

# Eksenel Yüklü Ankastre Çubuğun Davranışının Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemiyle Çözülmesi

## Modelling of Axially Loaded Cantilever Rod Using Element Free Galerkin Method

Mahmut PEKEDİS ve Hasan YILDIZ\*

Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 35100, İzmir

Geliş Tarihi/Received : 09.04.2009, Kabul Tarihi/Accepted : 28.08.2009

### ÖZET

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi çeşitli mühendislik sistemlerine uygulanan sayısal çözümleme yöntemlerinden birisidir. Bu çalışmada, bu amaçla lineer elastik, dolu kesitli çubuklar seçilip, değişik yük şartları iki örnek üzerinde incelenmiştir. Problem olarak,  $f(x)=x$  ve  $f(x)=0$  [ $f(l)=1$ ] eksenel yüklerine maruz bırakılan ankastre çubuklar, bir boyutlu lineer elastik olarak incelenmiştir. Şekil fonksiyonu olarak hareketli en küçük kareler yaklaşımı kullanılmıştır. Şekil fonksiyonları bir ve iki boyutlu çözüm bölgelerine uygulanıp grafik olarak verilmiştir. Bu çalışmada yaklaşık çözüm için araştırmacılar tarafından kullanılıp önerilen eleman bağımsız Galerkin yöntemi yardımıyla hesaplanan yer değiştirme değerleri, analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak eleman bağımsız Galerkin metodunun bu tür problemlerin çözümünde etkili ve güvenilir bir yöntem olduğu belirlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Ağsız yöntemler, Eleman bağımsız Galerkin yöntemi, Hareketli en küçük kareler yaklaşımı, Analitik çözüm.

### ABSTRACT

Element free Galerkin method is one of many numerical methods which was applied to various engineering systems. Therefore, in this study two linear elastic rods having solid cross sections were investigated for different loading conditions. The problem considered in the analysis is one dimensional linear elastic cantilever rods and rods are subjected to axial loads  $f(x)=x$  and  $f(x)=0$  [ $f(l)=1$ ]. Moving least square approximation was used as shape functions. Shape functions were applied to one and two dimensional solution domains, and plotted. In this paper, axial displacement values obtained by using element free Galerkin method which proposed and used by researchers for approximating the solution were compared with analytical solution. As a result, it was found that element free Galerkin method is an effective and trustworthy numerical solution method.

**Keywords :** Meshless methods, Element free Galerkin method, Moving least square approximation, Analytical solution.

### 1. GİRİŞ

Farklı tiplerdeki diferansiyel denklemlerin çözümünde sayısal çözümleme yöntemlerinin uygulanması son elli yıldır oldukça ilgi uyandırmaktadır. Son on yıl boyunca çeşitli ağsız yöntemler farklı mühendislik problemlerine uygulanarak başarılı bir şekilde geliştirilmiştir.

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü iki temel kısımdan oluşmaktadır. Bilinmeyen fonksiyon yaklaşık olarak belirlenir. Yaklaşık olarak belirlenen bilinmeyen, diferansiyel denklemin türetilen zayıf veya güçlü formları sınır koşullarıyla birlikte kullanılarak çözülür. Nümerik metodun doğruluk ve verimliliği bu iki kısmın doğruluk ve verimliliğine bağlıdır.

\* Yazışılan yazar/Corresponding author. E-posta adresi/E-mail address : hasan.yildiz@ege.edu.tr (H. Yıldız)

Diferansiyel denklemler sayısal olarak sonlu farklar, sonlu hacimler, sonlu elemanlar, sınır elemanlar vb. yöntemler ile çözülmektedir. Lakin bu yöntemlerin çözümlemelerde kullanılması esnasında bazı zorluklar yaşanmaktadır. En çok kullanılan Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde (SEY) temel zorluk çözüm ağının oluşturulmasıdır. Ayrıca SEY yüksek deformasyonlu ve çok sayıda elemana sahip problemlerin çözümünde sorunlar çıkarmaktadır. Bunun yanında yapısal çatlak optimizasyonu problemlerinde yeniden çözüm elde etmek için tekrar ağ türetilmesinde zorluk göstermektedir. Sonlu elemanlar yönteminde alışılmış ağ tekniğiyle bu gibi zorlukların üstesinden gelmek oldukça zordur. Mevcut yöntemlerdeki bu gibi sorunlar nedeniyle ağsız yöntemler geliştirilmiştir. Ağsız yöntemlerde çözüm ağı bulunmamakta ve düzenli bir şekilde dizilimi gerektirmeyen düğümler kullanılmaktadır. Ağ oluşturmada karşılaşılan zorluklar bu metotta görülmez. Mühendislik ve fen uygulamalarında daha esnek bir yaklaşım sunar. Son elli yıldır ağ interpolasyon yöntemine dayanan sonlu elemanlar yöntemi nümerik mekanik biliminde yaygın olarak kullanılmaktadır. Fen ve mühendisliğin gelişmesine kayda değer yararlar sağlamıştır. Buna rağmen sonlu elemanlar yöntemi yüksek deformasyonlu ve yüksek ağı sahip problemlerin çözümünde sorunlar çıkardığı görülmüştür. Örneğin yapısal çatlak optimizasyon problemlerinde yeniden çözüm elde etmek için tekrar ağ türetmede zorluklar göstermektedir. Sonlu elemanlar yönteminde çözüm sürecinde yaşanan zorlukların giderilmesi için değişik nümerik metotların geliştirilmesine olanak sağlamıştır.

