Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi
Pamukkale University Journal of Engineering Sciences

# TEK MAKİNELİ ÇİZELGELEMEDE GENEL ÖĞRENME FONKSİYONLARI: OPTİMAL ÇÖZÜMLER

# SINGLE MACHINE SCHEDULING WITH GENERAL LEARNING FUNCTIONS: OPTIMAL SOLUTIONS

*Tamer EREN*[1]

[1]Endüstri Mühendisliği Bölümü, Kırıkkale Üniversitesi, 71451, Kırıkkale
tameren@hotmail.com

Geliş Tarihi/Received: 07.05.2012, Kabul Tarihi/Accepted: 25.06.2012 doi: 10.5505/pajes.2013.43153
*Yazışılan yazar/Corresponding author

**Özet**

*Çizelgeleme literatürünün çoğunda işlerin işlem zamanları sabit kabul edilmiştir. Ancak işlerin işlem zamanlarında, başlama zamanı veya pozisyonuna bağlı olarak azalma görülebilmektedir. Bu olgu literatürde öğrenme etkisi olarak bilinmektedir. Bu çalışmada genel öğrenme fonksiyonlu tek makineli çizelgeleme problemleri ele alınacaktır. Ele alınan problemlerin amaç fonksiyonları: (i) toplam ağırlıklı tamamlanma zamanı (ii) maksimum gecikme, (iii) geciken iş sayısı (iv) ağırlıklı geciken iş sayısı şeklindedir. Problemleri çözmek için doğrusal-olmayan programlama modelleri geliştirilmiştir.*

**Anahtar kelimeler:** Tek makineli çizelgeleme, Öğrenme fonksiyonları, Doğrusal-olmayan programlama modelleri.

**Abstract**

*In traditional scheduling problems, most literature assumes that the processing time of a job is fixed. However, there are many situations where the processing time of a job depends on the starting time or the position of the job in a sequence. In such situations, the actual processing time of a job may be less than its normal processing time if it is scheduled later. This phenomenon is known as the "learning effect". In this study, we introduce general learning functions into a single-machine scheduling problems. We consider the following objective functions: (i) sum of weighted completion times, (ii) maximum lateness (iii) number of tardy jobs (iv) number of weighted tardy jobs. Non-linear programming models are developed for solving these problems..*

**Keywords:** Single machine scheduling, Learning functions, Non-linear programming models.

## 1 Giriş

Çizelgeleme literatüründe problemler genellikle, işlem zamanları sabit kabul edilme varsayımına dayanmaktadır. Halbuki işin işlem zamanı, işin başlama zamanına veya işin pozisyonuna bağlı olarak azalabilmektedir. Bu olgu literatürde öğrenme etkisi olarak bilinmektedir. Öğrenme etkisi, öğrenme eğrisi ile tanımlanır. Öğrenme eğrisi benzer işlerin tekrarlanması sonucu performans fonksiyonundaki gelişimi gösterir. Literatürde öğrenme etkisi zamana-bağımlı ve pozisyona bağımlı olmak üzere iki grupta ele alınmıştır. Birinci grupta işin işlem zamanı işin başlama zamanına bağımlı olarak azalmasına dayanırken, diğerinde ise pozisyonuna göre işlem zamanları azaldığı kabul edilmiştir[1]. Bu çalışmada da son gruba giren tek makineli dört çizelgeleme problemi ele alınmıştır.

