

MAGNETOELASTİK MALZEMELERİN SÜREKLİ ORTAM HASAR MEKANIĞINA DAYALI BÜNYE DENKLEMLERİNİN GELİŞTİRİLMESİ

Mustafa Reşit USAL, Ergün KORKMAZ

Süleyman Demirel Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Makine Eğitimi Bölümü, 32260, Isparta

Geliş Tarihi : 21.09.2006

ÖZET

Sürekli-Ortam Hasar Mekaniği; Mikro-çatlak oluşumunun veya mikro boşlukların büyümesinin bir sonucu olarak, yapısal zayıflamaya uğrayan mühendislik malzemeleri ile ilgilendir. Bu çalışmada, magnetoelastik hasarlı malzemelerin bünye denklemlerine ait genel ifadeler sürekli ortam hasar mekaniğinin temel yasalarından türetilmiştir. Bu matematiksel model, mekanik bir yükün etkisi altında kalan ve mikro boşluklar içeren magnetoelastik ortamlar için geliştirilmiştir. Malzeme normalde izotrop bir ortam olup sırf mikro-boşluk dağılımı nedeniyle güçlü bir anizotropi göstermektedir. Bu bağlamda cisim davranış olarak kendisini gerilme, mıknatıslanma ve Gerilme-Enerjisi Yoğunluğunun Değişim Hızı (GEYDH) tarzında ifade edecektir. Sonuç olarak, gerilme, mıknatıslanma ve gerilme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinat sisteminde elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Sürekli-Ortam Hasar Mekaniği, Serbest enerji, Gerilme, Mıknatıslanma, Gerilme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızı, Bünye denklemleri.

DEVELOPMENT OF CONSTITUTIVE EQUATIONS BASED ON CONTINUUM DAMAGE MECHANICS FOR MAGNETOELASTIC MATERIALS

ABSTRACT

Continuum Damage Mechanics deals with engineering materials which undergo structural weakening as a result of micro-crack formation or void growth. The general expressions of constitutive equations for isotropic magnetoelastic damaged materials were derived from the basic laws of continuum damage mechanics. This mathematical model represents a magnetoelastic media which has micro-voids and subjected to a mechanical loading. Due to micro-void distribution, overall structure attains a strong anisotropy, despite the fact that the material is otherwise isotropic. In this context the body will respond by means of stress, magnetization and strain-energy density release rate. In the conclusion, constitutive response functions for the stress, magnetization and strain-energy density release rate have been obtained in material coordinates.

Key Words : Continuum damage mechanics, Stress, Magnetization, Strain-energy density release rate, Constitutive equations.

1. GİRİŞ

Mühendislik malzemelerinin mikro-yapıları; mikro-çatlaklar, dislokasyonlar, mikro-boşluklar ve zayıflamış kohezyon bölgeleri gibi çok sayıda mikro kusurlar içermektedir. Bu kusurlar, imalat prosesleri

enasında veya dış yüklemelerin etkisi altında ortaya çıkmaktadır. Hasar Mekaniği; düzensiz şekil, ölçü ve yönelimlerde düzensiz dağılmış olan birçok mikro-çatlak tarafından zayıflatılmış malzemelerin davranışını ve mukavemetini araştıran disiplinler arası bir alandır. Genel anlamda “Hasar” terimi

malzemelerin bozulması, kırılması, kopması ve işe yaramaması anlamında kullanılmaktadır. Oksitlenme, korozyon, difüzyon, mekanik yükler ve yaşlanmadan dolayı zayıflama veya termo-elektromanyetik yüklerden dolayı malzemenin yapısal bütünlüğünün bozulması, hasarı başlatıp daha sonra devam ettirebilecek etmenlerden bazılarıdır (Onaran, 1991; Yüksel, 2000). Hasar mekaniği; atomik ölçekte (kuantum mekaniği kapsamında), mikro ölçekte (mikro mekaniğin yasaları kapsamında), mezo ölçekte (sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde) ve makro ölçekte (çatlak ve kırılma mekaniği kapsamında) oldukça farklı ve geniş araştırma alanlarına konu olmuştur (Wu, 2000). Bu farklı yaklaşımlarda ortaya çıkan ortak görüş; hasarın malzemenin momentum iletme özelliğinde bir gerilemeye neden olduğudur (Krajcinovic, 1998; 2000; 2003).