Ağsız metotların ilk uygulamaları 1977 yılında Lucy ve Gingold ve Monaghan tarafından geliştirilen düz parçacık hidrodinamiğidir (Lucy, 1977; Gingold ve Monaghan, 1977). Öncelikle bu metot astrofizik ve daha sonra akışkanlar dinamiğinde kullanılmıştır (Bonet ve Lok, 1999; Monaghan, 1988). Libersky ve arkadaşları düz parçacık hidrodinamiğini katı mekaniği problemlerine uygulamıştır (Libersky v.d, 1993). Eleman bağımsız Galerkin yöntemi 1994'te geliştirilmiş olup zayıf form temelli ilk yöntemdir (Belytschko v.d., 1994). Yeniden üretilen çekirdek parçacığı yöntemi eleman bağımsız Galerkin yönteminden bir yıl sonra geliştirilmiştir (Liu v.d., 1995). Babuska ve Melenk (1995) sonlu elemanlar çözüm sürecine benzeyen birimsel parçacık sonlu

elemanlar yöntemini geliştirmiştir. Bu metot hp- toz bulutu metoduna oldukça benzerlik göstermektedir. 1999 yılında Zhu, 2000 yılında Atluri ve Zhu iki çeşit ağsız yöntem önermişlerdir. Ağsız yerel sınır integral metodu ve ağsız yerel Petrov Galerkin metodudur. Her iki metotta ağsız şekil fonksiyonların türetilmesinde hareketli en küçük kareler yaklaşımı kullanılır (Atluri ve Zu, 1998). 1995 yılında Babuska ve Melenk, 1995 yılında Duarte ve Oden birimin parçalanması yöntemi ile yeni fonksiyonlar türetmeyi amaçlarken h-p bulutu adı verilen yeni ağsız metot elde etmişlerdir (Babuska, ve Melenk, 1995; Duarte ve Oden, 1995). Aynı şekilde Babuska ve Melenk klasik sonlu elemanlar yönteminin çözüm prosedürünü geliştirdikleri yöntemle uygulayarak birimsel parçacık sonlu elemanlar yöntemini elde etmişlerdir.. Mukherjee ve çalışma arkadaşı sınır düğüm metodunu önermişlerdir. Bu yöntemde saçılan düğümlere bağlı kalarak problem bölgesi gösterilir. Sınır düğüm metodu üç boyutlu potansiyel teori ve elasto-statik problemlerde kullanılmıştır (Mukherjee ve Mukherjee, 1997).

Bu çalışmada bir boyutlu ankastre çubuk, değişik sınır koşullarıyla eleman bağımsız Galerkin yöntemiyle incelenip, çubuğun eksenel deformasyonu analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Eleman bağımsız Galerkin yönteminin uygulanması aşamasında ilk olarak şekil fonksiyonları belirlenir. Bu aşamada kullanılan yöntemlerden bir tanesi de hareketli en küçük kareler yöntemidir.

## 2. ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi ağsız yöntemlerden en çok kullanılanlardan bir tanesidir. Metod şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler yönteminin fonksiyonlarını kullanır (Belytschko v.d., 1994). Galerkin yönteminde çözüm adımları aşağıdaki gibidir.

- Zayıf formdan sistem denklemleri türetilmesi için Galerkin prosedürü uygulanır.
- Arka plandaki ağla integral uygulanır.

İki boyutlu  $\Omega$  problem bölgesi,  $\Gamma$  sınırları içinde kaldığı kabul edilip, sınır iki parçaya bölündüğünde,  $\Gamma_u$  ifadesi yer değiştirme değerlerinin,  $\Gamma_t$  çekme kuvvetinin tanımlandığı

bölgeleri göstermektedir.

Elastostatik durumlar için alan denklemleri

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

gibi tanımlanır.

Yer değiştirme (esas) ve çekme (doğal) sınır koşulları aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \Gamma_u \text{ üzerinde} \quad (4)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \Gamma_t \text{ üzerinde} \quad (5)$$

Daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi Galerkin prosedürü uygulanıp denge denklemini test fonksiyonu olan  $v$  ile çarpılırsa zayıf form elde edilir.

$$\int_{\Omega} v_i (\sigma_{ij,j} n_j + b_i) d\Omega = 0 \quad (6)$$

$v_i \sigma_{ij}$  için zincir kuralı uygulanırsa;

$$\int_{\Omega} (v_i \sigma_{ij})_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (7)$$

elde edilir.