Çizelgelemede öğrenme etkisi ile ilgili ilk çalışma Biskup, [2] tarafından tek makineli problemler için yapılmıştır. Biskup, [2] çalışmasında toplam akış zamanını, teslim tarihinden sapma problemlerini incelemiştir. Mosheiov, [3] yaptığı çalışmada maksimum tamamlanma zamanının yine en kısa işlem zamanı (SPT) kuralı ile çözüldüğünü göstermiştir. Araştırmacı çok ölçütlü iki problemi ele almıştır. Bunlardan birincisi tamamlanma zamanı ve tamamlanma zamanından sapmayı enküçükleme, diğeri ise teslim tarihi atama problemidir. Bu iki problemin atama modeli ile $O(n^3)$ zamanda çözüldüğünü göstermiştir. Ayrıca Mosheiov [3] klasik durumda (öğrenme etkisiz) eniyi çözümü bulan yöntemlerin, öğrenme etkili olduğunda maksimum gecikme için en küçük teslim tarihi (EDD) ve minimum geciken iş sayısının Moore, [4] algoritması ile çözülmesi durumunda eniyi çözümü garanti etmediğini göstermiştir. Mosheiov ve Sidney, [5] yaptıkları çalışmada ise tek makineli çizelgelemede ortak teslim tarihli geciken iş sayısını minimize etmek için atama problemi ile $O(n^3 logn)$ zamanda çözmüşlerdir. Maksimum gecikme problemini ise Zhao v.d., [6] ve Wu v.d., [7] özel durumlarda $O(nlogn)$ zamanda çözüldüğünü göstermişlerdir. Eren, [8] aynı problemin zamana-bağımlı öğrenme etkili durumda optimal sonuçlarını bulmak için doğrusal-olmayan programlama modeli önermiştir. Eren ve Güner, [9] ise yaptıkları çalışmada toplam gecikme problemini ele almışlar ve problem için matematiksel programlama modeli önermişlerdir. Ayrıca büyük boyutlu problemler için tabu arama ve tavlama benzetimi sezgiselleri geliştirmişlerdir. Eren ve Güner, [10] diğer bir çalışmasında iki ölçütlü öğrenme etkili problemini incelemişlerdir. Ele alınan performans ölçütleri toplam tamamlanma zamanı ve toplam gecikmedir. Wu ve Lee, [11] iki öğrenme etkisi fonksiyonunu kullanarak tek makinede maksimum tamamlanma zamanı ve toplam tamamlanma zamanı ölçütlerinin SPT kuralı ile, toplam ağırlıklı tamamlanma zamanının ise özel durumda en kısa ağırlıklı işlem zamanı (SWPT) kuralı ile çözülebileceğini ispat etmişlerdir. Eren, [12] iki ölçütlü zamana-bağımlı öğrenme etkili çizelgeleme probleminde maksimum erken bitirme ve geciken iş sayısı ölçütleri için matematiksel programlama önermiştir. Yin v.d., [13]; Lai ve Lee, [14];Lu v.d., [15] işlem zamanındaki değişimi yeni bir fonksiyonla tanımlarken Wang [16]-[17]; Huang v.d., [18]-[19]; Wu, [20]; Wu v.d., [21] ile Yin ve Xu, [22]; Wang v.d., [23] hem öğrenme hem bozulma durumlarını incelemişlerdir. Araştırmacılar problemlerinde maksimum tamamlanma zamanı ve tamamlanma zamanının $k$.

kuvvetlerinin toplamının SPT kuralı ile optimal çözüldüğünü ispat etmişlerdir. Ayrıca özel durumlarda toplam ağırlıklı tamamlanma zamanının SWPT, maksimum gecikmenin EDD ile çözülebileceğini göstermişlerdir. Wang ve Li, [24]; Yin vd. [25]; Lee, [26] ile Bai v.d., [27] geçmiş sıra bağımlı hazırlık zamanlı ve farklı öğrenme etkili durumda ele almışlar. Maksimum tamamlanma zamanı ve tamamlanma zamanının $k$. kuvvetlerinin toplamı probleminin SPT kuralı ile optimal çözüldüğünü ispat etmişlerdir. Ayrıca toplam ağırlıklı tamamlanma zamanının SWPT kuralıyla ve maksimum gecikmenin EDD ile ve geciken iş sayısının Moore, [4] algoritmasıyla ancak özel durumlarda çözülebileceğini göstermişlerdir. Eren, [28] yaptığı çalışmada hazırlık ve taşıma zamanlarının öğrenme etkili olduğu tek makineli çizelgelemede geciken iş sayısını ortak teslim tarihi durumunda minimize etmek için atama modeli ile polinom zamanda çözülebileceğini göstermiştir. Ayrıca Eren, [28] tek makineli çizelgeleme probleminde hazırlık ve taşıma zamanları işe-bağımlı öğrenme etkili olduğu durumda ortak teslim tarihi kısıtı altında geciken iş sayısını ele almıştır. Eren, [29] yaptığı çalışmada logaritmik işlem zaman tabanlı öğrenme etkili problemde geciken iş sayısını minimize etmek için doğrusal olmayan programlama modeli geliştirmiştir. Eren, [30] zamana-bağımlı öğrenme etkili tek makineli çizelgelemede dört tane problemi ele almıştır. Bunlar; (i) maksimum gecikme, (ii) geciken iş sayısı (iii) geciken iş sayısı kısıtı altında maksimum gecikme (iv) maksimum gecikme kısıtı altında geciken iş sayısıdır. Ele alınan problemler için doğrusal olmayan programlama modelleri önermiştir.

