Bu çalışmada, Banach uzaylarında lineer sınırlı operatörler için s-sayı fonksiyonları üzerine bir araştırma yapılmıştır. Birinci bölümde, s-sayı fonksiyonlarının gelişimi ve kullanıldığı yerler üzerine bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bazı temel kavramlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde ise bazı önemli s-sayı örnekleri verilmiştir. Ayrıca, farklı operatörler için s-sayıları arasındaki bağıntılara yer verilmiştir. Böylece bir bütün olarak Banach uzaylarında s-sayılarının aksiyomatik teorisi sunulmuştur.

s-Number Functions in Banach Spaces

Reviews

Article History:
Received: 02.08.2021
Accepted: 12.11.2021
Published online:08.03.2022

Keywords:
s-numbers
Eigenvalues
Approach numbers
Weyl numbers

ABSTRACT

In this paper, a research on s-number functions for linear bounded operators in Banach spaces is studied. In the first chapter, information on the development of s-number functions and their usage is given. In the second part, some basic concepts are reminded. In the third part, some important examples of s-numbers are given. Also, the relations between s-numbers for different operators are given. Thus, the axiomatic theory of s-numbers in Banach spaces as a whole is presented.

To Cite: Cona L., Alkan ÜK. Banach Uzaylarda s-Sayı Fonksiyonları. Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2022; 5(1):449-471.

Giriş

Yapılan literatür taramasından s-sayıları veya singüler sayılar (singuläre zahlen) kavramının ilk olarak Schmidt'in non-selfadjoint integral operatör teorisi alanındaki (Schmidt, 1907) çalışmasında yer verildiği ve bu kavramın ilk olarak bu çalışmada kullanılmaya başlandığı anlaşılmaktadır. von Neumann ve Schatten'in (Von Neumann ve Schatten, 1948) çalışmalarında bu kavramı Hilbert uzaylarındaki lineer sınırlı operatörlerle ilişkilendirdikleri görülmektedir. Gohberg ve Krein'nin (Gohberg ve Krein, 1971) kitabında Hilbert uzayındaki operatörlerin s-sayılarının mükemmel teorisine yer verilmiştir. İncelenen çalışmalardan sonra, Banach uzaylarında yer alan s-sayılarının farklı tanımlarının olduğu görülmektedir. Bu kapsamda yapılan ilk çalışmaların ise Kolmogorov (Kolmogorov, 1936) ve Gelfand'a (Gelfand, 1938) ait olduğu tespit edilmiştir.

Pietsch'in (Pietsch, 1963) çalışmasında "yaklaşım sayıları" üzerinde durduğu görülmektedir. Ayrıca Pietsch s-sayılarının Banach uzaylarındaki aksiyomatik teorisini ilk olarak (Pietsch, 1974) makalesinde incelemiştir, Pietsch (1980a) ile Pietsch (1987) kitaplarında ise kapsamlı ve sistematik olarak ele almıştır. Tarihsel süreç içerisinde konu hakkında birçok bilimsel çalışmanın yapıldığı ve dizilerin ve fonksiyonların Hilbert uzayında bazı operatörlerin s-sayılarının hesaplanmasına kaynak oluşturduğu tespit edilmiştir. Yapılan kapsamlı literatür taramasında özellikle 1980'li yıllardan sonra yapılan bilimsel çalışmalarda Banach uzaylarındaki lineer sınırlı operatörlerin s-sayıları, psevdo-s-sayıları, quasi-s-sayıları, yaklaşım sayıları, Gelfand sayıları, Kolmogorov sayıları, entropi sayıları vs. ile özdeğerleri arasındaki bağlantının araştırıldığı görülmüştür (Weyl, 1946; Carl ve ark, 1985, 2007, 2009, 2010; Hincichs, 2005; Konig, 1978, 1980, 2001, 2008). Bütün bu bilgiler değerlendirildiğinde Banach uzaylar da tanımlı her bir operatör için; yaklaşım sayıları, Gelfand sayıları, Kolmogorov sayıları gibi bir s-sayı dizisi tanımlayabilmek mümkündür.

Sürekli gelişen literatürde yapılan çalışmalar, çok noktalı diferensiyel operatörler teorisi ve katıhal cisim fiziğinde karşılaşılan birçok probleminin ancak Hilbert veya Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde kolayca çözülebileceğini ortaya koymaktadır (Kocubei, 1979; Aksoy ve ark., 1997; Bandtlow ve ark, 2015; Barramov ve ark., 2012). Bu bağlamda alana katkı sağlayabilecek Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörünün bazı s-sayı fonksiyonları ile koordinat operatörlerinin aynı tipteki s-sayı fonksiyonları arasındaki bağıntılar üzerine araştırmalar yapılmıştır (Ismailov ve ark., 2014; Ismailov ve ark., 2015). Öte yandan geniş bir çalışma alanı olan Lorentz uzayları için de s-sayıları temel teşkil etmekte olup güncel olarak çalışılmaktadır (Al, 2020).

Temel Kavramlar

Bu bölümde çalışmanın daha iyi anlaşılabilmesi için ileriki kısımlarda geçen temel kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1 (Kreyszig, 1978) **:** X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $S: D(S) \subset X \to Y$ olan her dönüşüme bir operatör adı verilir. Bu durumda

$$D(S) \coloneqq \{x \in X:\ Sx \ \text{tanımlı}\} \subset X$$

kümesine S operatörünün tanım kümesi,

$$R(S) \coloneqq SD(S) = \{y = Sx:\ x \in D(S)\} \subset Y$$

kümesine ise S operatörünün değer kümesi,

$$KerS \coloneqq \{x \in X:\ Sx = 0\} \subset X$$

kümesine de S operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Tanım 2.2 (Pietsch, 1974)**:** X ve Y iki Banach uzay ve $S: D(S) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. S operatörünün görüntü kümesinin boyutuna S operatörünün boyutu denir ve $rank(S)$ veya $r(S)$ ile gösterilir. Yani $r(S) = rankS = dim(Im(S)\ )$.

Tanım 2.3 (Lineer Operatör, (Kreyszig, 1978) **):** X ve Y aynı bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(S)$, X de bir lineer alt uzay ve $S: D(S) \subset X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(S)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

ise, S operatörüne bir lineer operatör denir.

Tanım 2.4 (Birim Operatör, (Kreyszig, 1978) **):** $S: X \longrightarrow X$ operatörü verilsin. Her $x \in X$ için $S(x) = x$ ise S operatörüne özdeşlik veya birim operatör adı verilir. I veya I_X şeklinde gösterilir. (Bu çalışmada aksi bir durum belirtilmedikçe birim operatör kısalık adına sadece I ile gösterilecektir.)

Tanım 2.5 (Sürekli Operatör, (Kreyszig, 1978) **):** X ve Y iki normlu uzay, $S: X \to$ Y bir operatör ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $\|Sx - Sx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabiliyor ise S operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir. S operatörü her $x \in X$ noktasında sürekli ise S ye X de sürekli operatör denir.

Tanım 2.6 (Sınırlı Operatör, (Kreyszig, 1978) **):** X ve Y iki normlu uzay ve $S: X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|Sx\|_Y \leq M\|x\|_X$ olacak şekilde sabit bir $M > 0$ sayısı varsa S operatörüne sınırlı operatör denir. X den Y ye tüm sınırlı lineer operatörlerin oluşturduğu aile $L(X, Y)$, özel olarak $X = Y$ ise bu aile $L(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.7 (Kompakt Operatör, (Kreyszig, 1978) **):** X ve Y iki Banach uzayı ve $S \in L(X, Y)$ olsun. Eğer X deki her sınırlı kümenin S altında görüntüsünün kapanışı Y de kompakt ise S ye kompakt operatör denir. Ayrıca tüm kompakt operatörler kümesi $\mathfrak{S}(X, Y)$ $=\{S \in L(X, Y)$: S kompakttır$\}$ şeklinde gösterilecektir.