Birinci terime Gauss teoremi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{\Gamma} v_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (8)$$

Denklem (6)'da verilen sınır koşulları denklem (8)'e uygulanırsa;

$$\int_{\Gamma} v_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega = 0 \quad (9)$$

elde edilir.

$$\sigma_{ij} v_{i,j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Gamma} v_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} v_i b_i d\Omega \quad (11)$$

Denklem vektör notasyonları şeklinde yazılıp son hal olarak aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(u) C \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} v d\Gamma + \int_{\Omega} b v d\Omega \quad (12)$$

Lagrange çarpanları metodu esas sınır koşulları için uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{\Omega} \varepsilon^T(u) C \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{t} v d\Gamma + \int_{\Omega} b v d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta \lambda (u - \bar{u}) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} v \lambda d\Gamma \quad (13)$$

Lagrange çarpan ifadesi yaklaşık olarak;

$$\lambda = N_I(s) \lambda_I \quad (14)$$

gibi gösterilebilir.

Denklemlerin en son hali olarak;

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T C B_J d\Omega \quad (16)$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I N_K D S d\Gamma \quad (17)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_I b d\Omega \quad (18)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} N_K S \bar{u} d\Gamma \quad (19)$$

Burada;  $S$ , 2 boyutlu diyagonal matristir.

$$B_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

olarak bulunur.

## 2. 1. Hareketli En Küçük Kareler Yöntemi

Hareketli En Küçük Kareler yöntemi (HEK), 1960 yılında Shepard tarafından özel noktalar arasında interpolasyonları türetmek için geliştirmiştir. Bu metod prosedür olarak ağırlıklı en küçük kareler veri eşitlemesiyle aynı özelliği taşımaktadır. Tek farkı bu metodun her noktaya ayrı ayrı uygulanmasıdır.

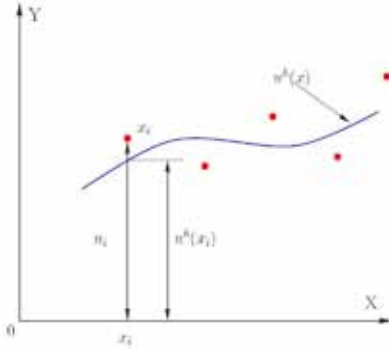
Örneğin  $u^h(x)$  değer fonksiyonunda,  $x_i$  noktasındaki fonksiyon değeri Şekil 1'deki gibi  $u_i = u^h(x_i)$  ifadesine eşit olacaktır.

$u^h(x)$  yaklaşık fonksiyonu;

$$u^h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m \quad (21)$$

$$u^h(x) = p^T(x) a \quad (22)$$

gibi denklemlerle tanımlanır.



Şekil 1. En küçük kareler yönteminde veri eşitlemesi.

Burada a değerlerinin bulunabilmesi için  $u_i$  ile  $u^h(x_i)$  değerleri için farkın karesi alınıp toplandığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$J = \sum_{i=1}^n [u^h(x_i) - u_i]^2 = \sum_{i=1}^n [p^T(x_i)a - u_i]^2 \quad (23)$$

Denklem (23)'ün a'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\sum_{i=1}^n p(x_i)p^T(x_i)a = \sum_{i=1}^n p(x_i)u_i \quad (24)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (24), bilinmeyen a ve  $u^h(x)$  değerlerinin bulunmasını sağlar. HEK yaklaşımları; her düğüm etrafında bir mesnet oluşturan bir ağırlık fonksiyonu, bir polinom olan taban ve düğümün konumuna bağlı olan katsayılardan ibarettir. Her bir düğüm için, ağırlık fonksiyonu sadece düğüm etrafındaki mesnet denilen küçük bir bölgede (etki bölgesi) sıfırdan farklıdır. Bu etki bölgelerinin kesişimi düğümler arasındaki bağlantıyı sağlar. HEK yaklaşımlarının önemli bir özelliği sürekliliklerinin ağırlık fonksiyonun sürekliliğine bağlı olmasıdır (Dolbow ve Belytschko, 1999). HEK fonksiyonları genellikle verilerin tam üzerinden geçmediğinden, bunlar yaklaşımlar olarak tanımlanırlar.  $u(x)$  fonksiyonunun yaklaşımı olan  $u^h(x)$  sabit katsayılı olmayan m. derece bir polinom kullanılarak oluşturulmuştur. Polinomun derecesi taban fonksiyonunun derecesine eşittir. Bir boyut için şekil fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılan denklemler aşağıda verilmiştir.

x noktası civarındaki yerel yaklaşık fonksiyon,

$$u_L^h(x) = p^T(x)a(x) \quad (25)$$

$$p^T(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^m] \quad (26)$$

a(x) katsayıları,

$$a^T(x) = [a_0(x) \ a_1(x) \ a_2(x), \ \dots \ a_m(x)] \quad (27)$$

dır. Bilinmeyen noktadaki parametreler olan  $a_i(x)$  değerleri bu noktada, yerel yaklaşım ve nodal parametreler arasında minimize edilmesiyle bulunur.