Ele alınan öğrenme modeli Koulamas ve Kyparisis, [31]'in çalışmasından alınmıştır. Koulamas ve Kyparisis, [31] çalışmasında maksimum tamamlanma zamanı ve toplam tamamlanma zamanının SPT kuralı ile çözüldüğünü göstermişlerdir. Wang, [32] tek makinede yapmış olduğu çalışmada klasik durumda ağırlıklı tamamlanma zamanı toplamı, maksimum gecikme ve geciken iş sayılarının SWPT, EDD ve Moore, [4] algoritmasıyla optimal çözümü bulmasına rağmen öğrenme etkili durumda optimal çözümü garanti etmediğini göstermiştir. Bu çalışmada da tek makinede bu üç problem ile birlikte dördüncü problem olan ağırlıklı geciken iş sayısının optimal çözümleri, literatürde ilk defa geliştirilmiştir. Optimal çözümlerini bulmak için doğrusal-olmayan programlama modelleri önerilmiştir.

Bu çalışmanın planı şu şekildedir: Problemin tanımlanması ikinci bölümde açıklanacaktır. Üçüncü bölümde önerilen doğrusal-olmayan programlama modelleri sunulacaktır. Dördüncü bölümde açıklayıcı bir örnek verilecektir. Son bölümde ise yapılan çalışma değerlendirilecek ve yapılabilecek çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

## 2 Problemlerin Tanımlanması

Ele alınan problemlerdeki notasyonlar Koulamas ve Kyparisis, [31] ve Wang, [32]'ın çalışmalarından alınmıştır. Tek makinede işler ($j = 1,2,\dots,n$) işlem görmek için hazırdır. $p_j$ $w_j$ ve $d_j$ sırasıyla $j$ işinin işlem zamanını, ağırlığını ve teslim tarihini vermektedir. $p_{[r]}$, $w_{[r]}$, $d_{[r]}$ sırasıyla $r$. pozisyona atanan işin sırasıyla işlem zamanını, işin ağırlığını ve teslim tarihini ifade etmektedir. Eğer $j$ işi $r$. pozisyona atanırsa işin işlem zamanı şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$p_{jr} = p_j\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{r-1} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a$$

$a \geq 1$ öğrenme indeksidir. $C_r$, $r$. pozisyondaki işin tamamlanma zamanını vermektedir. $L_r$ ve $U_r$ sırasıyla $r$. pozisyona atanan işinin gecikmesini ve işin gecikme olup olmamasını vermektedir: $L_r = C_r - d_{[r]}$ ve $U_r = \begin{cases} 1 & L_r > 0 \\ 0 & L_r \leq 0 \end{cases}$ dir. Maksimum gecikme $L_{max} = \max_r L_r$ dir. Geciken işlerin sayısı $n_T = \sum_{r=1}^{n} U_r$ ile, geciken işlerin ağırlıklı sayıları ise $n_{wT} = \sum_{r=1}^{n} w_r U_r$ ile ifade edilmektedir. Problemdeki $Z_{jr} = \begin{cases} 1 & j \text{ işi } r.\text{pozisyona atanırsa} \\ 0 & j \text{ işi } r.\text{pozisyona atanmazsa} \end{cases}$ ile tanımlanmaktadır.

## 3 Doğrusal-Olmayan Programlama Modelleri

Ele alınan problemler şu şekilde tanımlanmaktadır:

1. Tek makinede öğrenme etkili toplam ağırlıklı tamamlanma zamanı problemi:

$$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / \sum wC$$

2. Tek makinede öğrenme etkili maksimum gecikme problemi:

$$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / L_{max}$$

3. Tek makinede öğrenme etkili geciken iş sayısı problemi:

$$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / n_T$$

4. Tek makinede öğrenme etkili geciken ağırlıklı iş sayısı problemi:

$$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / n_{wT}$$

### 3.1. $1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / \sum wC$ Probleminin Optimal Çözümü

Wang [32] yaptığı çalışmada ele alınan ağırlıklı tamamlanma zamanını minimize etme probleminin iki özel durumda temel dağıtım kuralları ile çözülebileceğini göstermiştir. İşlerin tüm işlem zamanlarının eşit olduğu durumda $\left(1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a p_j = p / \sum wC\right)$ ağırlıkların küçükten büyüğe doğru sıralanmasıyla ve işlerin ağırlıkları işlem zamanlarının belli bir katıysa $\left(1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a w_j = kp_j / \sum wC\right)$ SPT kuralıyla çözülebileceğini ifade etmiştir.