Teorem 2.1 (Rudin, 1953) **:** X ve Y iki Banach uzayı ve $S \in \mathfrak{S}(X, Y)$ olsun. Bu takdirde S sınırlıdır. Yani $\mathfrak{S}(X, Y) \subset L(X, Y)$.

Önerme 2.1 (Pietsch, 1987): Her kompakt operatör bir Riesz operatörüdür.

Tanım 2.8 (Diagonal Operatör , (Lindenstrauss ve ark; 1977)**):** X ve Y iki Banach uzay ve $S: X \to Y$ lineer sınırlı bir dönüşüm olsun. (x_i), $i \geq 1$, $(y_j), j \geq 1$ sırasıyla X ve Y Banach uzaylarında birer şartsız baz olsunlar. Eğer $S(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_i^j \alpha_{i,j}\, y_j$, $i = 1,2, \ldots$ ise $S: X \to Y$ operatörüne diagonal operatör adı verilir.

Burada $\left(\alpha_{i,j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$ bir sayı matrisi ve δ_i^j kroniker delta olup $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ dir.

Teorem 2.2 (Adjoint Operatör, (Rynne ve ark; 2008)**):** H ve K kompleks Hilbert uzayları ve $S \in L(H, K)$ olsun. Her $x \in H$ ve her $y \in K$ için

$$(Sx, y)_K = (x, S^* y)_H$$

olacak şekilde bir tek $S^* \in L(K, H)$ operatörü mevcuttur.

Bu S^* operatörüne S operatörünün adjoint operatörü adı verilir.

Tanım 2.9 (Selfadjoint Operatör, (Rynne ve ark; 2008)**):** H kompleks Hilbert uzayı ve $S \in L(H)$ olsun. Eğer

$$S^* = S$$

ise bu takdirde S operatörüne selfadjoint (özeşlenik) operatör denir.

Tanım 2.10 (Normal Operatör, (Rynne ve ark; 2008)**):** H kompleks Hilbert uzayı ve $S \in L(H)$ olsun. Eğer

$$SS^* = S^*S$$

ise bu takdirde S operatörüne normal operatör denir.

Tanım 2.11 (Pozitif Operatör, (Narici, 1972)**):** H bir Hilbert uzayı ve $S: D(S) \subset H \to H$ bir lineer selfadjoint operatör olsun. Eğer her $x \in D(S)$ için $(Sx, x)_H \geq 0$ ise S operatörüne pozitif operatör denir ve $S \geq 0$ sembolü ile gösterilir. Eğer S pozitif operatörü için $T^2 = S$ olacak şekilde bir T pozitif lineer operatörü varsa, T operatörüne S nin karekökü denir ve $T = \sqrt{S}$ veya $T = S^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir.

s-Sayıları

Tanım 3.1 (Gohberg ve ark., 1971): H bir Hilbert uzayı ve A, H Hilbert uzayında bir lineer kompakt operatör olsun, yani $A \in \mathfrak{S}_\infty(H)$. $S := (A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}(H)$ operatörünün özdeğerlerine A operatörünün s-sayıları veya bazen singüler sayıları denir.

Bir kompakt operatörünün s-sayılarını monoton azalan şekilde ve tekrarlanma derecesi dikkate alınarak aşağıdaki şekilde numaralandırılabilir. Yani

$$s_n(A) = \lambda_n(S) \ , \quad n = 1,2, \dots, r(S) \ ,$$

$$r(S) = dim(Im(S)) \ ,$$

eğer $r(S) < \infty$ ise

$$s_n(A) = 0 \ , \quad n = r(S) + 1, \ r(S) + 2, \dots$$

kabul edilecektir.

Not:

(1) Eğer $A: H \to H$, $A \in \mathfrak{S}(H)$ bir normal operatör ise,

$$s_n(A) = |\lambda_n(A)| \quad , \quad n = 1,2, \dots$$

(2) Her skaler c sabiti için

$$s_n(cA) = |c|s_n(A) \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

(3)

$$s_n(A) = s_n(A^*) \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

(4) Her $B \in L(H)$ için

$$s_n(BA) \leq \|B\|s_n(A) \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

$$s_n(AB) \leq \|B\|\, s_n(A) \quad , \quad n = 1,2,\dots$$

Her ne kadar singüler sayılar bir H Hilbert uzayındaki lineer kompakt operatör için tanımlanmış ise de bir H Hilbert uzayında tanımlanan lineer sınırlı operatörler için de singüler sayılar (s-sayılar) kavramı verilebilir (bak. [20]: $s_n(A) = \lambda_n\left(\sqrt{A^*A}\right),\ n = 1,2,\dots$).

Matematikçilerin üzerinde uzun süre çalıştıkları sorulardan biri Banach uzayında s-sayılarının tanımının nasıl verileceği olmuştur. Ayrıca burada önemli bir nokta bu tanımın nasıl verilmesi gerektiğinin yanı sıra Banach uzaylarında verilecek olan tanımın Hilbert uzaylarında bilinen s-sayıları kavramı ile de örtüşmek zorunda olmasıydı. Bu tanım çok farklı şekillerde verilebilirdi. Fakat yeni verilecek tanım, genelleşme dışında Banach uzaylarındaki operatörlerin spektral teorisine de yeni faydalar ve kolaylıklar katmak zorundaydı. Bu bağlamda, varsayımlar arasından en iyi tanımın seçilmesindeki en büyük etken Mitiagin ve Pelczynski'nin 1966 yılında matematikçilerin uluslararası kongresindeki sunumu oldu (Mitiagin, 1966).

Şimdi son dönemlerdeki çalışmalarda da sıkça kullanılan Pietsch'in (Pietsch, 1980a) ve (Pietsch, 1987) kitaplarında aksiyomatik olarak tanımladığı Banach uzayındaki s-sayı tanımı verilsin.

Tanım 3.2. Bir Banach uzaydan diğer bir Banach uzayına lineer sınırlı operatörlerin L uzayından negatif olmayan sayı dizilerinin kümesine tanımlanan

$$s: L \to \{\, s_n(S):\ s_n(S) \geq 0\,,\ \ n \geq 1 \ \},$$

dönüşümü

1. $S \in L$ için $\|S\| = s_1(S) \geq s_2(S) \geq \cdots \geq 0$
2. $S, T \in L$ için $s_n(S+T) \leq s_n(S) + \|T\|$
3. $T \in L(E_0, E)$, $S \in L(E, F)$, $R \in L(F, F_0)$ için $s_n(RST) \leq \|R\|s_n(S)\|T\|$
4. Eğer $rank(S) < n$ ise $s_n(S) = 0$
5. Eğer $dim(E) \geq n$ ise $s_n(I_E) = 1$

şartlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme "s-sayısı fonksiyonu" veya "s-fonksiyonu" denir.

Burada $s_n(S)$ sayısına S operatörünün n. s-sayısı adı verilir.

Teorem 3.2 (Pietsch, 1974) **:** $S, T \in L(E,F)$ için

$$|s_n(S) - s_n(T)| \leq \|S - T\|$$

olduğundan s-sayıları sürekli fonksiyonlardır.

İspat: s-sayılarının 2. özelliğinden

$$s_n(S) = s_n(S + T - T) \leq s_n(T) + \|S - T\| \Rightarrow s_n(S) - s_n(T) \leq \|S - T\| \quad (1)$$

$$s_n(T) = s_n(T + S - S) \leq s_n(S) + \|S - T\| \Rightarrow s_n(T) - s_n(S) \leq \|S - T\| \quad (2)$$

olup (1) ve (2) den $|s_n(S) - s_n(T)| \leq \|S - T\|$ dir.

