

SU İÇERİSİNDE AĞIRLIĞI DİKKATE ALINAN BİR KOLONUN BURKULMA ANALİZİ

Yeliz PEKBEY

Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 35100, Bornova, İzmir

Geliş Tarihi : 27.11.2007

Kabul Tarihi : 17.04.2008

ÖZET

EULER, 1744 yılında sabit enine kesitli çubukların kritik burkulma kuvvetlerini, çubuk ağırlığını ihmal ederek hesaplamıştır. Daha ekonomik çubuklar için, çubuk ağırlığının da dikkate alınması ve çözüm yapılması gerekir. Literatürde, 10 değişik mesnetleme durumu için çubuk ağırlığı da dikkate alınarak hava ortamında kritik burkulma kuvvetleri ve asimptotik burkulma kuvvetleri hesaplanmış ve bu kuvvetlerden hareketle 4 mesnetleme durumu için sudaki kritik kuvvetlerin bulunabileceği, diğer 6 mesnetleme durumuna ait sudaki kritik burkulma kuvvetlerinin ise hava ortamındakinden hesaplanamayacağı belirtilmiştir. Bu çalışmada, bugüne kadar kritik burkulma kuvvetleri hesaplanmamış, su içerisinde, üst ucu ankastre mesnetli alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli çubuk için çözüm verilmiştir.

Anahtar Sözcükler : *Suda burkulma, Bessel-Hankel fonksiyonları, Boyutsuz kritik burkulma kuvveti, Boyutsuz çubuk uzunluğu.*

BUCKLING ANALYSES OF A HEAVY COLUMN CONSIDERATED IN WATER

ABSTRACT

In 1744, the critical buckling load with the assumption of uniform cross-section without weight of column were computed by Euler. Whenever an economical solution is required, the weight of column must be considered for solution of buckling analyses. In literature, the critical buckling load and asymptotic behaviour of heavy column in condition of atmosphere have investigated for ten different support types. When this literature is examined, it is stated that the differential equations of for four different support types in condition of water is similar to condition of atmosphere. However, the differential equations of other four different support types in condition of water is different from to condition of atmosphere. And it is stated that the critical buckling load these different support types in condition of water is not calculated from condition of atmosphere. The goals of this paper are to develop self weight buckling of column at its top fixed and lower end fixed-roller supported in condition of water. This paper, presents a analytical method for calculating the critical buckling load of the heavy column.

Key Words : *Buckling in water, Bessel-Hankel functions, Dimensionless critical buckling load, Dimensionless, Critical length.*

1. GİRİŞ

Ağırlığı dikkate alınan uzun çubuklardaki burkulma problemi, yapısal mekanikte en temel problemlerden biridir. Kendi ağırlık kuvveti etkisi altında bir çubuğun burkulması, üniform yayılı, eksenel kuvvete maruz bir çubuğun stabilite problemi olarak ifade edilmektedir (Sugiyama v.d., 1978).

Euler (1744) sabit enine kesitli çubukların kritik burkulma kuvvetlerini, çubuk ağırlığını ihmal ederek, her iki ucundan mafsallı çubuk, bir ucundan ankastre diğer ucundan serbest çubuk, bir ucu ankastre ve diğer ucu mafsallı çubuk ve her iki ucu ankastre olan çubuklar için hesaplamıştır. Daha ekonomik çubuklar için, çubuk ağırlığının da dikkate alınması ve çözüm yapılması gerekir. İlk olarak

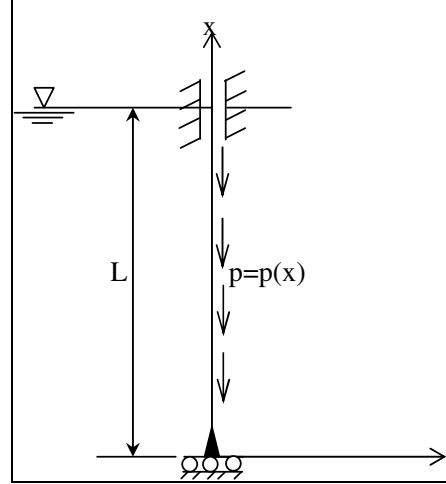
Willers (1941), ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun stabilitesini incelemiştir.

Ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun kritik burkulma kuvveti, çubuğun hava veya su ortamında bulunmasına göre farklılık gösterecektir. Bu fark, su ortamında, hava ortamına göre ek olarak akışkan kaynaklı hidrostatik basınç kuvvetinin etkimesinden kaynaklanmakta olup, kendisini, problemin diferansiyel denkleminde göstermektedir. Plunkett (1967); Sugiyama v.d., (1978) ise, denizcilikte sondajlamada kullanılan, ağırlığı dikkate alınan çubukların, kritik burkulma kuvvetini, sırasıyla asimptotik ve seri çözümü ile bulmuşlardır. Ayrıca, Bernitsas ve Kokkinis (1984) de asimptotik çözümü, Airy fonksiyonunu kullanarak yapmışlardır. Özdamar (1996), değişik 10 mesnetleme durumu için çubuk ağırlığını da dikkate alarak hava ortamında kritik burkulma kuvvetlerini ve asimptotik burkulma kuvvetlerini hesaplamış ve bu kuvvetlerden hareketle 4 mesnetleme durumu için sudaki kritik kuvvetlerin bulunabileceğini, diğer 6 mesnetleme (üst ucu ankastre ve alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli çubuk, üst ucu ankastre ve alt ucu mafsallı, kayıcı mesnetli olan çubuk, üst ucu mafsallı alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli çubuk, üst ucu ankastreli kayıcı mesnetli alt ucu ankastre, üst ucu ankastreli kayıcı mesnetli alt ucu mafsallı ve üst ucu mafsallı, kayıcı mesnetli alt ucu ankastre çubuk) durumuna ait sudaki kritik burkulma kuvvetlerinin ise havadakinden hareketle hesaplanamayacağını belirtmiştir. Üst ucu ankastre mesnetli alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli çubuk, hesaplanamayacağı iddia edilen mesnetleme durumlarından biridir.