Kaya, beton ve seramik gibi orta düzeyde kohezif mukavemet taşıyan malzemelerin sürekli ortam hasar mekaniği yöntemleri ile incelenemediğini biliyoruz (Kachanov, 1986; Lemaitre, 1996; Ibijola, 2002). Piezoelektrik ve ferrimanyetik seramik malzemelerin çatlak/kırılma mekaniği bazı araştırmalara konu edilmesine rağmen (Wang et al., 2004), bu malzemeleri sürekli ortam hasar mekaniği kapsamında inceleyen çok fazla araştırma yapılmamıştır. Bünye davranışları olarak Piezoelektrik malzemelerde ortaya çıkan polarizasyon ve Ferrimanyetik malzemelerde gözlenen mıknatıslanma olayının malzemede ortaya çıkan hasar mekanizmasından etkilenmemesi mümkün değildir. Bu tür malzemelere ait bünye denklemlerinin elde edilmesinin hem bu konuda yapılacak deneysel çalışmalara hem de sayısal analizlere katkı sağlayacağı beklenmektedir.

Ferrimanyetik malzemeler olarak bilinen ve genellikle demir oksit içeren ($MnFe_2O_4$, $ZnFe_2O_4$) seramik malzemelerin davranışı sürekli ortamlar hasar mekaniği alanında çok fazla irdelenmemiştir. Ferrimanyetik seramik mıknatıslar TV ve FM alıcılarında yüksek frekanslı transformatör yapımına uygun malzemelerdir. Bu tür malzemelerdeki hasar prosesi sadece malzemenin mekanik davranışını değil aynı zamanda manyetik davranışını da etkilemektedir. Burada geliştirilen model, magnetoelastik malzemelerin önemli bir alt sınıfını oluşturan Ferrimanyetik seramik malzemelerin manyetomekanik davranışını temsil etmek için kullanılabilir.

Bu araştırmanın teorik temellerini oluşturan çalışmalarda fiber takviyeli elastik dielektrik ortamların elektro-termomekanik davranışına ait matematiksel bir model oluşturulmuş ve elektrostatik alanlarla mekanik alanların nonlineer

etkileşimleri ele alınmıştır (Usal, 1994; Usal, 2001). Bir diğer çalışmada, mikro-boşluklu elastik ortamlar için bünye denklemlerinin oluşturulmasına ait matematiksel bir formülasyon sürekli ortam hasar mekaniği kapsamında geliştirilmiştir. Hasarın mekanik temsili ve bir iç durum değişkeni olarak hasar tansörünün göz önüne alınışı daha detaylı olarak verilmekle birlikte sadece mekanik büyüklükler göz önüne alınmış, manyetostatik kaynaklı kuvvet ve kuvvet-çifti ifadelerine yer verilmemiştir (Usal ve ark., 2006). Bu çalışmada ise manyetostatik alanlar için geçerli olan Maxwell denklemleri daha başlangıçta dikkate alınmış ve mikro-boşluklu manyetoelastik malzemeler için sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde matematiksel bir model kurulmuştur.

1. 1. Hasarın Mekanik Temsili

Şekil 1'de görülen temsili hacim elemanı, ($F = n F$) şeklinde bir kuvvetle yüklendiğinde bilinen tek eksenli gerilme $\sigma = F/S$ olur. Malzeme içerisinde yer alan mikro boşlukların dışarıdan uygulanan çekme kuvvetine karşı herhangi bir direnç göstermediği dolayısı ile yük taşımadığı düşünülürse, efektif olarak yük taşıyan yüzeyin dik kesit alanından mikro boşlukların alanını çıkararak elde edilen yüzey ($S-S_D$) olur. Dolayısıyla da efektif gerilme,