$$J = \sum_{l=1}^n w(x-x_l)[u_L^h(x_l, x) - u_l]^2 \quad (28)$$

$$= \sum_{l=1}^n w(x-x_l)[p^T(x_l)a(x) - u_l]^2$$

$$w(x-x_l) \neq 0 \quad (29)$$

Minimum J değeri (28) denkleminin a(x)'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^n w(x-x_l)2p_1(x_l)[p^T(x_l)a(x) - u_l] &= 0 \\ \sum_{l=1}^n w(x-x_l)2p_2(x_l)[p^T(x_l)a(x) - u_l] &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{l=1}^n w(x-x_l)2p_n(x_l)[p^T(x_l)a(x) - u_l] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(30) denklemleri vektör ve tensör formunda tekrar yazılırsa;

$$\sum_{l=1}^n w(x-x_l)2p(x_l)[p^T(x_l)a(x) - u_l] = 0 \quad (31)$$

eşitliği elde edilir. Sabit terim olan 2 sayısını elimine edip değişkenler sağ tarafa atılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n w(x-x_l)p(x_l)p^T(x_l)a(x) &= \\ \sum_{l=1}^n w(x-x_l)p(x_l)u_l & \end{aligned} \quad (32)$$

bağlantısı elde edilir. Böylece,

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (33)$$

$$A(x) = \sum_{l=1}^n w(x-x_l)p(x_l)p^T(x_l) \quad (34)$$

$$B(x) = [w(x-x_1)p(x_1) \ w(x-x_2)p(x_2) \ \dots \ w(x-x_n)p(x_n)] \quad (35)$$

elde edilir. Denklem (33)'ten a(x) değişkeni çözümlenip denklem (25)'e yerleştirilirse hareketli en küçük kareler yaklaşımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u^h(x) = p^T(x)[A(x)]^{-1}B(x)u \quad (36)$$

Bilinen yaklaşık form şeklinde yazılırsa;

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^N \Phi_I(x) u_I = \phi^T u \quad (37)$$

olarak sadeleştirilir. Fonksiyon tekrar yazılırsa aşağıdaki bağıntıya ulaşılır.

$$\phi^T(x) = p^T(x)[A(x)]^{-1} B(x) \quad (38)$$

x noktası için I. düğüm noktasındaki şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi_I(x) = p^T [A(x)]^{-1} w(x - x_I) p(x_I) \quad (39)$$

A(x) matrisi m×m boyutunda, radyal nokta interpolasyonu gibi moment matrisi olarak tanımlanır. Bu matrisin hareketli en küçük noktalar yönteminde bulunmak istenen noktada tersi alınır. Bir boyutlu lineer hal için moment matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$A(x) = w(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ x_1 & x_1^2 \end{bmatrix} + w(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 \\ x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} + \dots + w(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n \\ x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Denklem (40)'da açıkça görüldüğü gibi eğer n değeri 1'e eşitse x noktası sadece bir nodal aralığı içeriyor anlamına gelmektedir. m değeri 2'ye eşit olursa matris tekil olup dönüştürülemez. Dönüştürülebilmesi için gerekli olan koşul  $n \geq m$ 'dir.

Lineer ve kuadratik durumlar için temel fonksiyonlar sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$p^T(x) = [1 \ x \ y] \quad (41)$$

$$p^T(x) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]$$

### 2. 1. 1. Ağırlık Fonksiyonlarının Seçimi

Şekil fonksiyonlarının oluşturulabilmeleri için ağırlık fonksiyonların oluşturulması gerekir. Fonksiyonlar seçilirken aşağıdaki özellikleri taşımaları gerekir.  $w(x - x_i) > 0$  olması durumunda destek bölgesinin iç kısmında çözüm yapıldığını  $w(x - x_i) < 0$  olması durumunda destek bölgesinin dış kısmında çözüm yapıldığını göstermektedir. Ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonlarının hassasiyetini önemli ölçüde etkilemektedir. Bu yüzden ağırlık fonksiyonları iyi bir şekilde seçilmesi gerekir (Liu ve Gu, 2005).

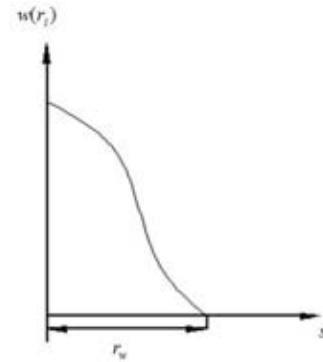
Şekil 2'de bir boyutlu uygulamalar için ağırlık fonksiyonu ve etkinlik yarıçapı verilmiştir. Bu

yarıçap değeri,

$$r_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w} \quad (42)$$

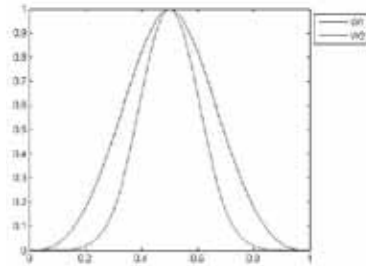
ile hesaplanır. Burada  $d_i = |x - x_i|$  ifadesi incelenen x noktası ile  $x_i$  düğüm noktası arasındaki mesafedir.  $r_w$  parametresi ise ağırlık fonksiyonu için destek bölgesinin boyutunu (etkinlik yarıçapını) temsil etmektedir.