Teorem 3.3 (Pietsch, 1974)**:** Eğer $s_n(S) = 0$ ise bu takdirde $dim(S) < n$ dir.

İspat: $T \in L(E, E_0)$, $S \in L(E_0, F)$, $R \in L(F, E)$ için 3. özellikten

$$s_n(RST) \leq \|R\| s_n(S) \|T\|$$

olup $s_n(RST) = 0$ dır. Ayrıca $s_n(RST) = s_n(I_E)$ olup $s_n(I_E) = 0$ olacağından (s-sayı tanımında 5. özellikte $p \Rightarrow q \ \cong q' \Rightarrow p'$ önermesi göz önüne alınırsa) $rank(I_E) < n$ dir. O halde $dim(RST) < n$ dir.

İleride bazı önemli teoremlerin ispatı için aşağıdaki lemmalar kullanılacaktır.

Lemma 3.1 (Lindenstrauss, 1949) **:** M, E'' nin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ ise bu taktirde J_E, E'' içine tanımlı E nin kanonikal dönüşümü olmak üzere her $x \in E \cap J_E^{-1}(M)$ için

$$\|R\| \leq 1 + \varepsilon \ \text{ ve } \ RJ_E x = x$$

olacak şekilde $R \in L(M, E)$ vardır.

Lemma 3.2 (Kato, 1966) **:** M ve N , $dim(M) > dim(N)$ olacak şekilde E nin alt uzayları olsun. E Banach uzayının bir bölüm uzayı E/N ve Q_N^E, E den E/N nin içine bir kanonikal dönüşüm olmak üzere

$$\left\|Q_N^E\, x\right\| = \|x\| = 1\,,$$

olacak şekilde $x \in M$ vardır.

Lemma 3.3 (Kadec ve ark., 1971) **:** M, $dim(M) = n$ olmak üzere, E nin bir alt uzayı olsun. Bu takdirde bir $P \in L(E, E)$ projeksiyonu vardır öyle ki,

$$M = P(E) \text{ ve } \|P\| \leq \sqrt{n}\,.$$

Bazı s-Sayı Örnekleri

Tanım 3.1.1 (Pietsch, 1980a)**:** Her $S \in L(E,F)$ operatörleri için yaklaşım sayıları

$$a_n(S) = inf\{\|S - A\| : A \in L(E,F),\ \ rank(A) < n\}\,,$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.1 (Pietsch, 1974)**:**

$$app : S \rightarrow (a_n(S))$$

dönüşümü bir s-sayı fonksiyonudur.

İspat: s-sayılarının (3) ve (4). özellikleri aşikar olup diğer şartların sağlandığı gösterilsin.

(1) $S \in L(E,F)$ olsun

$$
\begin{aligned}
a_1(S) &= inf\{\|S-A\| : A \in L(E,F), rank(A) < 1\} = \|S\| \\
a_2(S) &= inf\{\|S-A\| : A \in L(E,F), rank(A) < 2\} \\
&= inf\{\|S\|, inf\{\|S-A\| : A \in L(E,F), rank(A) = 1\}\} \\
&= inf\{\|S-A\| : A \subset L(E,F), rank(A) = 1\} \\
&\leq a_1(S)
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde devam edilirse;

$$\|S\| = a_1(S) \geq a_2(S) \geq a_3(S) \ldots \geq 0$$

olduğu görülür.

(2) $S, T \in L(E,F)$ olsun. Şu halde,

$$
\begin{aligned}
a_n(S+T) &= inf\{\|S+T-A\| : A \in L(E,F)\ ,\ rank(A) < n\} \\
&\leq inf\{\|S-A\| : A \in L(E,F),\ \ rank(A) < n\} \\
&\quad + inf\{\|T\| : A \in L(E,F)\ ,\ rank(A) < n\} \\
&= a_n(S) + \|T\|
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(5) $a_n(I_E) < 1$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde yaklaşım sayılarının tanımından $\|I_E - A\| < 1$ ve $rank(A) < n$ olacak şekilde $A \in L(E,E)$ vardır. Sonuç olarak, $A = I_E - (I_E - A)$ olduğundan Neumann serisi vasıtasıyla A terslenebilir. $rank(A) \geq n$ olduğu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup s-sayılarının 5. şartı sağlanır.

Teorem 3.1.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Yaklaşım sayıları en geniş s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. Bu takdirde her bir s-sayısı fonksiyonu ve $rank(A) < n$ ile verilen $A \in L(E,F)$ için

$$
\begin{aligned}
s_n(S) &= s_n(S+A-A) \\
&\leq s_n(A) + \|S-A\| \\
&= \|S-A\|
\end{aligned}
$$

olup s-sayılarının 4. özelliğinden $s_n(A) = 0$ dır. Böylece,

$$s_n(S) \leq \|S-A\|$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın infimumu alınırsa sağ taraf yaklaşım sayısını verir. Dolayısıyla her $S \in L$ için

$$s_n(S) \leq a_n(S)$$

olur.

Tanım 3.1.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) : Her $S \in L(E,F)$ operatörü için

$$c_n(S) := inf\{\|SJ_M^E\| : codim(M) < n\},$$

olarak tanımlanan s-sayı fonksiyonuna Gelfand sayısı adı verilir. Bu tanım

$$c_n(S) := inf\{\|S\|_M :\ M \subset E, codim(M) < n\},$$

olarak da ifade edilebilir (Carl, 2009).

Teorem 3.1.3:

$$gel: S \rightarrow c_n(S)$$

bir s-sayı fonksiyonudur.

İspat:

(1) $S \in L(E,F)$ için

$$c_1(S) = inf\{\|S\|_M : M \subset E, codim(M) < 1\} = \|S\|$$

$$\begin{aligned} c_2(S) &= inf\{\|S\|_M : M \subset E, codim(M) < 2\} \\ &= inf\big\{\|S\|, inf\{\|S\|_M : M \subset E, codim(M) = 1\}\big\} \\ &= inf\{\|S\|_M : M \subset E, codim(M) = 1\} \end{aligned}$$

olup buradan

$$\|S\| = c_1(S) \geq c_2(S)$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilirse

$$\|S\| = c_1(S) \geq c_2(S) \geq c_3(S) \geq \cdots \geq 0$$

olduğu kolayca görülür.

(2) $S, T \in L(E,F)$ için

$$\begin{aligned} c_n(S+T) &= inf\{\|S+T\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &\leq inf\{\|S\|_M + \|T\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &\leq inf\{\|S\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &\quad + inf\{\|T\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &\leq c_n(S) + inf\{\|T\| : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &= c_n(S) + \|T\| \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) $T \in L(E_0, E)$, $S \in L(E,F)$, $R \in L(F, F_0)$ için

$$\begin{aligned} c_n(RST) &= inf\{\|RST\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &\leq inf\{\|R\|_M \|S\|_M \|T\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &\leq inf\{\|R\| \|S\|_M \|T\| : M \subset E, codim(M) < n\} \\ &= \|R\| c_n(S) \|T\| \end{aligned}$$

bulunur.

(4) $rank(S) < n$ olsun. Bu durumda,

$$c_n(S) = inf\{\|S\|_M : M \subset E, codim(M) < n\}$$

olup

$$c_n(S) = 0$$

dır.

(5) $dim(E) \geq n$ olsun.

$$c_n(I_E) = inf\{\|I_E\|_M : M \subset E, codim(M) < n\} = 1$$

olduğu açıktır.

Tanım 3.1.3 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a): Her $S \in L(E,F)$ operatörü için Bernstein sayıları

$$u_n(S) \coloneqq sup\{j(SJ_M^E) : dim(M) \geq n\},$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3' de geçen "j" injektivlik modülü olup injektiv s-sayıları kısmında tanımı ifade edilmiştir.