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Hasar parametresini mikro boşlukların toplam alanının toplam kesit alanına oranı

$$D \equiv \frac{S_D}{S} \quad (2)$$

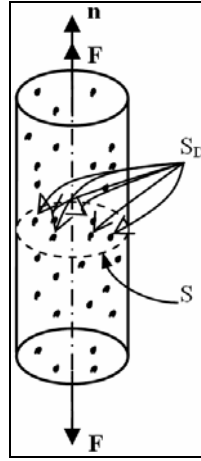
olarak tanımlayabiliriz (Chaboche, 1981; 1987; 1988). Kachanov (1986), malzeme içerisinde belli bir kesit boyunca süreklilik parametresini hasar parametresi ile ilişkilendirmiş ve süreklilik parametresini $\Psi \equiv 1 - D$ şeklinde tanımlamıştır. Bu durumda (1) ve (2) ifadelerini dikkate alarak,

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{F/S}{1-D} = \frac{\sigma}{1-D} = \frac{\sigma}{\Psi} \quad (3)$$

yazabiliriz. Yukarıda verilen ifadeleri göz önüne alarak aşağıdaki sınırlamaları yazılabilir;

$$0 \leq D \leq 1 \quad (4)$$

$D = 0$ (başlangıçtaki hasarsız durum, $\Psi = 1$)
 $D = 1$ (malzemenin kopma durumu, $\Psi = 0$)



Şekil 1. Tek eksenli çekme altındaki bir çubukta hasar parametresinin tanımı.

Lemaitre (1985) ve aynı şekilde Simo ve Ju (1978), efektif gerilme ilkesine benzer şekilde efektif gerilme içinde uygun tanımlar kullanarak izotropik hasar durumu için eşdeğer gerilmeyi $\tilde{\sigma} = (1-D)\sigma$ şeklinde ifade etmişlerdir. Bu aşamada gerilme eşdeğerliği ve gerilme eşdeğerliği hipotezlerini vermek açıklayıcı olacaktır:

Gerilme eşdeğerliği hipotezi : Hasarlı bir malzemenin gerilme davranışı orijinal veya hasarsız malzemenin bünye denklemi ile temsil edilebilir, ancak hasarsız malzemenin bünye denkleminde ortaya çıkan gerilme yerine efektif gerilme kullanılmalıdır. Başka bir ifadeyle, uygulanan gerilme altında malzemenin hasarlı durumu ile ilgili gerilme, efektif gerilme altında malzemenin hasarsız durumu ile ilgili gerilmeye eş değerdir. Efektif gerilme kavramı ve gerilme eşdeğerliği hipotezi doğal olarak bünye denklemlerinin gerilme-tabanlı formülasyonları için kullanılabilir.

Gerilme eşdeğerliği hipotezi : Uygulanan gerilme altında hasarlı durumla ilgili gerilme, efektif gerilme altında malzemenin orijinal (hasarsız) durumu ile ilgili gerilmeye eşdeğerdir. Efektif gerilme ilkesini kullanarak hasarlı bir malzeme ile hasarsız bir malzemenin elastisite modülü arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

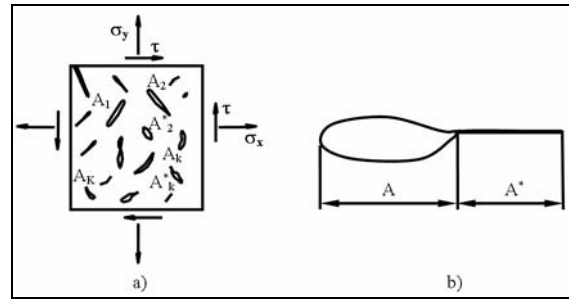
$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \Rightarrow \tilde{E} = E(1-D) \quad (5)$$

Burada, $D E$ hasar nedeniyle elastisite modülünde meydana gelen azalmayı, \tilde{E} ise hasarlı malzemenin elastisite modülünü göstermektedir.

Şimdi, gerçek hasarlı duruma mekanik olarak eşdeğer olan ve F yükünün etkisi altında,

$S^* \equiv S - DS$ şeklinde tanımlanan bir kesit alanına sahip hayali bir elemanı göz önüne alabilir ve bu durumu hasarsız bir durum olarak adlandırabiliriz. Eğer mekanik olarak eşdeğer olan bu iki durumdaki S ve S^* alanları arasındaki ilişki bir şekilde belirlenebilirse hasar değişkeni D de belirlenmiş olur.