Şekil 2'de gösterildiği gibi ağırlık fonksiyonu  $r_w$  parametresine bağlı olarak ifade edilmektedir. Denklem 42 bağıntısında x, çözüm bölgesi bağımsız değişkeni  $x_i$  ifadesi ise seçilmiş olan düğüm noktalarının çözüm bölgesindeki koordinatlarını belirtmektedir.

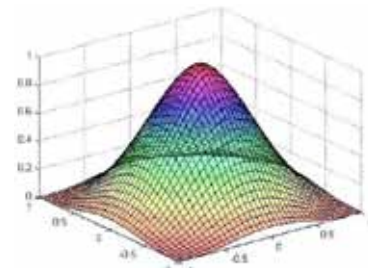


Şekil 2. Bir boyutlu problemler için ağırlık fonksiyonları ve etkinlik yarıçapları.

Genellikle kübik spline ve kuartik spline hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonlarının türetilmesinde kullanılmaktadır. Bu fonksiyonlar (43) ve (44) denklemlerinde verilir ve grafikleri Şekil 3'te gösterilmiştir. Şekil 4'de ise iki boyutlu bir ağırlık fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Şekil 3. Ağırlık fonksiyonları. W1:Kuartik spline, W2:Gauss.



Şekil 4.  $x=[-1,1]$ ,  $y=[-1,1]$  noktaları arasındaki ağırlık fonksiyonu.

- Kübik spline fonksiyonu

$$W_i(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 6r_i^2 + 4r_i^3 & r_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4r_i + 4r_i^2 - \frac{4}{3}r_i^3 & 0.5 \leq r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (43)$$

- Kuartik spline (W1) fonksiyonu

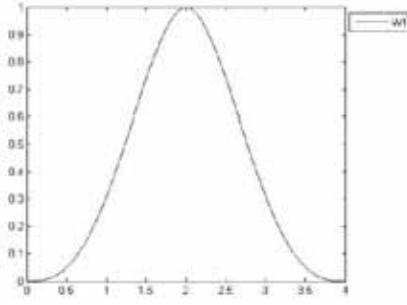
$$W_i(x) = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (44)$$

- Gauss (W2) fonksiyonu

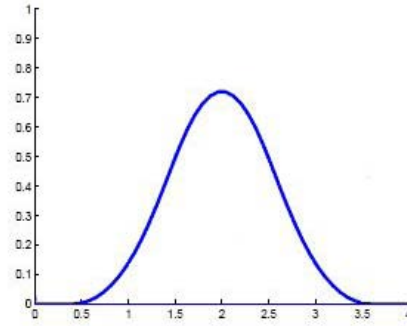
$$W_i(x) = \begin{cases} e^{-(r_i/\alpha)^2} & r_i \leq 1 \\ 0 & r_i > 1 \end{cases} \quad (45)$$

HEK fonksiyonlarının grafiksel olarak incelendiğinde hem ağırlık fonksiyonlarının, hem de şekil fonksiyonlarının en iyi şekilde anlaşılmasını sağlar. Bu amaçla 5 eşit düğüm noktasına bölünmüş  $0 \leq x \leq 4$  noktaları arasında ağırlık ve şekil fonksiyonları Şekil 5 ve 6'da gösterilmiştir. Ağırlık fonksiyonu olarak kuartik spline fonksiyonu kullanılmıştır. Etkinlik yarıçapı 2 olarak seçilmiştir. Ayrıca HEK yöntemi fonksiyonlarının Kronecker delta özelliği taşımadığı da unutulmamalıdır.

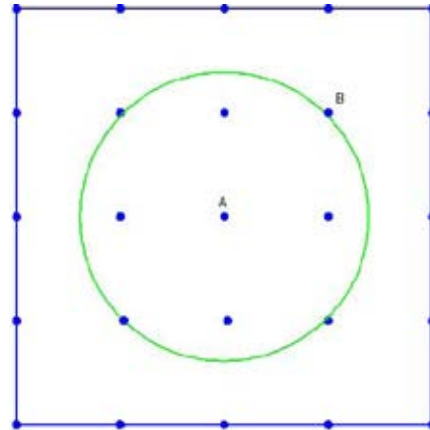
HEK yöntemi şekil fonksiyonları analiz edilmesi sırasında düğüm noktaları olarak  $5 \times 5$  üniform olarak dağılmış düğümler Şekil 7'de verilmiştir. Yerel destek bölgesi olarak dairesel bölge seçilmiştir. Şekil 7'deki çember, merkezdeki düğümün destek bölgesini göstermektedir. A ile B noktası arasındaki mesafe  $2\frac{1}{2}$  olup bu değer yaklaşık olarak 1.414'e denk gelmektedir. Destek bölgesi iç bölgede dikey ve yatay düğümlerini kapsayacak, diğer 4 düğüm noktasını dışarıda bırakacak şekilde bölgenin yarıçapı 1.4 olarak kabul edilmiştir. Bölge yarıçapı küçük olduğu durumlarda, alan fonksiyonları için yaklaşım fonksiyonun türetilmesinde yeterli düğüm noktası kapsamadığından şekil fonksiyonlarının uyumu azalır. Bölge yarıçapının  $r_w > 3$ 'ten büyük olduğu durumlarda ise hareketli en küçük kareler yönteminin şekil fonksiyonları düzleşir ve hesaplama zamanı oldukça artar. Yapılan çalışmalarda, destek bölge yarıçapının genellikle 1 ile 3 arasında olduğu durumlarda verimli sonuçlar türetildiği görülmüştür (Liu, 2003).