Önerilen ağırlıklı tamamlanma zamanlarının toplamını minimize eden doğrusal olmayan programlama modeli $n^2 + 3n$ değişkenli ve $5n$ kısıtlıdır.

Amaç fonksiyonu:

$$Min \sum_{r=1}^{n} w_r C_r \qquad (1)$$

Kısıtlar:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_{jr} = 1 \qquad r = 1,2,\dots,n. \qquad (2)$$

$$\sum_{r=1}^{n} Z_{jr} = 1 \qquad j = 1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

$$w_{[r]} = \sum_{j=1}^{n} Z_{jr} w_j \quad r = 1,2,\ldots,n. \tag{4}$$

$$p_{[r]} = \sum_{j=1}^{n} Z_{jr} p_j \quad r = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

$$C_r \geq C_{r-1} + p_{[r]} \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a \qquad r = 1,2,\ldots,n. \tag{6}$$

$Z_{jr}: 0\ veya\ 1$ diğer değişkenler negatif olmayan değişkenler

$$r = 1,2,\ldots,n. \qquad j = 1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Kısıt (2), *r*. pozisyona sadece bir tek işin atanmasını, Kısıt (3), her bir işin sadece bir kez çizelgelenmesini ifade etmektedir. Kısıt (4) ve Kısıt (5) sırasıyla *r*. pozisyondaki işin ağırlığı ve işlem zamanını göstermektedir. Kısıt (6), *r*. pozisyondaki işin tamamlanma zamanının bir önceki işin tamamlanma zamanı ve *r*. pozisyondaki işin işlem zamanından büyük veya eşit olmasını göstermektedir ($C_0 = 0$).

### 3.2 $1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a /L_{max}$ Probleminin Optimal Çözümü

Wang, [32] yaptığı çalışmada ele alınan maksimum gecikmeyi minimize etme probleminin üç özel durumda temel dağıtım kuralları ile çözülebileceğini göstermiştir. İşlerin tüm işlem zamanlarının eşit olduğu durumda $\left(1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a p_j = p/L_{max}\right)$ EDD kuralı ile, işlerin tüm teslim tarihlerinin eşit olması durumunda $\left(1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a d_j = d/L_{max}\right)$ SPT kuralı ile ve işlerin teslim tarihleri işlem zamanlarının belli bir katıysa $\left(1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a d_j = kp_j/L_{max}\right)$ EDD kuralıyla çözülebileceğini ifade etmiştir.

Önerilen maksimum gecikmeyi minimize eden doğrusal olmayan programlama modeli $n^2 + 3n + 1$ değişkenli ve $6n$ kısıtlıdır.

Amaç fonksiyonu:

$$Min\ L_{max} \tag{8}$$

Kısıtlar:

Kısıt (2), Kısıt (3), Kısıt (5) – Kısıt (7)

$$d_{[r]} = \sum_{j=1}^{n} Z_{jr} d_j \quad r = 1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

$$L_{max} \geq C_r - d_{[r]} \quad r = 1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

Kısıt (9) *r*. pozisyondaki işin teslim tarihini göstermektedir. Kısıt (10), maksimum gecikme, *r*. pozisyondaki işin tamamlanma zamanı ile gecikme arasındaki farktan büyük veya eşit olmasını göstermektedir.

### 3.3 $1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a /n_T$ Probleminin Optimal Çözümü

Wang, [32] yaptığı çalışmada geciken iş sayısını minimize etme probleminin üç özel durumda temel dağıtım kuralları ile çözülebileceğini göstermiştir. İşlerin tüm işlem zamanlarının eşit olduğu durumda $\left(1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a p_j = p/n_T\right)$ EDD kuralı ile, işlerin tüm teslim tarihlerinin eşit olması durumunda $\left(1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a d_j = d/n_T\right)$ SPT kuralı ile ve işlerin teslim tarihleri işlem zamanlarının belli bir katıysa $\left(1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a d_j = kp_j/n_T\right)$ Moore [4] algoritmasıyla çözülebileceğini ifade etmiştir.