Hasar değişkenlerini belirleyebilmek için K sayıda mikro çatlak içeren bir Temsili Hacim Elemanı (THE) göz önüne alınmıştır. Herhangi bir k -ıncı mikro çatlakın açık veya aktif kısmı $A^{(k)}$ ile, bu mikro çatlakın kapalı veya pasif yüzeyi de $A^{*(k)}$ ile gösterilmiştir. Bir çatlakla ait aktif veya pasif yüzeyler gerilme, sıcaklık ve nem oranına göre kendi aralarında yer değiştirebilir. Buna rağmen Weitsman bu açık ve kapalı yüzeylerin belli bir zaman aralığında malzemenin durumunu karakterize eden bağımsız değişkenler olarak seçilebileceğini ifade etmektedir (Weitsman, 1988a; 1988b).



Şekil 2. a) K sayıda mikro çatlak içeren temsili hacim elemanının düzlemsel görüntüsü (Weitsman, 1988b), b) Bir mikro çatlakın açık ve kapalı yüzeyleri.

Makro seviyede gerilmeler ve gerilmeler THE'nın hacmi üzerinde ortalama büyüklüklerdir. THE'nın davranışını tam anlamıyla dikkate almak için $A^{(k)}$ ve $A^{*(k)}$, ($k=1, \dots, K$) yüzeylerini temsil eden $2K$ sayıda çatlak parametresini dikkate almak gerekir. Bu yüzeylerin gerçek şekli mezo ölçekte tam olarak bilinmediğinden, Weitsman bunları eşdeğer düzlemsel yüzeyler olarak düşünerek $\mathbf{A}^{(k)} = A^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$ ve $\mathbf{A}^{*(k)} = A^{*(k)} \mathbf{n}^{(k)}$ vektörleri ile temsil etmiştir, ($k = 1, \dots, K$). Burada $\mathbf{n}^{(k)}$, bir mikro çatlak düzlemine ait birim normal vektörü göstermektedir (Weitsman, 1988a). Cismin içerisinde bir maddesel nokta civarında konveksiteleri farklı olan iki mikro çatlak göz önüne alalım. Eğrilik yarıçapları çok büyük olan farklı infinitesimal çatlak yüzeyleri topolojik ve mekanik açıdan eş değer kabul edilebilir. Bu durumda çatlak yüzeyinin topolojik temsili çatlak yüzeyinin yönünden bağımsız olarak ifade edilebilir. Matematiksel olarak bu temsili, iki vektörün diyadik

çarpımı ile oluşturulan bir simetrik tansör kullanarak gösterebiliriz. Her bir mikro çatlak aşağıdaki gibi simetrik diyadlarla tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z}^{*(k)} = \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)},$$

$$Z_{ij}^{(k)} = A_i^{(k)} A_j^{(k)} \quad (6)$$

$\mathbf{A}^{(k)}$ ve $\mathbf{A}^{*(k)}$ yüzeylerinin ölçüsü ve yeri hakkında detaylı bilgiler ancak istatistiksel olarak mikro ölçekte mevcut olduğundan, Sürekli-Ortamlar Mekaniğinin kullanıldığı mezo ölçekte (6) ifadesi ile verilen tansörel ifadelerin birleşik etkilerini aşağıdaki diyadik çarpımların toplamları ile gösterebiliriz. Bu işlem, mikro ölçekten mezo ölçğe geçerken yapılan homojenleştirme şeklinde de yorumlanabilir.

$$\mathbf{Z} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)}, \quad \mathbf{Z}^* = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)} \quad (7)_1$$

Böylece hasarın etkisi mezo ölçekte iki adet iç durum değişkeni ile ifade edilmektedir. Bu iki durum değişkeni de tanımları gereğince ikinci dereceden simetrik tansörel karakter taşır. Bu çalışmada bünye değişkeni olarak, sadece açık mikro yüzeylerin etkisini dikkate alan bir tek hasar tansörü göz önüne alınmış ve bu tansör bir iç durum değişkeni olarak kullanılmıştır. Açık mikro-çatlak yüzeylerinin temsili hacim elemanı içerisindeki ortalama değerlerini $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ vektörü ile bu vektörün zamanla değişimini $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$ ile gösterebiliriz. Bu vektörlerin, THE'na ait herhangi bir karakteristik yüzeyin alanına bölerek boyutsuzlaştırıldığını düşünmek formülasyonun genel yapısını etkilemez. Diğer taraftan, malzeme mikro-çatlak yüzeylerinin pozitif ve negatif taraflarını fark edemeyeceği için, matematiksel olarak $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ ve $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t)$ vektörlerine olan bağımlılığı (7)₁ ifadesini de göz önüne alarak,