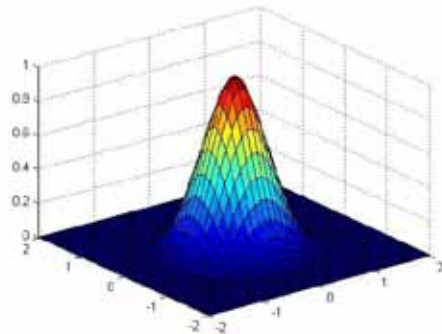
Şekil 5. Merkez noktasındaki ağırlık fonksiyonu.



Şekil 6. Merkez noktasındaki şekil fonksiyonu.

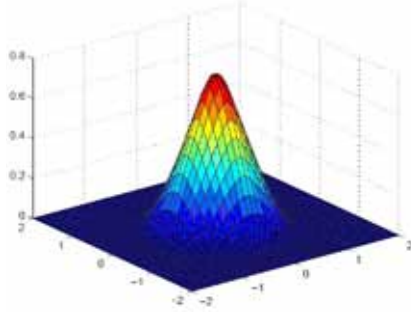


Şekil 7. (5x5) boyutunda üniform olarak dağılmış düğümler kullanılarak oluşturulmuş bölge.



Şekil 8.  $x = [-2 \ 2]$  ve  $y = [-2 \ 2]$  koordinatları arasında merkez düğümündeki ağırlık fonksiyonu.

Bu çalışmada temel fonksiyonlar lineer olarak seçilmiş, ağırlık fonksiyonları olarak ise kuartik spline fonksiyonları seçilmiştir. İki boyutlu ağırlık ve şekil fonksiyonları Şekil 8 ve 9'da gösterilmiştir.



Şekil 9.  $x=[-2\ 2]$  ve  $y=[-2\ 2]$  koordinatları arasında merkez düğümündeki şekil fonksiyonu.

### 2. 1. 2. Esas Sınır Koşulları

Hareketli en küçük kare yöntemlerinin şekil fonksiyonları Kronecker delta özelliği taşımadığından dolayı esas sınır koşulları sonlu elemanlar yönteminde kullanıldığı gibi kolay uygulanamamaktadır. Bunun için bazı teknikler geliştirilmiştir. Bunlardan biri zayıf formların modifikasyonu temelli, diğeri de şekil fonksiyonların modifiye edilmesiyle geliştirilen yöntemlerdir.

Zayıf formların modifikasyonu temelli yöntemler, Lagrange çarpanı metodu, penaltı metodu ve Nietche metodu olarak üçe ayrılır.

Fonksiyonel terim olan  $\Pi$  aşağıdaki integral formatında tanımlanır.

$$\Pi = \int_{\Omega} F(u, u_{,x}, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} E(u, u_{,x}, \dots) d\Gamma \quad (46)$$

Burada,  $u$ , bilinmeyen fonksiyon,  $F$  ve  $E$ , diferansiyel operatörlerdir.

### 2. 1. 3. İntegral

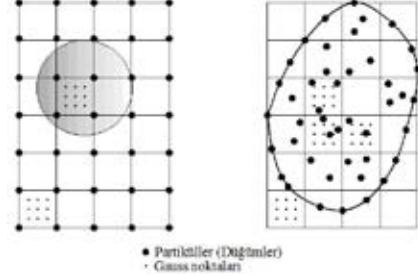
Hareketli en küçük kareler yönteminde şekil fonksiyonlarının, eleman bağımsız Galerkin yönteminde oluşturduğu en büyük dezavantaj zayıf formların nümerik olarak integral çözümü zorluluğudur. Bunun için çeşitli çözüm yolları geliştirilmiştir.

### 2. 1. 4. Direk Nodal İntegrali

İntegral, integral noktaları yerine düğümlerde hesaplanır. Sıralama metodundaki problemler için de uygulanabilir.

### 2. 1. 5. Arka Plan Ağı veya Hücre Yapısı

Gauss kuadratik noktaları üzerindeki geometri, integral hücrelerine bölünür. Genellikle düzgün hücre yapıları kullanılır. Şekil 10 iki boyutlu durumlarda arka plan hücreleri ve Gauss noktalarını göstermektedir.



Şekil 10. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde integral arka plan ağı ve arka plan hücreleri.



Şekil 11. EBG için program akış şeması.

Eleman bağımsız Galerkin metodu için problem çözüm akış şeması Şekil 11'de verilmiştir.