Önerilen geciken iş sayısını minimize eden doğrusal olmayan programlama modeli $n^2 + 4n$ değişkenli ve $6n$ kısıtlıdır.

Amaç fonksiyonu:

$$Min \sum_{r=1}^{n} U_r \tag{11}$$

Kısıtlar:

Kısıt (2), Kısıt (3), Kısıt (5) – Kısıt (7), Kısıt (9)

$$C_r - d_{[r]} \leq MU_r \quad r = 1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Kısıt (12), *r*. pozisyondaki işin gecikme durumunu göstermektedir.

### 3.4 $1/p_{jr} = p_j \left( \frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \right)^a /n_{wT}$ Probleminin Optimal Çözümü

Geciken iş sayısını minimize eden doğrusal olmayan programlama modeli $n^2 + 5n$ değişkenli ve $7n$ kısıtlıdır.

Amaç fonksiyonu:

$$Min \sum_{r=1}^{n} w_r U_r \tag{13}$$

Kısıtlar:

Kısıt (2) – Kısıt (7), Kısıt (9), Kısıt (12)

## 4 Sayısal Örnek

Tek makinede iş sayısı 10 olan bir problemin işlem ağırlıkları, zamanları ve teslim tarihleri Tablo 1'de verilmektedir.

Tablo 1: Sayısal örnek verileri.

| $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_j$ | 8 | 9 | 2 | 1 | 8 | 4 | 1 | 6 | 2 | 4 |
| $p_j$ | 8 | 17 | 19 | 16 | 4 | 7 | 6 | 11 | 5 | 12 |
| $d_j$ | 30 | 31 | 23 | 29 | 31 | 20 | 10 | 19 | 22 | 32 |

Öğrenme indeksi Wang, [32]'ın çalışmasındaki gibi $a = 1.5$ ile birlikte $a = 1.2$ ve $a = 1.7$ olmak üzere 3 farklı şekilde alınmıştır. Ele alınan dört problem aynı verilerle çözülmüştür. Önerilen doğrusal-olmayan programlama modelleri GAMS 22.5 [33] paket programı ile çözüldüğünde, bulunan sonuçlar Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2: Sayısal örnek sonuçları.

| $a$ | Optimal değerler | Optimal sıralama |
|---|---|---|
| 1.2 | $\sum wC = 1161.61$ | 5-1-6-8-2-9-10-7-3-4 |
| | $L_{max} = 22.26$ | 5-9-7-6-1-8-3-4-2-10 |
| | $n_T = 5$ | 7-6-1-5-10-4-2-8-9-3 |
| | $n_{wT} = 17$ | 8-6-9-1-5-4-2-7-3-10 |
| 1.5 | $\sum wC = 1099.17$ | 5-1-6-8-9-2-10-7-3-4 |
| | $L_{max} = 16.95$ | 9-7-6-1-8-3-4-2-5-10 |
| | $n_T = 5$ | 6-10-9-5-1-7-8-2-4-3 |
| | $n_{wT} = 16$ | 6-1-2-5-8-10-3-7-9-4 |
| 1.7 | $\sum wC = 1061.12$ | 5-1-6-8-9-2-10-7-3-4 |
| | $L_{max} = 14.01$ | 9-5-6-7-8-3-1-4-10-2 |
| | $n_T = 4$ | 7-5-9-6-1-10-8-2-4-3 |
| | $n_{wT} = 15$ | 8-5-6-1-10-6-3-2-4-7 |

$a = 1.5$ için sonuçlar şu şekildedir:

$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / \sum wC$ problemi, sayısal örnekte 130 değişken ve 50 kısıttan oluşmaktadır. Problem çözüldüğünde optimal sıralama 5-1-6-8-9-2-10-7-3-4 ve ağırlıklı tamamlanma zamanı toplamı $\sum wC = 1099.17$ birim zaman olarak bulunmuştur.