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \Rightarrow \dot{\mathbf{Z}} \equiv \dot{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \dot{\mathbf{A}} \quad (7)_2$$

formundaki tansörel çarpımlarla ifade edebiliriz. Bu tansörler ileride verilecek olan gerilme potansiyelinin argümanları arasında yer alacaktır.

2. MATERYAL VE METOD

2. 1. Denge Denklemleri

2. 1. 1. Elektrostatik Denge Denklemleri

Göz önüne aldığımız ve t anında V(t) hacmini kaplayan ortamın çevresi ile olan etkileşiminde

mekanik olmayan kuvvetlerin tabi olduğu quazi-statik manyetik alanı yöneten integral denklemler "Genelleştirilmiş" Gauss ve Stokes teoremleri kullanılarak yerleştirildiğinde aşağıdaki diferansiyel ifadeler elde edilmiş olur (Eringen ve Maugin, 1990):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad V(t) \text{ içinde} \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H} = -\nabla \phi \quad V(t) \text{ içinde} \quad (9)$$

$$B \equiv \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$B_r \equiv \mu_0 (H_r + M_r) \Rightarrow \nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (10)$$

Burada, ∇ nabla (del) operatörü, \mathbf{B} manyetik indüksiyon vektörü, \mathbf{H} manyetik alan vektörü, ϕ manyetostatik potansiyel, μ_0 boşluğun manyetik geçirgenliği (permeabilitesi), \mathbf{M} mıknatıslanma vektörünü göstermektedir.

2. 1. 2. Termomekanik Denge Denklemleri

Benzer şekilde global balans denklemleri (kütle, lineer momentum, açısal momentum, enerji, ve entropi üretimi) yerleştirildiği takdirde elde edilen diferansiyel ifadeler aşağıdaki gibi yazılır. Bu denklemler belli bir V(t) hacmi için geçerlidir.

Kütlenin Korunumu:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (11)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)} \quad (12)$$

(Maddesel gösterimde kütle korunumu)

Lineer Momentumun Dengesi:

$$\rho \dot{v}_i = t_{li,l} + \rho f_i + F_i^M \quad (13)$$

Açısal Momentumun Dengesi:

$$\varepsilon_{n r p} (t_{r p} + M_r B_p) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{n r p} \bar{t}_{r p} = 0 \Rightarrow \bar{t}_{r p} = \bar{t}_{p r} \quad (14)$$

$$t_{r p} = \bar{t}_{r p} - M_r B_p \quad (15)$$

Enerji Korunumu:

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{ij} v_{j,i} - q_{i,i} + \rho h + \rho h^M + C_i^M w_i \quad (16)$$

Clausius – Duhem Eşitsizliği :

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} q_{i,i} - \frac{1}{\theta^2} q_i \theta_{,i} \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (17)$$

Burada, \mathbf{v} sürekli ortamın hızı, \mathbf{u} süreksizlik yüzeyinin hızı, ρ_0 deformasyondan önceki kütle yoğunluğu, ρ deformasyondan sonraki kütle yoğunluğu, J jakobiyen, $\dot{\mathbf{v}}$ ivme, t_{ij} gerilme tansörü, f_i birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet, F_i^M birim hacim başına manyetostatik gövde kuvveti, t_{ij} antisimetrik gerilme tansörü, \bar{t}_{ij} simetrik gerilme tansörü, C_i^M birim hacim başına manyetostatik kuvvet çifti, ε birim kütle başına iç-enerji yoğunluğu, q_i ısı akısı vektörü (birim zamanda ve birim yüzey alanından sisteme giren ısı miktarı olup bu vektör daima yüzey dışına doğru yönelmiş olarak seçilmektedir ve bu durum, enerji denklemi yazılırken dikkate alınmıştır), h birim kütle başına ısı kaynağı, h^M manyetostatik enerji kaynağı, w_i açılmal hız, η birim kütle başına entropi yoğunluğu, $\theta(\mathbf{X}, t)$ bir t anında mutlak sıcaklık dağılımı, $\rho \gamma$ birim kütle başına entropi üretimi olup ε_{ijk} permütasyon tansörünü göstermektedir.