## 3. BİR BOYUTLU ÇUBUĞUN AĞSIZ ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜLMESİ

Eleman bağımsız Galerkin yöntemi iki örnek problemin çözümünde kullanılmıştır. Bu örneklerin ilkinde de boyu 1 m olan çubuk eksenel yönünde  $f(x)=x$  büyüklüğünde yayılı kuvvete maruz bırakılmıştır. Çubuk  $x=0$  noktasında ankastr olarak sabitlenmiştir. Sağ tarafı ise serbesttir. Çubuk kesiti birim alan ( $A= 1\text{ mm}^2$ ) olarak kabul edilmiş, malzeme elastisite modülü ise 300 GPa olarak seçilmiştir. Temel olarak  $x$  yönündeki yer değiştirmeler incelenmiştir. Prob-

lem için denge denklemleri ve sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$EAu_{,xx} + x = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (47)$$

$$u(0) = 0 \quad (48)$$

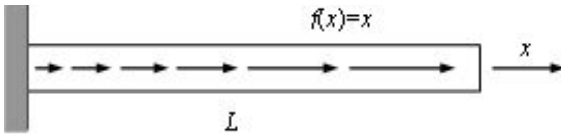
$$u_{,x}(1) = 0 \quad (49)$$

Yukarıdaki ifadenin analitik çözümü

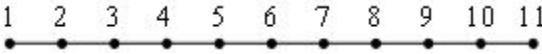
$$u(x) = \frac{1}{AE} \left[ \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{6} \right] \quad (50)$$

olur.

Şekil 12,  $x=0$  noktasında ankastre,  $f(x)=x$  yüküne maruz bırakılan bir boyutlu çubuk verilmiştir. Denklem (50)'de bu çubuğa ait  $x$  yönündeki yer değiştirmeler için analitik çözüm verilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yönteminde destek yarıçapı 0.2 olarak seçilip ve Şekil 13'de gösterildiği gibi 11 adet düğüm noktası kullanılmıştır. Şekil fonksiyonları olarak hareketli en küçük kareler seçilmiştir.

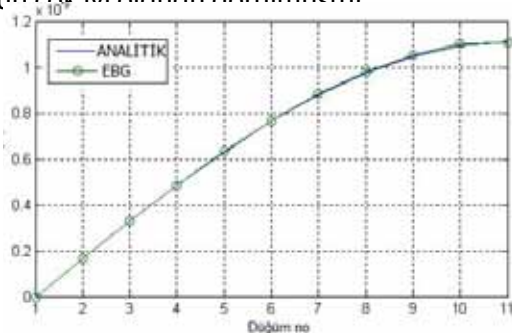


Şekil 12.  $f(x)=x$  kuvvetine maruz bırakılan ankastre çubuk.



Şekil 13. Çubuk düğüm noktaları.

Şekil 14 ve Tablo 1'de ağırsız metodun çubuğa uygulanmasıyla  $x$  yönü boyunca elde edilen aksenal yer değiştirme değerleri ( $u$ ) verilmiştir. Ayrıca analitik çözümden elde edilen yer değiştirme değerleri de aynı grafikte karşılaştırma amacıyla verilmiştir. Şekil 14 veya Tablo 1 incelendiğinde  $u$  değerleri açısından analitik ve ağırsız yöntem sonuçları arasında uyumun çok iyi olduğu görülmüştür.



Şekil 14. Çubuğa  $f(x)=x$  yükü uygulanmasıyla elde edilen  $x$  yönündeki yer değiştirme değerleri.

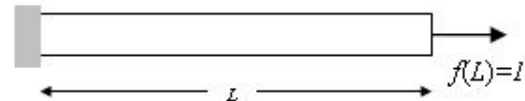
Tablo 1. EBG ve analitik çözüm sonucu elde edilen  $u$  değerleri.

Düğüm	Koordinat	Analitik [mm]	EBG [mm]
1	0.0	0.00000000	0.00000000
2	0.1	0.00016611	0.00016700
3	0.2	0.00032889	0.00032900
4	0.3	0.00048500	0.00048600
5	0.4	0.00063111	0.00063300
6	0.5	0.00076389	0.00076600
7	0.6	0.00088000	0.00088200
8	0.7	0.00097611	0.00097900
9	0.8	0.00104890	0.00105200
10	0.9	0.00109500	0.00110100
11	1.0	0.00111110	0.00110800

İkinci örnekte Şekil 15'de gösterildiği gibi  $f(L)=1$  N yüküne maruz bırakılan ankastre çubuk incelenmiştir. Çubuğa ait  $x$  yönündeki yer değiştirmenin analitik denklemi aşağıdaki gibidir.

$$u(x) = \frac{Px}{AE} \quad (51)$$

Analizde 11 adet düğüm noktası kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil 16 ve Tablo 2'de verilmiştir. Bu örnekte çubuk lineer tekil yüke maruz bırakılıp eleman bağımsız Galerkin yönteminden elde edilen sonuçların analitik çözümlerle sonuçlarından elde edilen değerlerle karşılaştırıldığında çok iyi bir biçimde uyum gösterdiği görülmüştür.