Bu çalışmada amaç, literatürde bugüne kadar çözümü yapılmamış olan su ortamındaki üst ucu ankastre ve alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli çubuğa ait kritik burkulma kuvvetlerinin hesaplanmasıdır. Bu amaç için, öncelikle, problemin diferansiyel denklemi su ortamı için çıkarılacaktır. Daha sonra, problem Bessel ve Hankel Fonksiyonları kullanılarak analitik olarak çözülecektir. Bu çözüm, asimptotik çözüm olarak adlandırılan çok uzun kirislerdeki burkulma değerini de vermektedir.

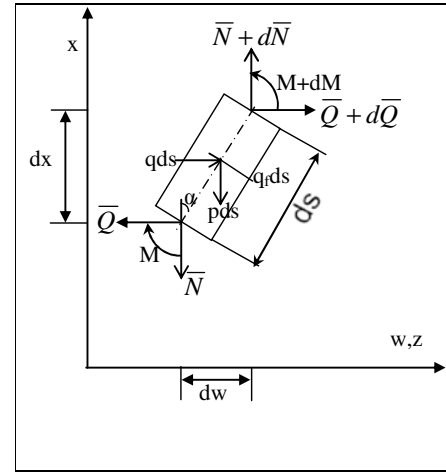
2. PROBLEMİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Bu çalışmada, ağırlığı dikkate alınan, su içinde basınca zorlanan bir çubuğun hareketinin, diferansiyel denklemi çıkartılacaktır. Şekil 1'de, ağırlığı dikkate alınan, su içerisinde, statik denge durumundaki bir çubuk görülmektedir.



Şekil 1. Su içerisinde statik denge durumundaki çubuk.

Şekil 2'de ise, ağırlığı dikkate alınan ve çok küçük bir ds uzunluğunda bir eleman görülmektedir.



Şekil 2. Kesit büyüklükleri.

Bu elemanda denge denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{N}(x)}{ds} = p(x) - q_f(x) \sin \alpha \quad (1)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{Q}(x)}{ds} = -q(x) - q_f(x) \cos \alpha \quad (2)$$

$$\sum M = \bar{N}(x)dw(x) - \bar{Q}(x)dx + d\bar{M}(x) = 0 \quad (3)$$

Burada, $\bar{M}(x)$, eğilme momenti kesit zoru, $\bar{N}(x)$, aksel veya normal kuvvetin x bileşeni, $\bar{Q}(x)$, kesme kuvveti kesit zoru x bileşeni, $q_f(x)$,

hidrostatik basınçtan doğan yayılı yükü, $q(x)$ su içerisinde çubuğa etkileyen yayılı yükü, $p(x)$ ile çubukta birim uzunluk başına gelen ağırlık kuvveti simgelenmiştir.

Çubuğun içi boş ise veya içinde sıvı varsa, γ_s , sıvının özgül ağırlığı ifade etmek üzere, çubuğun birim uzunluk başına gelen kuvvet, $p(x) = p_0 = \gamma_s A = \text{sabit}$ ile yazılabilir. Ayrıca, çubuk, γ_f özgül ağırlığına sahip sıvının içinde olmasından dolayı, çubuğa, hidrostatik basınçtan doğan bir yayılı yük ($q_f(x)$) etkileyecektir, ki bu değer,

$$q_f(x) = \gamma_f A [w'(x) - (L-x)w''(x)] \quad (4)$$

olarak da ifade edilmektedir (Özdamar, 1996). Ayrıca denklemlerde, $w(x), w'(x), w''(x)$ ifadeleri, sırasıyla, çökme fonksiyonunu ve çökme fonksiyonunun x ' e göre birinci ve ikinci türevlerini göstermektedir.

(3)'nolu denklem ds 'e bölünürse,

$$\bar{N}(x) \frac{dw(x)}{ds} - \bar{Q}(x) \frac{dx}{ds} + \frac{dM(x)}{ds} = 0 \quad (5)$$

elde edilir. (1), (2) ve (5)'nolu denklemler $\frac{ds}{dx}$ ile çarpılır ve meydana gelen küçük çökmeler nedeniyle $\sin \alpha \approx 0, \cos \alpha \approx 1$ alınırsa,

$$\frac{d\bar{N}(x)}{dx} \equiv \bar{N}'(x) = p(x) \frac{ds}{dx} \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{Q}(x)}{dx} \equiv \bar{Q}'(x) = -q(x) \frac{ds}{dx} + q_f(x) \frac{ds}{dx} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}'(x) \frac{dw(x)}{dx} - \bar{Q}'(x) + \frac{dM(x)}{dx} \\ \equiv \bar{N}'(x)w'(x) - \bar{Q}'(x) + M'(x) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

denklemleri elde edilecektir. $ds \approx dx$ olarak yazılabileceğinden, bu denklem sistemi aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\bar{N}'(x) = p(x) \quad (9)$$

$$\bar{Q}'(x) = -q(x) + q_f(x) \quad (10)$$

$$M'(x) = \bar{Q}(x) - \bar{N}(x)w'(x) \quad (11)$$

(11)'nolu denklemin x 'e göre türevi alınır ve (10) nolu denklemde $\bar{Q}'(x)$ yerine yazılırsa, (13)'nolu denklem elde edilmiş olur. (13)'nolu denklemin elde edilmesinde, (12)'nolu denklem ile gösterilen elastik eğri denkleminde de yararlanılmıştır.