Denge denklemlerinde geçen manyetostatik kaynaklı kuvvet ve kuvvet-çifti ve enerji kaynak ifadeleri

$$\mathbf{F}^M = \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{B} \Rightarrow F_i^M = M_j B_{i,j} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}^M \equiv \mathbf{M} \times \mathbf{B} \Rightarrow C_i^M = \varepsilon_{ijn} M_j B_n \quad (19)$$

$$\rho h^M \equiv -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{t}^E : \mathbf{d} \Rightarrow \rho h^M = -M_i B_i + t_{ij}^E d_{ij} \quad (20)$$

$$\bar{t}^M = -B \otimes M + (B \cdot M) I \quad (21)$$

şeklinde olup burada, \otimes sembolü tansörel çarpımı, \bar{t}^M Maxwell gerilme tansörünü göstermektedir ve (20) ifadesindeki (*) işareti aşağıdaki anlamda kullanılmıştır.

$$\mathbf{B} \equiv \dot{\mathbf{B}} - B_i \mathbf{v}_{,i} + \mathbf{B} v_{i,i} \quad (22)$$

deformasyon hızları tansörü d_{kl} ise,

$$d_{ij} \equiv v_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = d_{ji} \quad (23)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $v_{(i,j)}$ hız gradyanı tansörünün simetrik kısmı olarak tanımlanmakta; bu tansörün antisimetrik kısmı da spin tansörü olarak

$$w_{ij} \equiv v_{[i,j]} \equiv \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) = -w_{ji} \quad (24)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu ayrışım

$$\mathbf{L} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \text{ veya } v_{i,j} = d_{ij} + w_{ij} \quad (25)$$

şeklinde de gösterilmekte olup kinematik olarak birinci terim bir maddesel noktanın maruz kaldığı deformasyon hızlarını, ikincisi de rijid dönme hızlarını temsil etmektedir.

Yukarıda verilen (12) ifadesinin diverjansı alınıp ve (18) ifadesi ile birlikte (13) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\rho \dot{v}_p = \rho f_p + \bar{t}_{r,p,r} - M_{r,r} B_p \quad (26)$$

şeklinde lineer momentum denkleminiz simetrik bir gerilme tansörü cinsinden yazılmış olur.

Diğer taraftan (21), (22) ve (23) ifadelerini (20) de yerine yazıp, açılmal hızı spin tansörünün düalinden $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ şeklinde çekerek ve (19) da verilen \mathbf{C}^M 'nin tanımını göz önüne alırsak, yerel enerji denklemi olan (16) ifadesinin son iki terimi

$$\rho h^M + C_i^M w_i = -M_i \dot{B}_i \quad (27)$$

şeklinde elde edilir. (27) ifadesi (16) da yerine yazıldığında enerji korunumu için

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{ij} v_{j,i} - q_{i,i} + \rho h + M_i B_i \quad (28)$$

yerel denklemi ortaya çıkmış olur. Yukarıda verilen balans denklemleri elde edilirken, daha önce piezoelektrik ortamlar için süreksizlik yüzeylerini de içerecek şekilde geliştirilen matematiksel model yol gösterici olmuştur (Erdem ve ark., 2005a; 2005b).