Uyarı: Yukarıdaki tanımda $dim(M) = n$ olan tüm M alt uzaylarının üzerinden supremum almak yeterlidir.

Tanım 3.1.4 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) : Her $S \in L(E,F)$ operatörü için Kolmogorov sayıları

$$d_n(S) \coloneqq inf\{\|Q_N^F S\| : dim(N) < n\},$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.5 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) : Her $S \in L(E,F)$ operatörü için Mitiagin sayıları

$$v_n(S) \coloneqq sup\{q(Q_N^F S) : codim(N) \geq n\},$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.5 de geçen "q" surjektivlik modülü olup surjektiv s-sayıları kısmında tanımı verilmiştir.

Tanım 3.1.6 (Bauhardt, 1977): Her $S \in L(E,F)$ operatörü için Hilbert sayıları $A \in L(l_2, E)$ ve $B \in L(F, l_2)$ olmak üzere

$$h_n(S) := sup\{a_n(BSA) : \|A: l_2 \to E\| \leq 1, \|B: F \to l_2\| \leq 1\},$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.4 (Pietsch, 2007)**:** Hilbert sayıları en küçük s-sayılarıdır.

İspat: Her $S \in L(E,F)$ için $A \in L(l_2, E)$ ve $B \in L(F, l_2)$ olmak üzere

$$a_n(BSA) = s_n(BSA) \leq \|B\| s_n(S) \|A\|$$

dir. Böylece her $S \in L$ için

$$h_n(S) \leq s_n(S)$$

olduğu görülür.

Not: Şu halde her $S \in L(E,F)$ için Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.4 den

$$h_n(S) \leq s_n(S) \leq a_n(S)$$

olduğu açıktır.

Tanım 3.1.7 (Pietsch, 2007)**:** $s = (s_n)$ bir s-sayı dizisi olsun. Bir $S \in L(E,F)$ operatörü ve l_2 klasik Hilbert dizi uzayı olmak üzere n. s-Weyl sayıları

$$s_n(S, l_2) \coloneqq sup\{s_n(SA) : \|A: l_2 \to E\| \leq 1\},$$

olarak tanımlanır. Bunlar bir s-sayı dizisi formundadır. Bu durumda $s = a = (a_n)$ yaklaşım sayıları alınacak olursa Pietsch (Pietsch, 1980a) çalışmasında ifade ettiği meşhur Weyl sayıları

$$x_n(S) = a_n(S, l_2)$$

elde edilir. Yani Weyl sayıları açık olarak ifade edilecek olursa;

$$x_n(S) = sup\{a_n(SA) : \|A: l_2 \to E\| \leq 1\},$$

dir. Açık bir şekilde onlar en geniş s-Weyl sayılarıdır. Dahası, bir s-Weyl sayı dizisi için aşağıda verilen *mixing çarpımsallık* mevcuttur, $S \in L(E, E_0)$ ve $T \in L(E_0, F)$ için

$$s_{n+m-1}(TS, l_2) \leq s_n(T, l_2) x_n(S)$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} s_{n+m-1}(TS, l_2) &:= sup\{s_{n+m-1}(TSA): \|A: l_2 \to E\| \leq 1\} \\ &\leq sup\{s_n(T)\, s_m(SA): \|A: l_2 \to E\| \leq 1\} \\ &= sup\{s_n(TB): \|B: l_2 \to E_0\| \leq 1\} \\ &\quad .\, sup\{s_m(SA): \|A: l_2 \to E\| \leq 1\} \\ &= s_n(T, l_2) x_m(S) \end{aligned}$$

dir. Aslında, eğer $A \in L(l_2, E)$ ise bu takdirde, mixing çarpımsallıktan önceki eşitsizlik s-Weyl sayılarının tanımı kullanılarak;

$$s_{n+m-1}(TSA) = s_{n+m-1}(TSA, l_2) \leq s_n(T, l_2)\, a_m(SA)$$

olarak hesaplanabilir.

Sonuç olarak, $(s_n) = (h_n)$ olması halinde Hilbert sayılarının mixing çarpımsallığı $S \in L(E, E_0)$ ve $T \in L(E_0, F)$ için

$$h_{n+m-1}(TS) = h_{n+m-1}(TS, l_2) \leq h_n(T, l_2)\, x_m(S) = h_n(T)\, x_m(S)$$

olarak elde edilir. Yani,

$$h_{n+m-1}(TS) \leq h_n(T)\, x_m(S)\, .$$

Tanım 3.1. 8 (Pietsch, 2007)**:** $s = (s_n)$ bir s-sayı dizisi olsun. Bir $S \in L(E, F)$ operatörü ve l_2 klasik Hilbert dizi uzayı olmak üzere n. Chang sayıları

$$y_n(S) := sup\{s_n(BS) : \|B: F \to l_2\| \leq 1\}\,,$$

olarak tanımlanır.

Weyl sayıları ve Chang sayıları hakkında ayrıntılı bilgi için (Pietsch, 1980a; Pietsch, 2007) bakılabilir. Weyl ve Chang Hilbert uzaylarda çalışmalarını yürütmüş olmalarına rağmen ileriki tüm gelişmelerin yolunu açmışlardır.

Not: Chang ve Weyl sayılarının tanımlarına bakılacak olursa Hilbert sayılarının tanımının ikiye bölünmüş olduğu görülür.

İzomorfizm Sayıları

Tanım 3.2.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L(E, F)$ operatörü için izomorfizm sayıları aşağıdaki gibi tanımlanır. Eğer $rank(S) < n$ ise bu takdirde bir G Banach uzayı vardır öyle ki $X \in L(G, E)$ ve $B \in L(F, G)$ operatörleri için

$$I_{\boldsymbol{G}} = BSX \text{ ve } dim(G) \geq n$$

dir. Bu durumda bütün ihtimaller üzerinden supremum alınırsa izomorfizm sayıları

$$i_n(S) := sup\{\|B\|^{-1}\|X\|^{-1}\}\,,$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:**

$$iso : S \to (i_n(S))$$

dönüşümü bir s-sayı fonksiyonudur.

İspat: s-sayılarının diğer özellikleri aşikar olduğundan sadece 2. özellik ispatlanacaktır. $i_n(S+T) > \|T\|$ olduğu kabul edilsin. Eğer $0 < \varepsilon < i_n(S+T) - \|T\|$ ise bu takdirde $X \in L(G,E)$ ve $B \in L(F,G)$ gibi bir Banach uzay vardır öyle ki

$$I_G = B(S+T)X\,, dim(G) \geq n$$

ve

$$\|B\|^{-1}\|X\|^{-1} \geq i_n(S+T) - \varepsilon > \|T\|.$$

$\|BTX\| < 1$ olduğundan BSX operatörü

$$BSX = B(S+T)X - BTX = I_G - BTX$$

terslenebilirdir. $I_G = (I_G - BTX)^{-1}BSX$ ve $\|(I_G - BTX)^{-1}\| \leq (1 - \|BTX\|)^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} i_n(S) &\geq \|(I_G - BTX)^{-1}B\|^{-1}\|X\|^{-1} \\ &\geq (1 - \|BTX\|)\|B\|^{-1}\|X\|^{-1} \\ &\geq \|B\|^{-1}\|X\|^{-1} - \|T\| \\ &\geq i_n(S+T) - \varepsilon - \|T\| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$i_n(S+T) \leq i_n(S) + \|T\| + \varepsilon$$

bulunur.

Teorem 3.2.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** İzomorfizm sayıları en küçük s-sayılarıdır.