$$M(x) = -EIw''(x) \quad (12)$$

$$EI w'''(x) = -\bar{Q}'(x) + (\bar{N}(x)w'(x))' \quad \text{veya}$$

$$= q(x) - q_f(x) + (\bar{N}(x)w'(x))'$$

$$EIw'''(x) - (\bar{N}(x)w'(x))' = q(x) - q_f(x) \quad (13)$$

Bu denklemde verilen, $\bar{N}(x)$ eksenel veya normal kuvvet ifadesini açık bir şekilde yazmaya çalışalım. (9)'nolu denklem, $p(x) = p_0 = \gamma_s A = \text{sabit}$ olmak üzere, x üzerinden entegrasyon işlemi gerçekleştirilirse,

$$\bar{N}(x) = p_0(x) + c_1 = \gamma_s Ax + c_1 \quad (14)$$

olur. Bu denklemde yer alan c_1 sabittir ve incelenen duruma göre sınır şartlarından belirlenir. Buna göre, bu çalışmada incelenen mesnetleme durumuna göre, ($x=0$ 'da, $N=0$)

$$\bar{N}(0) = c_1 = -P - \gamma_f AL \quad (15)$$

yazılabilir. Böylece (14) nolu denklem, c_1 sabitinin yerine konmasıyla,

$$\bar{N}(x) = \gamma_s Ax - \gamma_f AL - P \quad (16)$$

şekline dönüşür. Buna göre, (13) nolu denklemde, (16) nolu denklemin kullanılmasıyla,

$$EIw'''(x) - [A(\gamma_s x - \gamma_f L)w'(x) - Pw'(x)] = q(x) - q_f(x) \quad (17)$$

elde edilmiş olur. Ayrıca bu denklem,

$$EIw''(x) - [A\gamma_s w'(x) + A(\gamma_s x - \gamma_f L)w''(x) - Pw''(x)] = q(x) - q_f(x)$$

veya

$$EIw''(x) - [A\gamma_s w'(x) + w''(x)(A(\gamma_s x - \gamma_f L) - P)] = q(x) - q_f(x) \quad (18)$$

şeklinde de yazılabilir. Suyun hareketsiz ve akıntının olmaması, $q(x) = 0$ şartını getirir. Dolayısıyla, (18) nolu denklemde $q(x) = 0$ ve (4)'nolu denklemde verilmiş olan, $q_f(x)$, yerine yazılırsa,

$$EIw^{IV}(x) - [A\gamma_s w'(x) + w''(x)(A(\gamma_s x - \gamma_f L) - P)] = -\gamma_f A[w'(x) - (L - x)w''(x)]$$

(19)'nolu denklem elde edilmiş olur:

$$EIw^{IV}(x) + [P - (\gamma_s - \gamma_f)Ax]w''(x) - (\gamma_s - \gamma_f)Aw'(x) = 0$$

veya

$$EIw^{IV}(x) + [[P - (\gamma_s - \gamma_f)Ax]w'(x)]' = 0 \quad (19)$$

İncelenen mesnetleme durumunun, $x=0$ 'daki sınır şartlarını elde etmek için, (19)'nolu denklemin entegrasyon ile

$$w'''(x) + \left[\frac{P}{EI} - \frac{(\gamma_s - \gamma_f)A}{EI} x \right] w'(x) = k \quad (20)$$

bulunur. Burada, k entegrasyon sabitini gösterir. (20) nolu diferansiyel denklem,

$$a = \frac{\gamma_s A}{EI}, b = \frac{P}{\gamma_s A}, \theta = \frac{\gamma_f}{\gamma_s} \quad (21)$$

kısaltmalarıyla yerine yazıldığında,

$$w'''(x) + a[b - (1 - \theta)x]w'(x) = k \quad (22)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü için,

$$\zeta(x) = \frac{2}{3} \sqrt{a} \sqrt{(b + \theta x - x)^3} \quad (23)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \zeta^{1/3} \phi(\zeta(x)) \quad (24)$$

denklemleri ile verilen yeni değişken ($\zeta(x)$) ve yeni fonksiyon ($\phi(\zeta(x))$) tanımlansın. (24)'nolu denklemin türevi alınacak olursa,

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{3} \zeta^{-2/3} \frac{d\zeta}{dx} \phi(\zeta(x)) + \zeta^{1/3} \frac{d\phi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dx} \quad (25)$$

bulunur. Bu denklemde yer alan, $\frac{d\zeta}{dx}$ ifadesi, (23) nolu denklemden hareketle,