$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / L_{max}$ problemi, sayısal örnekte 131 değişken ve 60 kısıttan oluşmaktadır. Problem çözüldüğünde optimal sıralama 9-7-6-1-8-3-4-2-5-10 ve maksimum gecikme değeri $L_{max} = 16.95$ birim zaman olarak bulunmuştur.

$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / n_T$ problemi, sayısal örnekte 140 değişken ve 60 kısıttan oluşmaktadır. Problem çözüldüğünde optimal sıralama 6-10-9-5-1-7-8-2-4-3 ve geciken iş sayısı $n_T = 5$ birimdir.

$1/p_{jr} = p_j\left(\frac{\sum_{i=r}^{n} p_{[i]}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^a / n_{wT}$ problemi, sayısal örnekte 150 değişken ve 70 kısıttan oluşmaktadır. Problem çözüldüğünde optimal sıralama 6-1-2-5-8-10-3-7-9-4 ve ağırlıklı geciken iş sayısı $n_{wT} = 16$ birim ağırlık olarak bulunmuştur.

Tablo 2'de görüldüğü gibi öğrenme indeks değeri arttıkça toplam ağırlıklı tamamlanma zamanı, maksimum gecikme, geciken iş sayısı ve ağırlıklı geciken iş sayısı değerlerinde azalma meydana gelmektedir. Özellikle insan gücü ile yapılan işlerde uzmanlaşmanın (öğrenme oranının) artmasıyla işlerin tekrar etmesi nispetinde işlem zamanlarında azalma görülecektir. Dolayısıyla ele alınan problemlerdeki amaç fonksiyon değerleri de düşecektir.

## 5 Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada genel öğrenme etkili fonksiyonlu tek makineli çizelgelemede 4 tane problem ele alınmıştır. Bu problemler (i) işlerin ağırlıklı tamamlanma zamanı toplamı (ii) maksimum gecikme, (iii) geciken iş sayısı (iv) ağırlıklı geciken iş sayısı. Ele alınan problemlerin optimal çözümleri, literatürde ilk defa geliştirilmiştir. Optimal çözümlerini bulmak için doğrusal-olmayan programlama modelleri önerilmiştir. Önerilen model 10 işli bir sayısal örnek üzerinde gösterilmiştir.

Ele alınan problemler, öğrenme etkili olduğunda NP-zor yapısında olmasından dolayı optimal çözümler ancak küçük boyutlu problemlerde çözülebilmektedir. Bundan sonraki çalışmalarda, büyük boyutlu problemleri çözmek için sezgisel yaklaşımlar geliştirilebileceği gibi, çok makineli durumların da araştırmacılar için ilgi çekici konulardan olacağı tahmin edilmektedir.

## 6 Kaynaklar

[1] Biskup, D., "A state-of-the-art review on scheduling with learning effects" *European Journal of Operational Research,* 188 (2), 315-329, 2008.

[2] Biskup, D., "Single-machine scheduling with learning considerations" *European Journal of Operational Researc,.* 115, 173-178, 1999.

[3] Mosheiov, G., "Scheduling problems with a learning effect", *European Journal of Operational Research,* 132, 687-693, 2001.

[4] Moore, J.M., "An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of tardy jobs" *Management Science,* 15, 102–109, 1968.

[5] Mosheiov, G. Sidney, J.B., "Note on scheduling with general learning curves to minimize the number of tardy jobs", *Journal of the Operational Research Society,* 56, 110–112, 2005.

[6] Zhao, C.L. Zhang, Q.L. Tang, H.Y., "Machine scheduling problems with learning effects", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis,* 11, 741-750, 2004.

[7] Wu, C.C. Lee, W.C. Chen, T., "Heuristic algorithms for solving the maximum lateness scheduling problem with learning considerations", *Computers & Industrial Engineering,* 52, 124-132, 2007.

[8] Eren, T., "Zamana-bağımlı öğrenme etkili çizelgeleme probleminde maksimum gecikme minimizasyonu: Doğrusal-olmayan programlama modeli", *Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi,* 23 (2), 459-465, 2008.

[9] Eren, T. Güner, E., "Minimizing total tardiness in a scheduling problem with a learning effect", *Applied Mathematical Modelling,* 31, 1351-1361, 2007.

[10] Eren, T. Güner, E., "A bicriteria scheduling with a learning effect: total completion time and total tardiness" *INFOR: Information Systems and Operational Research,* 45 (2), 75-81, 2007.