İspat: $I_G = BSX$ ve $dim(G) \geq n$ olacak şekilde $S \in L(E,F), X \in L(G,E)$ olsun. Bu takdirde her bir s-sayısı fonksiyonu için s-sayılarının özellikleri kullanılırsa

$$1 = s_n(I_G) \leq \|B\|s_n(S)\|X\|$$

yazılabilir. Böylece her $S \in L$ için

$$i_n(S) \leq s_n(S)$$

dir.

İnjektiv s-Sayıları

Tanım 3.3.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Bir s-sayı fonksiyonu eğer M, F nin bir alt uzayı olmak üzere her $S \in L(E,M)$ için

$$s_n(J_M^F S) = s_n(S)$$

şartını sağlıyorsa injektiv s-sayısı adını alır. Burada J_M^F , M den F nin içine gömme dönüşümüdür. Başka bir ifadeyle $s_n(S)$, s-sayı fonksiyonunun injektivliği, S nin tanım kümesinin tümleyeni üzerine bağlı değildir.

Teorem 3.3.1 (Pietsch, 1974)**:** Gelfand sayıları bir injektive s-sayı fonksiyonudur.

İspat: Her $S \in L(E,F)$ için

$$c_n(J_M^F S) = inf\{\|J_M^F S J_Z^E\| : Z \subset E, codim(Z) < n\}$$

$$= inf\{\|J_M^F\|\|SJ_Z^E\|: Z \subset E, codim(Z) < n\}$$
$$= \|J_M^F\| inf\{\|SJ_Z^E\|: Z \subset E, codim(Z) < n\}$$
$$= \|J_M^F\| c_n(S)$$
$$= c_n(S)$$

dir.

Not: Eğer bir keyfi E Banach uzayının bir M alt uzayından F nin içine tanımlı her S_0 dönüşümü için $\|S\| = \|S_0\|$ olacak şekilde E den F nin içine bir S genişlemesi varsa F Banach uzayına genişleme özelliğine sahiptir denir.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E} \arrow[d, "J_M^E"'] \arrow[dr, "\mathbf{S}"] & \\ \mathbf{M} \arrow[r, "S_0"'] & \mathbf{F} \end{tikzcd}$$

Teorem 3.3.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Eğer F genişleme özelliğine sahip ise bu taktirde her $S \in L(E, F)$ için

$$c_n(S) = a_n(S)$$

dir.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Kısım 3.1' deki Teorem 3.1.2' den biliniyor ki, $a_n(S)$ en geniş s-sayı fonksiyonudur. O halde

$$c_n(S) \leq a_n(S) \quad (1)$$

dir. Eğer $\varepsilon > 0$ için $codim(M) < n$ olacak şekilde E nin bir M alt uzayı seçilirse

$$\|SJ_M^E\| \leq c_n(S) + \varepsilon$$

olur. Bu takdirde SJ_M^E nin $\|T\| = \|SJ_M^E\|$ olacak şekilde bir $T \in L(E, F)$ genişlemesi vardır. $A = S - T$ olarak alınsın. Dolayısıyla her $x \in M$ için $Ax = 0$ olduğundan $rank(A) < n$ dir. Böylece,

$$a_n(S) \leq \|S - A\| = \|T\| = \|SJ_E^M\| \leq c_n(S) + \varepsilon$$

olup

$$a_n(S) \leq c_n(S) \quad (2)$$

dir. Şu halde (1) ve (2) den

$$c_n(S) = a_n(S)$$

elde edilir.

Not: Her F Banach uzayı bir F^∞ genişleme özelliğine sahip bir Banach uzayın alt uzayıdır. J_F^∞ , F den F^∞ içine gömme dönüşümü olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.3 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L(E, F)$ olsun. Bu takdirde,

$$c_n(S) = a_n(J_F^{\infty} S)\,.$$

İspat: Gelfand sayılarının injektivliğinden ve Teorem 3.3.2' den

$$c_n(S) = c_n(J_F^{\infty} S) = a_n(J_F^{\infty} S)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3.4 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Gelfand sayıları en geniş injektiv s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. Bu takdirde her bir injektive s-sayı fonksiyonu için

$$s_n(S) = s_n(J_F^{\infty} S) \leq a_n(J_F^{\infty} S) = c_n(S)$$

eşitsizliği yazılabilir. $S \in L(E,F)$ olsun. Bu taktirde injektivliğin modülü

$$j(S) = sup\{\varrho \geq 0 : \ \|SX\| \geq \varrho\|X\|\}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.3.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S, T \in L(E,F)$ olsun. Bu taktirde

$$j(S+T) \leq j(S) + \|T\|.$$

Lemma 3.3.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $T \in L(E,F)$ ve $S \in L(F,G)$ olsun. Bu takdirde

$$j(ST) \leq \|S\| j(T)\,.$$

Dahası, eğer T üzerine ise

$$j(ST) \leq j(S)\|T\|.$$

Teorem 3.3.5 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:**

$$bern : S \rightarrow \big(u_n(S)\big)$$

bir injektive s-sayı fonksiyonudur.

İspat: s-sayılarının diğer koşulları aşikar olduğundan sadece 3. özelliği göstermek yeterlidir. Bunun için $T \in L(E_0, E)$, $S \in L(E,F)$, $R \in L(F, F_0)$ olmak üzere

$$u_n(RST) \leq \|R\| u_n(S) \|T\|$$

olduğu gösterilsin. $0 < \varepsilon < u_n(RST)$ olsun. Şu halde E_0 ın $dim(M_0) \geq n$ olacak şekilde bir M_0 alt uzayı vardır öyle ki

$$u_n(RST) - \varepsilon \leq j\left(RSTJ_{M_0}^{E_0}\right)$$

dir. $M = T(M_0)$ içine bir dönüşüm ve T_0 da T nin M_0 a kısıtlaması olsun. Bu takdirde

$$RSTJ_{M_0}^{E_0} = RSJ_M^E T_0 \ \text{ ve } \ \|T_0\| \leq \|T\|$$

dir. Lemma 3.3.2'den

$$0 < u_n(RST) - \varepsilon \leq j(RSJ_M^E T_0) \leq \left\|RSJ_M^E T_0\right\| j(T_0)$$

olup

$$j(T_0) > 0$$

dır. Böylece T_0 bire bir ve $dim(M) \geq n$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak T_0 üzerine olduğundan Lemma 3.3.2'den

$$u_n(RST) - \varepsilon \leq j(RSTJ_M^E T_0) \leq \|R\| j(SJ_M^E) \|T_0\| \leq \|R\| u_n(S) \|T\|$$

sağlanır.

Teorem 3.3.6 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Bernstein sayıları en küçük injektiv s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. Her bir injektiv s-sayı fonksiyonu için $dim(M) \geq n$ iken $j(SJ_M^E) \leq s_n(S)$ sağlandığı gösterilsin.

Şu halde $j(SJ_M^E) > 0$ olduğu kabul edilsin. $M_0 \coloneqq S(M)$ olsun. Bu takdirde M_0 ın içine bir dönüşüm olduğu göz önüne alınırsa S nin M ye kısıtlanışı S_0 terslenebilir ve

$$\|S_0^{-1}\| = j(SJ_M^E)^{-1}$$

dir. Şu halde,

$$\begin{aligned} 1 = s_n(I_M) &\leq s_n(S_0)\|S_0^{-1}\| \\ &= s_n\left(J_{M_0}^F S_0\right)\|S_0^{-1}\| \\ &\leq s_n(SJ_M^E)\|S_0^{-1}\| \\ &\leq s_n(S)j(SJ_M^E)^{-1} \end{aligned}$$

olup

$$(SJ_M^E) \leq s_n(S)$$

elde edilir. Bu ise her $S \in L$ için

$$u_n(S) \leq s_n(S)$$

olduğunu ispat eder.