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{2}{3} \sqrt{a} \frac{3}{2} (b + \theta x - x)^{1/2} (\theta - 1) = \sqrt{a} (b + \theta x - x)^{1/2} (\theta - 1) \quad (26)$$

elde edilir. Ayrıca, yine bu denklemden hareketle,

$$b + \theta x - x = \left[\frac{3}{2} a^{-1/2} \zeta(x) \right]^{2/3} = \left[\frac{3\zeta}{2\sqrt{a}} \right]^{2/3} \quad (27)$$

bulunur. Buna göre, (26) ve (27)'nolu denklemlerin, (24) nolu denklemde yerine yazılmasıyla,

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \left(\frac{3a}{2} \right)^{1/3} (\theta - 1) \left[\frac{1}{3} \zeta^{-1/3} \phi(\zeta) + \zeta^{2/3} \phi'(\zeta) \right] \quad (28)$$

bulunur. Buna göre, $\frac{d^3 w(x)}{dx^3}$, ifadesi (28)'nolu denklem yardımıyla,

$$\frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \left(\frac{3a}{2} \right)^{2/3} (\theta - 1)^2 \left[-\frac{\phi(\zeta)}{9\zeta} + \phi'(\zeta) + \zeta \phi''(\zeta) \right] \quad (29)$$

elde edilir. Böylece, $x=0$ 'da (22) nolu denklem ile verilen sınır şartı,

$$\left(\frac{3a}{2} \right)^{2/3} (\theta - 1)^2 \left[-\frac{\phi(\zeta)}{9\zeta} + \phi'(\zeta) + \zeta \phi''(\zeta) \right] + \quad (30)$$

$$a[b + \theta x - x] \zeta^{1/3} \phi(\zeta) = k$$

veya

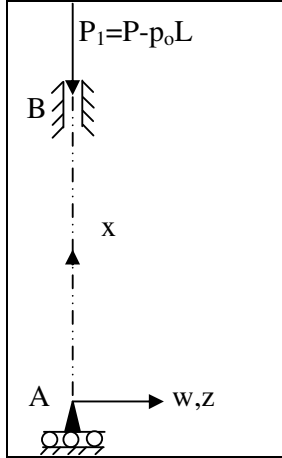
$$\phi''(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \phi'(\zeta) + \left[\frac{1}{(\theta - 1)^2} - \frac{1}{9\zeta^2} \right] \phi(\zeta) = \frac{c_1}{\zeta}, \quad (31)$$

$$c_1 = \frac{k}{\left(\frac{3a}{2} \right)^{2/3} (\theta - 1)^2}$$

elde edilmiş olur.

3. PROBLEMİN BESSEL-HANKEL FONKSİYONLARI İLE HAVADA VE SUDAKİ ÇÖZÜMÜ

Bu çalışmada, bugüne kadar kritik burkulma kuvvetleri hesaplanmamış, üst ucu ankastre ve alt ucu ankastrelı, kayıcı mesnetli ağırlığı dikkate alınan sudaki çubuk için çözüm yapılacaktır. İncelenecek olan durum ve sınır şartları Şekil 3 ve Tablo 1'de görülmektedir. Yapılacak olan çözümde, problemin en genel şartlardaki diferansiyel denklemini çıkartılarak, çözüm, hem hava hem de su için yapılacaktır. Dolayısıyla Tablo 1'de sınır şartları hem hava hem de su için verilmiştir.



Şekil 3. İncelenen mesnetleme durumu.

Tablo 1. İncelenen mesnetleme durumuna ilişkin sınır şartları.

Sınır Şartları	A noktası (x=0)	B noktası (x=L)
Havada	$w'_A = 0$ $w'''_A + abw'_A = 0$	$w_B = 0$ $w'_B = 0$
Suda	$w'_A = 0$ $w''_A + \left[ab + \frac{\gamma_f AL}{EI} \right] w'_A = 0$	$w_B = 0$ $w'_B = 0$

(31) nolu denklem ile verilen diferansiyel denklem,

$$\beta^2 = \frac{1}{(\theta - 1)^2} \quad (32)$$

kabulü ile,

$$\zeta^2 \phi''(\zeta) + \zeta \phi'(\zeta) + [\beta^2 \zeta^2 - (\frac{1}{3})^2] \phi(\zeta) = c_1 \zeta \quad (33)$$

haline dönüşmüş olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise, c_2 ve c_3 entegrasyon sabitleri olmak üzere,

$$\phi(\zeta) = c_2 J_{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + c_1}}(\beta \zeta) + c_3 Y_{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + c_1}}(\beta \zeta) \quad (34)$$

şekline dönüşür. İncelenen mesnetleme durumu için, alt uçta $Q(x) = 0$ sınır şartından, k dolayısıyla,

$$c_1 = \frac{k}{(\frac{3a}{2})^{2/3} (\theta - 1)} = 0 \text{ olmaktadır. Buna göre,}$$

(33)'nolu denklem,

$$\phi(\zeta) = c_2 J_{1/3}(\beta \zeta) + c_3 Y_{1/3}(\beta \zeta) \quad (35)$$

olur. Bu denklemlerde yer alan, $J_{1/3}$ ve $Y_{1/3}$ ifadeleri ise, sırasıyla BESSEL ve HANKEL fonksiyonlarını göstermektedir ve aşağıdaki şekilde yazılmaktadır (Watson, 1966):

$$J_{1/3}(\beta \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta \zeta)^{2n+1/3}}{2^{2n+1/3} n! \Gamma(\frac{1}{3} + n + 1)}, J_{-1/3}(\beta \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta \zeta)^{2n-1/3}}{2^{2n-1/3} n! \Gamma(-\frac{1}{3} + n + 1)} \quad (36)$$

$$Y_{1/3} = \frac{\cos \frac{\pi}{3} J_{1/3}(\beta \zeta) - J_{-1/3}(\beta \zeta)}{\sin \frac{\pi}{3}} \quad (37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} J_{1/3}(\beta \zeta) - \frac{2}{\sqrt{3}} J_{-1/3}(\beta \zeta)$$