2. 2. Termodinamik Kısıtlar

Enerji denklemi ile entropi eşitsizliği uygun şekilde birleştirilir ve serbest enerji için aşağıdaki şekilde bir Legendre transformasyonu kullanarak,

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta \quad (30)$$

entropi eşitsizliği maddesel formda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}\right) + \frac{1}{2} \bar{T}_{LN} \dot{C}_{LN} - \frac{1}{\theta} \theta_{,N} Q_N - M_N \dot{B}_N \geq 0 \quad (31)$$

elde edilmiş olur. Burada geçen yeni büyüklüklerle ilgili terimler aşağıda verilmektedir:

$$\Sigma \equiv \rho_0 \psi \quad (\Sigma : \text{gerilme potansiyeli}) \quad (32)$$

$$\dot{C}_{LN} = 2d_{ln} x_{l,L} x_{n,N} \Rightarrow d_{ln} = \frac{1}{2} \dot{C}_{LN} X_{L,l} X_{N,n} \quad (33)$$

$$\bar{T}_{LN} \equiv J X_{L,l} X_{N,n} \bar{t}_{ln} \Rightarrow \bar{t}_{ln} = J^{-1} x_{l,L} x_{n,N} \bar{T}_{LN} \quad (34)$$

$$Q_L \equiv J X_{L,l} q_l \Rightarrow q_l = J^{-1} x_{l,L} Q_L \quad (35)$$

$$M_L \equiv J X_{L,l} M_l \Rightarrow M_l = J^{-1} x_{l,L} M_L \quad (36)$$

$$B_L \equiv x_{l,L} B_l \Rightarrow B_l = X_{L,l} B_L \quad (37)$$

$$\theta_{,L} = x_{l,L} \theta_{,l} \Rightarrow \theta_{,l} = X_{L,l} \theta_{,L} \quad (38)$$

(31) eşitsizliği, quazi-manyetostatik bir alanın etkisinde bulunan termomekanik ortamlar için entropi üretiminin genel bir ifadesidir.

Σ gerilme potansiyeli genelde argümanları Sürekli-Ortamlar aksiyomlarına göre belirli olan

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{LN}, Z_{LN}, \dot{Z}_{LN}, B_L, \theta] \quad (39)$$

şeklinde bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun zamana göre maddesel türevini alırsak

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma} = & \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{LN}} \dot{C}_{LN} + \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{LN}} \dot{Z}_{LN} + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{Z}_{LN}} \ddot{Z}_{LN} + \frac{\partial \Sigma}{\partial B_L} \dot{B}_L + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \end{aligned} \quad (40)$$

ifadesini elde ederiz.

(40) ifadesi (31) eşitsizliğinde yerine yazılır, ortak terimlerin parantezleri alınır aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\bar{T}_{LN} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{LN}} \right) \dot{C}_{LN} - \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{LN}} \dot{Z}_{LN} - \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{Z}_{LN}} \ddot{Z}_{LN} - \left(M_L + \frac{\partial \Sigma}{\partial B_L} \right) \dot{B}_L - \\ & - \rho_0 \left(\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_L \theta_{,L} \geq 0 \end{aligned} \quad (41)$$

(41) eşitsizliğinin keyfi her bağımsız termodinamik prosete sağlanabilmesi için gerilme potansiyelinin

argümanları içinde bulunmayan \dot{C}_{LN} , \ddot{Z}_{LN} , \dot{B}_L , $\dot{\theta}$, ve $\theta_{,L}$ terimlerin katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir. \dot{Z}_{LN} , Σ 'nin argümanları içerisinde yer aldığından bu eşitsizlikteki \dot{Z}_{LN} nin katsayısı sıfıra eşitlenemez). \dot{Z}_{LN} nin katsayısına, Gerinme-Enerjisi Yoğunluğunun Değişim Hızı (GEYDH) olarak adlandırılan ve \bar{Y}_{LN} ile tanımlanan bir atama yapılırsa

$$\bar{Y}_{LN} \equiv - \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{LN}} \quad (42)$$

yazılabilir. Ayrıca pozitif bir büyüklükle uğraşmak için; $Y_{LN} \equiv -\bar{Y}_{LN}$ tanımlaması kullanılarak, GEYDH aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Y_{LN} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{LN}} \quad (43)$$

(41) eşitsizliğindeki \dot{C}_{LN} , \ddot{Z}_{LN} , \dot{B}_L , $\dot{\theta}$, ve $\theta_{,L}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{LN} \equiv & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{LN}}, \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{Z}_{LN}} = 0, M_L = - \frac{\partial \Sigma}{\partial B_L}, \\ \eta = & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}, Q_L = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\bar{Y}_{MN} \dot{Z}_{MN} \geq 0, -Y_{MN} \dot{Z}_{MN} \geq 0 \Rightarrow Y_{MN} \dot{Z}_{MN} \leq 0$$

Yukarıda verilen (44) ifadelerinde, başlangıçta belirttiğimiz gibi ortamda ısı iletiminin olmadığı ve serbest enerji yoğunluğunun da hasarın maddesel değişim hızına bağlı olmadığı görülmektedir.