Surjektiv s-Sayıları

Tanım 3.4.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) : E Banach uzayının bir bölüm uzayı E/N olsun. Bir s-sayı fonksiyonu her $S \in L(E/N\,,F)$ için eğer

$$s_n(SQ_N^E) = s_n(S)$$

şartını sağlıyorsa surjektiv adını alır. Burada Q_N^E , E den E/N nin içine bir kanonikal dönüşümdür.

Başka bir ifadeyle surjektivliğin anlamı $s_n(S)$ s-sayıları S nin tanım kümesi üzerinden bağımsızdır.

Teorem 3.4.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:**

$$kol : S \to d_n(S)$$

bir surjektiv s-sayı fonksiyonudur.

İspat: Kolmogorov sayıları surjektiv s-sayılarıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} d_n(SQ_N^E) &\coloneqq inf\left\{\|Q_M^F S Q_N^E\| : dim(M) < n\right\} \\ &\leq inf\left\{\|Q_M^F S\|\|Q_N^E\| : dim(M) < n\right\} \\ &\leq inf\left\{\|Q_M^F S\| : dim(M) < n\right\} \\ &= d_n(S) \end{aligned}$$

elde edilir.

Not: Eğer E Banach uzayından keyfi F Banach uzayının bir F/N bölüm uzayı içine tanımlı her S_0 dönüşümü ve $\varepsilon > 0$ için E den F ye $\|S\| \leq (H\varepsilon)\|S_0\|$ olacak şekilde bir S operatörü varsa E Banach uzayına bağlantılık özelliğine sahiptir denir.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{F} \arrow[d, "\boldsymbol{Q_N^F}"] \\ \mathbf{E} \arrow[ur, "\boldsymbol{S}"] \arrow[r, "\boldsymbol{S_0}"'] & \mathbf{F/N} \end{tikzcd}$$

Teorem 3.4.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Eğer E bağlantılık özelliğini sağlıyorsa her $S \in L(E,F)$ için

$$d_n(S) = a_n(S).$$

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. $a_n(S)$ en geniş s-sayı fonksiyonu olduğundan

$$d_n(S) \leq a_n(S) \tag{1}$$

dir. Eğer $\varepsilon > 0$ için F nin $\dim(N) < n$ olacak şekilde bir N alt uzayı seçilirse Kolmogorov sayılarının tanımından

$$\|Q_N^F S\| \leq d_n(S) + \varepsilon$$

eşitsizliği yazılır. Bu taktirde E bağlantılık özelliğine sahip olduğundan $Q_N^F S$ in $\|T\| \leq (1+\varepsilon)\,\|Q_N^F S\|$ olacak şeklinde bir $T \in L(E,F)$ operatörü ile bağlantısı vardır. $A := S - T$ olarak alınsın. Dolayısı ile her $x \in E$ için $Ax \in N$ olduğundan $rank(A) < N$ dir. Böylece

$$a_n(S) \leq \|S - A\| = \|T\| \leq (1+\varepsilon)(d_n(S) + \varepsilon)$$

olup

$$a_n(S) \leq d_n(S) \tag{2}$$

dir. Şu halde (1) ve (2)' den ispat tamamlanır.

Her E Banach uzayı bağlantılılık özelliğine sahip bir E^1 Banach uzayının bir bölüm uzayıdır. E^1 de E nin üzerine tanımlı bu kanonikal dönüşüm Q_E^1 olarak tanımlanır.

Teorem 3.4.3 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L(E,F)$ olsun. Bu takdirde,

$$d_n(S) = a_n(SQ_E^1)\,.$$

İspat: Kolmogorov sayılarının surjektifliğinden ve Teorem 3.4.2'den

$$d_n(S) = d_n(SQ_E^1) = a_n(SQ_E^1)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4.4 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Kolmogorov sayıları en geniş surjektif s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. Bu takdirde her bir surjektif s-sayı fonksiyonu için

$$s_n(S) = s_n(SQ_E^1) \leq a_n(SQ_E^1) = d_n(S) \,.$$

$S \in L(E,F)$ olsun. Bu takdirde surjektivliğin modülü,

$$q(S) \coloneqq sup\{\varrho \geq 0 : S(U_F) \supset \varrho U_F\}$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 3.4.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S, T \in L(E,F)$ olsun. Bu takdirde,

$$q(S+T) \leq q(S) + \|T\|.$$

İspat: $q(S+T) > \|T\|$ olduğu kabul edilsin. Eğer $0 < \varepsilon < q(S+T) - \|T\|$ ise $\varrho \coloneqq q(S+T) - \varepsilon$ alınabilir. $y \in U_F$ olsun. Şu halde,

$$Sx_1 + Tx_1 = (\varrho - \|T\|)y \text{ ve } \|x_1\| \leq \frac{\varrho - \|T\|}{\varrho}$$

$$Sx_2 + Tx_2 = Tx_1 \quad \text{ve} \quad \|x_2\| \leq \frac{\|Tx_1\|}{\varrho}$$

$$\dots$$

$$Sx_{n+1} + Tx_{n+1} = Tx_n \text{ ve } \|x_{n+1}\| \leq \frac{\|Tx_n\|}{\varrho}$$

dir. Bu taktirde $n = 1,2, \dots$ için

$$\|x_n\| \leq \left(\frac{\|T\|}{\varrho}\right)^{n-1} \frac{\varrho - \|T\|}{\varrho}$$

dir. $\|T\| < \varrho$ den

$$x \coloneqq \sum_1^{\infty} x_n \,,$$

olarak tanımlamak mümkün ve

$$Sx = (\varrho - \|T\|)y \text{ ve } \|x\| < 1$$

dir. Bu ise $S(U_E) \supset (\varrho - \|T\|)U_F$ olduğunu ispatlar. Sonuç olarak,

$$q(S) \geq \varrho - \|T\| = q(S+T) - \|T\| - \varepsilon.$$

Lemma 3.4.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $T \in L(E,F)$ ve $S \in L(F,G)$ olsun. Bu takdirde,

$$q(ST) \leq q(S)\|T\|$$

dir. Ayrıca eğer S bire bir ise

$$q(ST) \leq \|S\| q(T).$$

Teorem 3.4.5 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:**

$$mit : S \to v_n(S)$$

dönüşümü bir surjektif s-sayı fonksiyonudur.

İspat: Yalnızca $S, T \in L(E,F)$ için $v_n(S+T) \leq v_n(S) + \|T\|$ olduğunu gösterilsin. $\varepsilon > 0$ olsun. F nin $codim(N) \geq n$ olacak şekilde bir N alt uzayı vardır öyle ki

$$q\left(Q_N^F(S+T)\right) \geq v_n(S+T) - \varepsilon$$

dir. Lemma 3.4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} v_n(S+T) &\leq q\left(Q_N^F(S+T)\right)+\varepsilon \\ &\leq q(Q_N^F S)+\left\|Q_N^F T\right\|+\varepsilon \\ &\leq v_n(S)+\|T\|+\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.6 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Mitiagin sayıları en küçük surjektif s-sayılarıdır.

İnjektiv ve Surjektiv s-Sayıları

$s=(s_n)$ bir injektiv ve surjektiv s-sayı dizisi olsun. Yukarıdaki sonuçlardan, aşağıdaki mixing çarpımsallığın sağlandığı açıkça görülür. $T\in L(E_0,E), S\in L(E,F)$ ve $R\in L(F,F_0)$ için

$$s_{\boldsymbol{n}+m+l-2}(RST)\leq c_n(R)s_m(S)d_l(T).$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned} s_{\boldsymbol{n}+m+l-2}(RST) &= s_{\boldsymbol{n}+m+l-1-1}(RST) \\ &\leq s_{n+m-1}(RS)\, s_{1-1+l-1}(IT) \\ &\leq c_n(R). s_m(S)\, s_0(I)\, d_l(T) \\ &= c_n(R)s_m(S)d_l(T). \end{aligned}$$

Tanım 3.5.1 (Carl, 2009)**:** Bir $S\in L(X,Y)$ operatörünün simetrik yaklaşım sayıları

$$t_n(S) \coloneqq a_n(J_\infty S Q_1)\,,\ \ n\in\mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.5.1 (Pietsch, 1980a)**:** Simetrik yaklaşım sayıları en geniş surjektiv ve injektiv s-sayı dizisidir.