Buna göre, (37)'nolu denklemde yer alan Bessel fonksiyonları;

$$J_{1/3}(\beta \zeta) = \frac{(\beta \zeta)^{1/3}}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3} + 1)} - \frac{(\beta \zeta)^{1/3+2}}{2^{1/3+2} \Gamma(\frac{1}{3} + 2)1!} + \frac{(\beta \zeta)^{1/3+4}}{2^{1/3+4} \Gamma(\frac{1}{3} + 3)2!} - \dots \quad (38)$$

$$J_{-1/3}(\beta \zeta) = \frac{(\beta \zeta)^{-1/3}}{2^{1/3} \Gamma(-\frac{1}{3} + 1)} - \frac{(\beta \zeta)^{-1/3+2}}{2^{1/3+2} \Gamma(-\frac{1}{3} + 2)1!} + \frac{(\beta \zeta)^{-1/3+4}}{2^{1/3+4} \Gamma(-\frac{1}{3} + 3)2!} - \dots \quad (39)$$

olarak da verilebilir. Bu denklemlerde yer alan Γ ifadesi ise Gamma fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir (Watson, 1966). (23)'nolu denklem,

$$\xi = \frac{x}{b} \quad (40)$$

yeni değişkeni ile,

$$\zeta = \frac{2}{3} \sqrt{a} \sqrt{(b + \theta b \xi - b \xi)^3} = \frac{2}{3} a^{1/2} b^{3/2} (1 + \theta \xi - \xi)^{3/2}$$

$$\eta_u = \frac{2}{3} a^{1/2} b^{3/2} \Rightarrow \zeta = \eta_u [1 + \xi(\theta - 1)]^{3/2} \quad (41)$$

dönüşmüş olur. ζ değişkeni ξ nin alacağı değerlere göre incelenmelidir:

a) $1 + \xi(\theta - 1) > 0 \Rightarrow \xi < \frac{-1}{\theta - 1} = \frac{1}{1 - \theta} \Rightarrow \xi$ pozitif ve reeldir.

b) $1 + \xi(\theta - 1) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{-1}{\theta - 1} \Rightarrow \zeta = 0$

c) $\zeta = \pm \eta_i$ kısaltmasıyla

$$1 + \xi(\theta - 1) < 0 \Rightarrow \xi < \frac{-1}{\theta - 1}$$

$$\Rightarrow \zeta = \eta_u [1 + \xi(\theta - 1)]^{3/2} = \eta_u (-1)^{3/2} [\xi(1 - \theta) - 1]^{3/2} \quad (42)$$

$$\zeta = \pm \eta_u [\xi(1 - \theta) - 1]^{3/2} i, \eta = \eta_u [\xi(1 - \theta) - 1]^{3/2}$$

Buna göre,

$$x = 0 \Rightarrow \xi = 0, \zeta = \eta_u$$

$$x = L \Rightarrow \xi = \pm \eta_u [\alpha(1 - \theta) - 1]^{3/2} i = \pm \eta_u i, \eta_o = \eta_u [\alpha(1 - \theta) - 1]^{3/2} \quad (43)$$

dir.

Ayrıca,

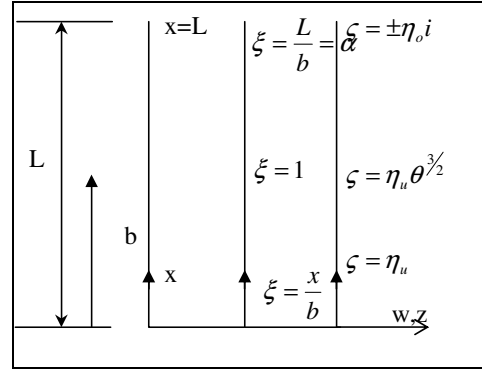
$$\xi = \frac{x}{b}, x = L \Rightarrow \xi = \frac{L}{b} = \alpha \quad (44)$$

olarak tanımlanmaktadır. Şekil 4’de değişik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiler görülmektedir.

Buna göre (24)’nolu denklem,

$$\frac{dw}{dx} = \zeta^{1/3} \phi(\zeta(x)) = \zeta^{1/3} [c_2 J_{1/3}(\beta \zeta) + c_3 Y_{1/3}(\beta \zeta)] \quad (45)$$

şeklinde yazılır.



Şekil 4. Değişik koordinat sistemleri arasındaki ilişkiler.