[11] Wu, C.C. Lee, W.C., "Single-machine scheduling problems with a learning effect", *Applied Mathematical Modelling,* 32, 1191–1197, 2008.

[12] Eren, T., "İki ölçütlü zamana-bağımlı öğrenme etkili çizelgeleme problemi", *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi,* 14(1), 387-394, 2009.

[13] Yin, Y. Xu, D. Wang, J., "Single-machine scheduling with a general sum-of-actual-processing-times based and job-position-based learning effect", *Applied Mathematical Modelling,* 34, 3623–3630, 2010.

[14] Lai, P.J. Lee, W.C., "Single-machine scheduling with general sum-of-processing-time-based and position-based learning effects", *Omega,* 39, 467–471, 2011.

[15] Lu, Y.Y. Wei, C.M. Wang, J.B., "Several single-machine scheduling problems with general learning effects", *Applied Mathematical Modelling,* in press, 2012.

[16] Wang, J.B., "Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration", *Omega.* 35, 397–402, 2007.

[17] Wang, X.R., "Single machine scheduling with time-dependent deterioration and exponential learning effect", *Computers & Industrial Engineering,* 58, 58–63, 2010.

[18] Huang, X. Wang, J.B. Wang, L.Y. Gao, W.J. Wang, J.B., "Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration", *Omega,* 35, 397–402, 2007.

[19] Huang, X. Wang, J.B. Wang, L.Y. Gao, W.J. Wang, X.R., "Single machine scheduling with time-dependent deterioration and exponential learning effect", *Computers & Industrial Engineering,* 58, 58–63,2010.

[20] Wu, Y.B., "A note on Single machine scheduling with time-dependent deterioration and exponential learning effect", *Computers & Industrial Engineering,* 61, 902–903, 2011.

[21] Wu, Y.B. Wang, M.Z. Wang, J.B., "Some single-machine scheduling with both learning and deterioration effects", *Applied Mathematical Modelling,* 35, 3731–3736, 2011.

[22] Yin, Y. Xu, D., "Some single-machine scheduling problems with general effects of learning and deterioration", *Computers and Mathematics with Applications,* 61, 100–108, 2011.

[23] Wang, J.B. Hsu, C.J. Yang, D.L. 2012. "Single-machine scheduling with effects of exponential learning and general deterioration", Applied Mathematical Modelling. In press.
[24] Wang, J.B. Li, J.X., "Single machine past-sequence-dependent setup times scheduling with general position-dependent and time-dependent learning effects", *Applied Mathematical Modelling,* 35, 1388–1395, 2011.
[25] Yin, Y. Xu D. Huang, X., "Erratum to ''Single machine past-sequence-dependent setup times scheduling with general position-dependent and time-dependent learning effects'' [Appl. Math. Modell. 35, 1388–1395", *Applied Mathematical Modelling,* 35, 5936–5938, 2011.
[26] Lee, W.C., "A note on single-machine scheduling with general learning effect and past-sequence-dependent setup time", *Computers and Mathematics with Applications,* 62, 2095–2100, 2011.
[27] Bai, J. Wang, M.Z. Wang, J.B., "Single machine scheduling with a general exponential learning effect", *Applied Mathematical Modelling,* 36, 829–835, 2012.
[28] Eren, T., "Hazırlık ve taşıma zamanlarının öğrenme etkili olduğu tek makineli çizelgeleme problemi: Geciken iş sayısı minimizasyonu", *International Journal of Engineering Research and Development,* 6 (6), 34-36, 2011.
[29] Eren, T., "Logaritmik toplam işlem zaman tabanlı öğrenme etkili tek makineli çizelgeleme: geciken iş sayısı minimizasyonu", *Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,* 1, 83-88, 2012.
[30] Eren, T., "Zamana-bağımlı öğrenme etkili tek makineli çizelgeleme problemleri", *Sigma Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi,* basımda, 2012.
[31] Koulamas, C. Kyparisis, G.J., "Single-machine and two-machine flowshop scheduling with general learning functions", *European Journal of Operational Research,* 178, 402–407, 2007.
[32] Wang, J.B., "Single-machine scheduling with general learning functions", *Computers and Mathematics with Applications,* 56, 1941–1947, 2008.
[33] GAMS 22.5, Development Corporation, GAMS– the solver manuals, *GAMS user notes,* Washington, DC, USA, 2007.