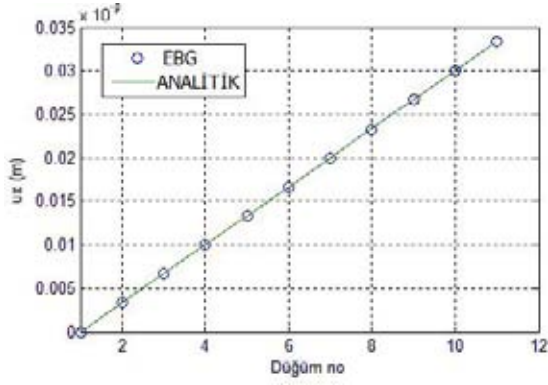


Şekil 15.  $f(L)=1$  N kuvvetine maruz bırakılan ankastre çubuk.

Tablo 2. EBG ve analitik çözüm sonucu elde edilen  $u$  değerleri.

Düğüm	Koordinat	Analitik [mm]	EBG [mm]
1	0.0	0.00000000	0.00000000
2	0.1	0.00333330	0.00333330
3	0.2	0.00666670	0.00666670
4	0.3	0.01000000	0.01000000
5	0.4	0.01333333	0.01333300
6	0.5	0.01666667	0.01666700
7	0.6	0.02000000	0.02000000
8	0.7	0.02333333	0.02333300
9	0.8	0.02666667	0.02666700
10	0.9	0.03000000	0.03000000
11	1.0	0.03333333	0.03333300





Şekil 16. Çubuğa  $f(L)=1$  N yükü uygulanmasıyla elde edilen x yönündeki yer değiştirme değerleri.

#### 4. YORUMLAR

Bu çalışmada eleman bağımsız Galerkin yöntemi incelenip, değişik eksenel yüklere maruz ankastre çubuğa uygulanmıştır. Yöntemin uygulanmasının oldukça kolay olduğu ve bu

yöntem ile elde edilen sonuçların, incelenen problem tipleri için analitik sonuçlarıyla örtüştüğü gözlenmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, ilk örnek problemde, analitik çözüm ile EBG sonuçlarının deformasyon değerleri  $u(x)$  arasında, maksimum % 0.5'lik bir fark olduğu gözlenmiştir. Ortalama farkın ise % 0.25 olduğu bu analizde EBG yöntemi ile elde edilen sonuçların, analitik çözümlerle uyduğu görülmektedir. İkinci örnek problem olan serbest ucundan yüklenen ankastre çubuğun sonuçları incelendiğinde, eksenel yer değiştirme değerlerinin her iki yöntemde de (analitik, EBG) aynı çıktığı tespit edilmiştir.

Eleman bağımsız yönteminin bu çalışmada verilen problemlerin çözülmesinin yanında, özellikle diğer sayısal yöntemlerin uygulanması aşamasında karşılaştıkları sorunların azaltılmasında alternatif çözüm yöntemi olabileceği gözlenmiştir.

#### KAYNAKLAR

- Atluri, S.N., Zhu, T. 1998. A new meshless local Petrov Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. (22), 117-127.
- Babuska, I., Melenk, J.M., 1995. The partition of unity finite element method, Techniqu report BM-1185, Institute for Physics Science and Technology, University of Maryland, Marland.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. 1994. Elements-free Galerkin methods. Int. J. Numerical methods Engrg. (37), 229-256.
- Bonet, J., Lok, T., 1999. Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 180 (1-2), 97-115.
- Chen, Y., Lee, J., Eskandarian, A. 2006. Meshless Methods in Solid Mechanics, Springer Science Business Media, Inc., New York.
- Dolbow, J., Belytschko, T. 1999. Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods. Computational Mechanics. (23), 219-230.
- Dolbow, J., Belytschko, T. 1998. An Introduction to Programming the Meshless Element free Galerkin Method, Archives of Computational Methods in Eng. 5 (3), 207-241.
- Duarte, C.A.M., Oden, J.T. 1995. Hp clouds-A meshless method to solve boundary values problems.
- Gingold R.A., Monaghan, J.J. 1977. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Monthly Notices R. Astron. Soc. (181), 375-389.
- Libersky, L.D., Petscheck, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R., Allahdadi, F.A. 1993. High strain Lagrangian hydrodynamics, J. Comput. Phys. (109), 67-75.
- Liu, G. R. 2003. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, CRC Press, Florida.
- Liu, G.R., Gu, Y.T. 2005. An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, Springer, The Netherlands.
- Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F. 1995. "Reproducing kernel particle methods" Int. J. Numer. Methods Eng. (20), 1081-1106.
- Lucy. L.B. 1977. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, Astron. J. (82), 1013-1024.
- Monaghan, J.J. 1982. Why particle methods work, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 3 (3), 422-433.
- Monaghan, J.J., 1988. An introduction to SPH, Comput. Phys. Commun. 48 (1), 89-96.
- Mukherjee, Y.X., Mukherjee, J. 1997. Boundary node method for potential problems. Int. J. Num. Methods in Engrg. (40), 797-815.