(45)’nolu denklem entegre edilirse, $x=L$ için geçerli olan sınır şartını bulmuş oluruz:

$$\frac{dw}{dx}(x=L) = [\alpha(1 - \theta) - 1]^{1/2} [c_2 F17(\alpha, \eta_u, \theta) + c_3 F18(\alpha, \eta_u, \theta)] = 0 \quad (46)$$

Bu denklemde yer alan $F17(\alpha, \eta_u, \theta)$ ve $F18(\alpha, \eta_u, \theta)$ ifadeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F17(\alpha, \eta_u, \theta) = \frac{-1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} [3\beta^{1/3} \eta_u^{2/3} [\alpha(1 - \theta) - 1] + \frac{3^2 \beta^{7/3} \eta_u^{8/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^4}{1! \cdot 2^4 \cdot 4!} + \frac{3^3 \beta^{13/3} \eta_u^{14/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^7}{2! \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 4!} + \frac{3^4 \beta^{19/3} \eta_u^{20/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^{10}}{3! \cdot 2^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4!} + \dots]$$

$$F18(\alpha, \eta_u, \theta) = (\frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{-1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}) [3\beta^{1/3} \eta_u^{2/3} [\alpha(1 - \theta) - 1] + \frac{3^2 \beta^{7/3} \eta_u^{8/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^4}{1! \cdot 2^4 \cdot 4!} + \frac{3^3 \beta^{13/3} \eta_u^{14/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^7}{2! \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 4!} + \frac{3^4 \beta^{19/3} \eta_u^{20/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^{10}}{3! \cdot 2^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4!} + \dots] - (\frac{2}{\sqrt{3}})(\frac{2^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})}) [\beta^{1/3} + \frac{3\beta^{1/3} \eta_u^{2/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^3}{1! \cdot 2^3 \cdot 2} + \frac{3^2 \beta^{1/3} \eta_u^{4/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^6}{2! \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{3^3 \beta^{1/3} \eta_u^{6/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^9}{3! \cdot 2^5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{3^4 \beta^{1/3} \eta_u^{8/3} [\alpha(1 - \theta) - 1]^{12}}{4! \cdot 2^8 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2} + \dots] \quad (48)$$

$x = L$ ’de, yani çubuğun üst ucu ankastre olmasından dolayı, bir diğer sınır şartı da, bu noktadaki çökme değerinin sıfır olmasıdır. Buna göre,

$$w(x=L) = \left(\frac{1}{\theta-1}\right)\left(\frac{2}{3a}\right)^{1/3} [c_2 F2(\alpha, \eta_U, \theta) + c_3 F3(\alpha, \eta_U, \theta) + c_4] = 0 \quad (49)$$

yazılabilir. Bu denklemde yer alan $F2(\alpha, \eta_U, \theta)$ ve $F3(\alpha, \eta_U, \theta)$ ifadeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F2(\alpha, \eta_U, \theta) = \frac{1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})} \left[\frac{3^2 \beta^{1/3} \eta_U^{4/3} [\alpha(1-\theta)-1]^2}{4} + \frac{3^3 \beta^{7/3} \eta_U^{10/3} [\alpha(1-\theta)-1]^5}{1! \cdot 2^2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 1} + \frac{3^4 \beta^{13/3} \eta_U^{16/3} [\alpha(1-\theta)-1]^8}{2! \cdot 2^4 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} + \dots \right] \quad (50)$$

$$F3(\alpha, \eta_U, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}\right) \left[\frac{3^2 \beta^{1/3} \eta_U^{4/3} [\alpha(1-\theta)-1]^2}{4} + \frac{3^3 \beta^{7/3} \eta_U^{10/3} [\alpha(1-\theta)-1]^5}{1! \cdot 2^2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 1} + \frac{3^4 \beta^{13/3} \eta_U^{16/3} [\alpha(1-\theta)-1]^8}{2! \cdot 2^4 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} + \dots \right] + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2^{2/3} \Gamma(\frac{2}{3})}\right) \left[\frac{3 \beta^{2/3} \eta_U^{5/3} [\alpha(1-\theta)-1]}{1} + \frac{3^2 \beta^{8/3} \eta_U^{11/3} [\alpha(1-\theta)-1]^4}{1! \cdot 2^2 \cdot 8} + \frac{3^4 \beta^{14/3} \eta_U^{17/3} [\alpha(1-\theta)-1]^7}{2! \cdot 2^4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 14} + \dots \right] \quad (51)$$

Çubuğun alt ucu yani $x=0$ için, (45) nolu denklem yardımıyla,

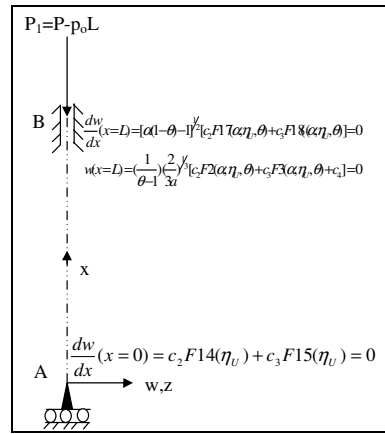
$$\frac{dw}{dx}(x=0) = c_2 F14(\eta_U) + c_3 F15(\eta_U) = 0 \quad (52)$$

yazılır. Bu denklemde yer alan $F14(\eta_U)$ ve $F15(\eta_U)$ ifadeleri de aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$F14(\eta_U) = \left(\frac{\beta^{1/3} \eta_U^{2/3}}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}\right) \left[3 - \frac{3^2 \beta^2 \eta_U^2}{1! \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 1} + \frac{3^3 \beta^4 \eta_U^4}{2! \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} - \frac{3^4 \beta^6 \eta_U^6}{3! \cdot 2^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} + \dots \right] \quad (53)$$

$$F15(\eta_U) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\beta^{1/3} \eta_U^{2/3}}{2^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3})}\right) \left[3 - \frac{3^2 \beta^2 \eta_U^2}{1! \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 1} + \frac{3^3 \beta^4 \eta_U^4}{2! \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} - \frac{3^4 \beta^6 \eta_U^6}{3! \cdot 2^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1} + \dots \right] - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2^{1/3} \beta^{-1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right) \left[1 - \frac{3 \beta^2 \eta_U^2}{1! \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{3^2 \beta^4 \eta_U^4}{2! \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{3^3 \beta^6 \eta_U^6}{3! \cdot 2^6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} + \dots \right] \quad (54)$$

dir.