Not: Aslında, $x_n(S)$ injektif, $y_n(S)$ ise surjektiftir (Pietsch, 2007).

Dual s-Sayıları

Tanım 3.6.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** Her s-sayısı fonksiyonun $S\in L$ için dual s-sayısı fonksiyonu s^D

$$s_n^D(S) := s_n(S')$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.6.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S\in L$ olsun bu takirde

$$a_n(S)\geq a_n(S')\,.$$

Uyarı: C.V. Hutton yerel(lokal) refleksiflik ilkesini kullanarak her S kompakt operatörü için

$$a_n(S)=a_n(S')$$

ispatlamıştır. Diğer yandan C.V. Hutton tarafından $I: l_1\to c_0$ özdeşlik dönüşümünün ve dualinin yaklaşım sayıları $n=2,3,\ldots$ için tam olarak

$$a_n(I)=1 \text{ ve } a_n(I')=\tfrac{1}{2}$$

hesaplanmıştır.

Teorem 3.6.2 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L$ olsun bu taktirde

$$c_n(S) = d_n(S').$$

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. Duallikten $codim(M) < n$ olan E nin alt uzayı M ve $dim(N) < n$ olan E' dualinin alt uzayı N arasında

$$M \to N: = \{a \in E' : < x, a > = 0 \; \forall \, x \in M\},$$

$$N \to M: \; = \{x \in E : < x, a > = 0 \; \forall \, a \in N\},$$

bire bir bir eşleşme vardır. Dolayısıyla

$$\|SJ_M^E\| = \|Q_N^{E'} S'\|$$

olup aşikar olarak Gelfand ve Kolmogorov sayılarının tanımından iddianın doğruluğu ispatlanır.

Teorem 3.6.3 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L$ ve S kompakt olsun. Bu taktirde

$$d_n(S) = c_n(S').$$

Lemma 3.6.1 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L$. Bu takdirde

$$j(S) = q(S') \text{ ve } q(S) = j(S').$$

Teorem 3.6.4 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L$ olsun. Bu takdirde

$$v_n(S) = u_n(S').$$

Uyarı: Burada her $S \in L$ için

$$u_n(S) = v_n(S')$$

sağlanıp sağlanmadığı bilinmiyor. Sonuç olarak aşağıdaki teorem aşikar olarak ifade edilebilir.

Teorem 3.6. 5 (Pietsch, 1974; Pietsch, 1980a) **:** $S \in L$ olsun

$$i_n(S) \leq i_n(S').$$

Teorem 3.6.6 (Pietsch, 2007) **:** Weyl sayıları ve Chang sayıları birbirinin dual çiftidir. Yani her $S \in L$ operatörü için

$$x_n(S') = y_n(S)$$

ve

$$y_n(S') = x_n(S)$$

dir.

Not: Bauhardt, (Bauhardt, 1977) de $h_n(S') = h_n(S)$ olduğunu gösterdi.

Bazı s-Sayıları Arasındaki Bağıntılar

Yukarıda açıklanan kısımlardan faydalanılarak aşağıda ifade edeceğimiz teoremler elde edilir.

Teorem 3.7.1 (Pietsch, 1974)**:** $S \in L$ olsun. Bu takdirde

$$a_n(S) \geq c_n(S) \geq u_n(S) \geq i_n(S)$$

ve

$$a_n(S) \geq d_n(S) \geq v_n(S) \geq i_n(S).$$

Teorem 3.7.2 (Pietsch, 1974) **:** $S \in L$ olsun. Bu takdirde

$$d_n(S) \geq u_n(S).$$

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun.

$$d_n(S) \coloneqq inf\{\|Q_N^F S\| : \dim(N) < n\}$$

ve

$$u_n(S) \coloneqq sup\{j(SJ_M^E) : \dim(M) \geq n\}$$

olduğu için

$$\|Q_N^F S\| \geq j(SJ_M^E)$$

eşitsizliğini görmek yeterlidir. $j(SJ_M^E) > 0$ olduğu kabul edilsin. Eğer $M_0 \coloneqq S(M)$ ise bu takdirde $dim(M_0) \geq n$. Sonuç olarak Lemma 3.2' den

$$\|Q_N^F S\| = \|Sx\| = 1$$

olacak şekilde bir $x \in M$ vardır. Şu halde,

$$1 = \|Sx\| \geq j(SJ_M^E)\|x\|$$

ve

$$1 = \|Q_N^F Sx\| \leq \|Q_N^F S\|\|x\|$$

eşitsizliklerinden ispat tamamlanır.

Teorem 3.7.3 (Pietsch, 1974) **:** $S \in L$ olsun. Bu takdirde

$$c_n(S) \geq v_n(S).$$

İspat: Terorem 3.7.2, Teorem 3.6.2 ve Teorem 3.6.4' den

$$c_n(S) = d_n(S') \geq u_n(S') = v_n(S)$$

olduğu kolayca görülür.

Sonuç olarak şuana kadarki tanımlanmış olan s-sayı fonksiyonları için aşağıdaki diyagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd}
 & c_n(S) \arrow[r] \arrow[ddr] & u_n(S) \arrow[dr] & \\
a_n(S) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & i_n(S) \\
 & d_n(S) \arrow[r] \arrow[uur] & v_n(S) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Teorem 3.7.4 (Pietsch, 1974) **:** $S \in L$ olsun. Bu taktirde ϱ pozitif bir sabit olmak üzere

$$a_n(S) \leq \varrho^{n^{1/2}} d_n(S)$$

ve

$$a_n(S) \leq \varrho^{n^{1/2}} c_n(S).$$

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\|Q_N^F\| \geq d_n(S) + \varepsilon \text{ ve } dim(N) < n$$

olacak şekilde F nin bir N alt uzayı seçilebilir. Bu taktirde Lemma 3.3'den $P \in L(F,F),\ N = P(F)$ olan bir porjeksiyon vardır ve $\|P\| \leq (n-1)^{1/2}$ dir. Ayrıca

$$J(y+N) := y - P_y$$

den bir $J \in L\left(\frac{F}{N}, F\right)$ operatörü tanımlanabilir. Bu takdirde

$$\|J\| \leq \|I_F - P\| \leq 1 + (n-1)^{1/2} \leq \varrho^{n^{1/2}},$$

burada $\varrho = \sqrt{2}$ dir. Öte yandan

$$S - PS = (I_F - P)S = JQ_N^F S$$

den

$$a_n(S) \leq \|S - PS\| \leq \|J\| \|Q_S^N\| \leq \varrho^{n^{1/2}}(d_n(S) + \varepsilon)$$

elde edilir.