Şekil 5. İncelenen mesnetleme durumuna ilişkin bulunan denklemler.

Buraya kadar, problemin en genel durumdaki diferansiyel denklemi çıkartılmış ve incelenen mesnetleme durumu için sınır şartları elde edilmiştir. Bundan sonra, ağırlığı dikkate alınan havadaki ve sudaki bir çubuğun burkulma davranışı incelenecektir. Şekil 5'de incelenen duruma ilişkin elde edilen denklemler görülmektedir.

Problemin, sıfırdan farklı bir çözümünün olabilmesi için, denklem takımının katsayılar determinantı sıfır olmalıdır:

$$\begin{vmatrix} F2(\alpha, \eta_U, \theta) & F3(\alpha, \eta_U, \theta) & 1 \\ F17(\alpha, \eta_U, \theta) & F18(\alpha, \eta_U, \theta) & 0 \\ F14(\eta_U) & F15(\eta_U) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (55)$$

Bu determinant açılırsa,

$$F17(\alpha, \eta_U, \theta) \cdot F15(\eta_U) - F18(\alpha, \eta_U, \theta) \cdot F14(\eta_U) = 0 \quad (56)$$

denklemleri elde edilmiş olur.

Ağırlığı dikkate alınan, üst ucu ankastre ve alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli sınır koşullarına sahip olan çubuğun hava ve su ortamları için, kritik burkulma kuvveti, (56)'nolu denklemin kökleri yardımıyla bulunacaktır. Bu denklemin çözümünde,

$$\theta = \frac{\gamma_F}{\gamma_S} = 0 \text{ olarak alınır} \text{ su ortamındaki}$$

$$\text{çubuğun, } \theta = \frac{\gamma_F}{\gamma_S} = \frac{10000}{78500} = 0,127; \beta = 1,146 \text{ olarak}$$

alınır da su içerisindeki çubuğun kritik burkulma kuvveti bulunmuş olur. Burada, elde edilen sonuçlar, boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile boyutsuz çubuk uzunluğu ile ifade edilecektir. Bunun için, (40)'nolu bağıntıdan, b ifadesi çekilirse,

$$\eta_u = \frac{2}{3} a^{1/2} b^{3/2} \Rightarrow b = \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} a^{-1/3} = \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \sqrt[3]{\frac{EI}{p_o}} \quad (57)$$

bulunur, bu ifade (44)'nolu bağıntı yardımıyla,

$$b = \frac{L}{\alpha} = \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \sqrt[3]{\frac{EI}{p_o}} \Rightarrow L^3 \sqrt[3]{\frac{p_o}{EI}} = \alpha \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \quad (58)$$

şeklinde ifade edilir. Bu bağıntıda yer alan,

$$\bar{L} = \alpha \left(\frac{3\eta_u}{2}\right)^{2/3} \quad (59)$$

ifadesi, boyutsuz kritik çubuk uzunluğu olarak isimlendirilir. Ayrıca,

$$P = p_o b \quad (60)$$

bağıntısı, (57)'nolu denklem yardımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$P = p_o \left(\frac{3}{2}\eta_u\right)^{2/3} \sqrt[3]{\frac{EI}{p_o}} = \left(\frac{3}{2}\eta_u\right)^{2/3} \sqrt[3]{EI(p_o)^2} \quad (61)$$

Bu bağıntıda,

$$\left(\frac{3}{2}\eta_u\right)^{2/3} = \bar{P} \quad (62)$$

ifadesi ise boyutsuz kritik burkulma kuvveti olarak isimlendirilir. Tablo 2'de, hava ortamında bulunan, ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun, sırasıyla (56) ve (62)'nolu denklemden elde edilen kökleri (η_U) ile boyutsuz kritik burkulma kuvveti (\bar{P}) görülmektedir. Ayrıca, sonuçlar, Özdamar'ın (1996) bulmuş olduğu değerler ile karşılaştırılmıştır. Her iki sonucunda birbirleri ile uyum içerisinde olduğu gözlemlenmiştir. Tablo 3 de ise, üst ucu ankastre ve alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli sınır koşullarına

sahip bir çubuğun, su ortamında olması durumunda elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.

Tablo 2. Ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun havada ortamındaki çözümü.

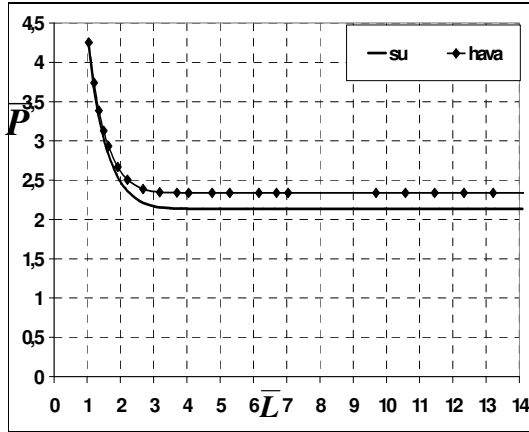
α	PEKBAY (Bu çalışma)		ÖZDAMAR (1996)	
	η_U	\bar{P}	η_U	\bar{P}
0.4	5.8461	4.2524	5.8462	4.2525
0.5	4.8253	3.7418	4.8254	3.7418
0.6	4.1558	3.3871	4.1558	3.3871
0.7	3.6884	3.1281	3.6883	3.1281
0.8	3.3484	2.9328	3.3484	2.9328
1	2.9026	2.6664	2.9027	2.6664
1.2	2.6453	2.5064	2.6454	2.5064
1.5	2.4583	2.3868	2.4583	2.3868
1.8	2.3980	2.3476	2.3980	2.3476
2.1	2.3854	2.3394	2.3854	2.3394
2.3	2.3839	2.3384	2.3839	2.3384
2.7	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
3	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
3.5	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
3.8	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
4	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
5.5	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
6	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
6.5	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
7	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
7.5	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
8	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381
8.5	2.3834	2.3381	2.3834	2.3381

Tablo 3. Ağırlığı dikkate alınan bir çubuğun su ortamındaki çözümü.

α	\bar{L}	η_U	\bar{P}
0.4	1.0427	5.7565	4.2089
0.5	1.1942	4.7274	3.6910
0.6	1.3378	4.0502	3.3295
0.7	1.4764	3.5739	3.0631
0.8	1.6118	3.2240	2.8597
1	1.8785	2.7542	2.5747
1.2	2.1468	2.4677	2.3929
1.5	2.5654	2.2300	2.2366
1.8	3.0136	2.1257	2.1664
2.1	3.4897	2.0902	2.1422
2.3	3.8162	2.0830	2.1372
2.7	4.4770	2.0800	2.1352
3	4.9742	2.0798	2.1351
3.5	5.8033	2.0798	2.1351
3.8	6.3007	2.0798	2.1351
4	6.6323	2.0798	2.1351
5.5	9.1194	2.0798	2.1351
6	9.9485	2.0798	2.1351
6.5	10.7775	2.0798	2.1351
7	11.6066	2.0798	2.1351
7.5	12.4356	2.0798	2.1351
8	13.2646	2.0798	2.1351
8.5	14.0937	2.0798	2.1351

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, bugüne kadar kritik burkulma kuvvetleri hesaplanmamış, üst ucu ankastre ve alt ucu ankastreli kayıcı mesnetli sınır koşullarına sahip bir çubuğun, su ortamındaki burkulma davranışı incelenmiştir. Şekil 6'da incelenen mesnetleme durumunun hava ve su ortamında elde edilen boyutsuz çubuk uzunluğu ile boyutsuz kritik burkulma kuvvetleri arasındaki ilişki görülmektedir. Bu şekil incelendiğinde, küçük çubuk uzunlukları için, hem hava hem de su içerisinde yer alan çubukta, boyutsuz kritik burkulma kuvvetinin oldukça birbirine yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca, boyutsuz çubuk uzunluğu artıkça, ağırlığı dikkate alınan havadaki çubuğun sudaki çubuğa nazaran daha büyük bir boyutsuz kritik burkulma kuvvetine sahip olduğu görülmüştür.



Şekil 6. Ağırlığı dikkate alınan hava ve su ortamında bulunan çubuğun boyutsuz kritik burkulma kuvveti ile kritik burkulma uzunluğu arasındaki ilişki.

Şekil 6 da görülen bir diğer önemli sonuçta, ağırlığı dikkate alınan havadaki çubuğun, boyutsuz kritik burkulma kuvvetinin belli bir değere yaklaştığı görülmektedir. Yani boyutsuz çubuk uzunluğu ne kadar büyük olursa olsun, çubuğun artık aynı kritik burkulma kuvvetinde olduğu görülür. Nitekim bu

sonucu Özdamar (1996), çalışmasında, bu mesnetleme durumunun asimptotik çözümünü yaparak, asimptotik değerini, yani boyutsuz kritik burkulma kuvvetini 2,3381 olarak bulmuştur. Bu çalışmada da aynı mesnetleme durumu için, su içerisinde ağırlığı dikkate alınan çubuğun asimptotik değerinin 2,1351 olduğu bulunmuştur.

5. TEŞEKKÜR

Her zaman her konuda özverili yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Aydoğan ÖZDAMAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

6. KAYNAKLAR

Euler, L. 1744. *De Curvis Elasticis*, Lausanne und Genf.

Bernitsas, M.M. and Kokkinis, T. 1984. Asymptotic behavior of heavy column and rise stability boundaries. *Trans. ASME* 51, 560-565.

Özdamar, A. 1996. *Das Knicken Schwerer Gestänge*, Yayınlanmış Doktora Tezi, VWF Verlag für Wissenschaft und Forschung, Berlin.

Plunkett, R. 1967. Static bending stresses in catenaries and drill strings. *J. Eng. Ind., Trans. ASME* 89, 31-36.

Sugiyama, Y., Ashida, K. and Kawagoe, H. 1978. Buckling of long columns under their own weight. *Bulletin of the ASME* 158-5, 1228-1235.

Watson, G.N. 1966. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, Second Edition.

Willers, F.A. 1941. Das knicken schwerer gestänge. *Z. Angew Math. Mech.* 21, 43-51.