Teorem 3.7.5 (Pietsch, 1974) **:** $S \in L$ olsun. Bu takdirde

$$u_n(S) \leq n^{1/2} i_n(S) \text{ ve } v_n(S) \leq n^{1/2} i_n(S).$$

İspat: $S \in L(E,F)$ olsun. Eğer $0 < \varepsilon < u_n(S)$ ise

$$u_n(S) - \varepsilon < j(SJ_M^E) \text{ ve } dim(M) = n$$

olacak şekilde E nin bir M alt uzayını seçilsin. $N := S(M)$ olsun. $j(SJ_M^E) > 0$ olduğundan S nin S_0 kısıtlaması M den N ye üzerine dönüşümü göz önüne alınacak olursa terslenebilir ve

$$j(SJ_M^E) = \|S_0^{-1}\|^{-1}$$

dir. $PJ_N^F = I_N$ ve $\|P\| \leq n^{1/2}$ olacak şekilde $P \in L(E,F)$ olsun. Bu taktirde

$$I_M = S_0^{-1} PSJ_M^E$$

dır. Sonuç olarak

$$i_n(S) \geq \|S_0^{-1}P\|^{-1} \|J_M^E\|^{-1} \geq n^{-1/2} \|S_0^{-1}\|^{-1} = n^{-1/2}(u_n(S) - \varepsilon)$$

elde edilir.

Teorem 3.7.6 (Pietsch, 1974) **:** $S \in L$ olsun. Bu taktirde

$$c_n(S) \leq n^2 v_n(S)$$

ve

$$d_n(S) \leq n^2 v_n(S)$$

dir.

Teorem 3.7.7 (Pietsch, 1974) **:** $S \in L$ ve ϱ pozitif bir sabit olsun. Bu taktirde

$$a_n(S) \leq \varrho n^3 i_n(S)$$

dir.

Son olarak Banach uzaylardaki <u>diagonal operatörler için</u> aşağıdaki eşitsizlikler ifade edilebilir

$$h_n(S) \leq x_n(S) \leq c_n(S) \leq a_n(S)$$

ve

$$h_n(S) \leq y_n(S) \leq d_n(S) \leq a_n(S)$$

(Pietsch, 1974; Pietsch, 1980b; Pietsch, 2007). Öte yandan, çok daha ilginç olan ters yöndeki hesaplamalar için, bkz. (Pietsch, 1974; Pietsch, 2007).

$$a_n(T) \leq 2\sqrt{n}c_n(T)$$

$$a_n(T) \leq 2\sqrt{n}d_n(T)$$

$$c_{2n-1}(T) \leq 2e\sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k(T)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$d_{2n-1}(T) \leq 2e\sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} y_k(T)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$x_{2n-1}(T) \leq \sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} h_k(T)\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$y_{2n-1}(T) \leq \sqrt{n}\left(\prod_{k=1}^{n} h_k(T)\right)^{\frac{1}{n}}$$

burada $\sqrt{n}$ faktörü daima gereklidir.

Sonuç

Bu çalışmada s-sayılarının literatürdeki yeri ve önemi araştırıldı. Banach uzaylarda s-sayılarının literatürdeki gelişimi verilerek, s-sayılarının aksiyomatik yapısı Türkçeye kazandırıldı. Ayrıca literatürde mevcut ve ispatsız olarak ifade edilen bazı teoremlerin ispatı açık olarak ifade edildi. Uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan s-sayı örnekleri ve birbirleri arasındaki bağlantılar literatürdeki gelişime göre sıralandı.

Çıkar Çatışması Beyanı

Makale yazarları herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyan Özeti

Yazarlar makaleye benzer oranda katkı sağlamış olduğunu beyan eder.

Kaynakça

Al PI. Lorentz-Schatten classes of direct sum of operators. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 2020; 49: 835-842.

Bandtlow OF., Güven A. Explicit upper bounds for the spectral distance of two trace class operators. Linear Algebra and its Applications 2015; 466: 329-342.

Barramov E., Öztürk Mert R., Ismailov ZI. Selfadjoint extensions of a singular differential operators. Journal of Mathematical Chemistry 2012; 50: 1100-1110.

Bauhardt W. Hilbert zahlen von operatoren in banachraumen. Math. Nachr 1977; 79: 181-187.

Carl B., Kühn T. Local entropy moduli and eigenvalues of operators in Banach spaces. Rev. Math. İberoamerikana 1985; 1: 127-148.

Carl B. On a Weyl inequality of operators on Banach Spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 2009; 137: 155-159.

Carl B. On s-numbers, quasi s-numbers, s-moduli and Weyl inequelities of operators in Banach spaces. Revista Math. Comp 2010; 23: 467-487.

Carl B., Hinrichs A. Optimal Weyl-type ınequalities for operators in Banach spaces. Positivity. 2007; 11: 41-55.

Carl B., Hinrichs A. On s-numbers and Weyl inequalities of operators in Banach Spaces. Bull. Lon. Math Soc. 2009; 41: 332-340.

Gelfand IM. Astrakte funktionen und lineare operatoren. Mat. Sb. 1938; 4: 235-286.

Güven A., Lewicki G. Diagonal operators s-numbers and Bernstein pairs. Note di Mathematica 1997; 17: 209-216.

Gohberg IZ., Krein MG. Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert Space, Paris, 1971.

Hincichs A. Optimal Weyl inequalities in Banach spaces, Math. Soc. Proc. Amer. 2005; 134: 731-735.

Ismailov IZ., Cona L., Cevik EO., Guler BO. Weyl numbers of diagonal matrices. AIP Conference Proceedings. 2014; 1611: 296-299.

Ismailov IZ., Cona L., Cevik EO. Gelfand numbers of diagonal matrices. Hacettepe Journal 2015; 44(1): 75-81.

Kadec MI., Snobar MG. Some functionals on Minkowski's compactums. Mat. Zametki 1971; 10: 453-458.

Kato T. Perturbation theory of linear operators, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. John and Sons, 1978.

Kochubei AN. Symmetric operators and nonclassical specktral problems. Mat. Zametki 1979; 25: 425-434.

Kolmogorov AN. Über die beste annahering von funktionen einer gegebenen funktionenklasse. Ann. Math. 1936; 37: 107-110.

Konig H. Interpolation of operator ideals with an application to eigenvalue distribution problems. Math. Ann. 1978; 233: 35–48.

König H. s-Numbers, eigenvalues and the trace theorem in Banach spaces. Studia Math. 1980; 67: 157-172.

König H. Eigenvalues of operators and aplication. Handbookof Geometry of Banach Spaces. North-Holland, Amsterdam 2001; 1: 941-974.

König H. Eigenvalues of operators and applications, Mathematisches Seminar Universitat Kiel, Germany 2008; 1-40.

Lindenstrauss J., Rosenthal HP. The L_p-spaces. Israel J. Math. 1949; 7: 325-349.

Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Springer-Verlag, 1977.

Mitiagin BS., Pelczynski A. Nuclear operators and approximative dimension. Proc. ICM, Moscow. 1966; 366-372.

Narici L., Bachman G. Functional analysis. Academic Press. Inc. London, 1972.

Pietsch A. Einige neue klassen von kompakten linearen abbildungen. Rev. Roumaine Math. Pures and Appl. 1963; 8: 427-447.

Pietsch A. s-Numbers of operatorsin Banach spaces. Studia Math. 1974; 51: 123-132.

Pietsch A. Operator ideals. North-Holland Publisching Company 1980a.

Pietsch A. Weyl numbers and eigenvalues of operators in Banach spaces. Math. Ann. 1980b; 247: 149-168.

Pietsch A. Eigenvalues and s-numbers. Cambridge University Press., 1987.

Pietsch A. History of Banach spaces and linear operators. Birkhauser Boston, 2007.

Rudin W. Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, Inc., 1953.

Rynne BP., Youngson MA. Linear functional analysis. Springer, 2008.

Schmidt E. Zur theorie der linearen und nichtlinearen ıntegralgleichungen. Math. Ann. 1907; 63: 433-476.

Von Neumann J., Schatten R. The cross-space of linear transformations. Ann. of Math. 1948; 49: 557-582.

Weyl H. Inequalities between two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Nat. Sci. U.S.A. 1949; 35: 408-411.