Asimetrik formda ortaya çıkan toplam gerilmenin (15) maddesel koordinatlardaki ifadesi sürekli ortamlar mekaniğinin rutin hesaplamaları ile aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$T_{PQ} = \bar{T}_{PQ} - M_P X_{L,l} X_{Q,l} B_L = \bar{T}_{PQ} - M_P B_L C_{LQ}^{-1} \quad (45)$$

Burada, $C_{MN}^{-1} = X_{M,m} X_{N,n}$ Piola şekil değiştirme tansörü olarak bilinir. Diğer taraftan, serbest enerji yoğunluğunun bağlı olduğu argümanlar ve iç enerji aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma[C_{LN}, Z_{LN}, B_L, \theta] \quad (46)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} (\Sigma + \rho_0 \theta \eta) + \rho^{-1} M_i B_i = \frac{1}{\rho_0} \left(\Sigma - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \theta - \frac{\partial \Sigma}{\partial B_L} B_L \right) \quad (47)$$

(44)₁ ifadesini, (34)₂ ifadesine götürürsek, simetrik gerilme tansörü için,

$$\bar{t}_{ln} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{l,L}} x_{n,L} \quad (48)$$

ifadesi elde edilir. Ortam sıkışmaz olduğu takdirde $J^2 = \det \mathbf{C} = 1$ veya $\text{III} = 1$ şartı sağlanmalıdır (Erdem, ve ark., 2005a; 2005b; Korkmaz, 2001). Buna göre (48) denkleminde Σ yerine kendisine eşdeğer olan ve fakat sözü edilen kısıtlamayı içeren aşağıdaki fonksiyon alınabilir.

$$\Sigma - p(\mathbf{x}, t)(J - 1) \quad (49)$$

Burada p , bir Lagrange çarpanıdır. Bu ifadedeki fonksiyonun $x_{r,R}$ ye göre türevi alınıp (48) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\bar{t}_{ln} = -p \delta_{ln} + 2x_{l,L} x_{n,N} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{LN}} \quad (50)$$

elde edilir. Bu ifadenin maddesel koordinatlardaki formu ise

$$\bar{T}_{LN} = -p C_{LN}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{LN}} \quad (51)$$

olur (Korkmaz, 2001). GEYDH, bilindiği gibi daha önce $Y_{LN} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{LN}}$ şeklinde tanımlanmıştı. Bu ifadede Σ 'nın deformasyon gradyanına göre türevi yer almadığı için Lagrange çarpanı sıfır olur. Bu durumda elde etmemiz gereken bünye denklemleri, yapılan kabullere bağlı olarak T_{MN} , M_L ve Y_{LN} 'dir ve bunların serbest enerji fonksiyonu Σ 'ya bağlı olduğu (43) ve (44) denklemlerinden açıkça görülmektedir. O halde yapılacak ilk iş Σ 'nın açık formunu ortaya koymak olacaktır.

3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME

3.1. Bünye Denklemleri

Bu çalışmada, mekanik yüklemeye maruz mikro-boşluklu manyetoelastik bir ortamın izotrop olduğu

kabul edilmiştir. Bu durumda Σ 'ya ait argümanların somut olarak belirlenmesi için invariants teorisi ait sonuçlar kullanılmıştır. Ortamın anizotropisi sadece mikro-boşluklardan kaynaklanmaktadır. Bu yaklaşıma göre Σ gerilme potansiyelinin formu maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal transformasyon grubu altında invariants kalmalıdır (Spencer, 1971). Bu durumda Σ aşağıdaki kısıtlamayı sağlamalıdır:

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{B}, \theta) = \Sigma(\mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{Z} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{B}, \theta) \quad (52)$$

Burada \mathbf{Q} , maddesel koordinat sistemlerinin ful ortogonal transformasyonlarını gösterdiğinden ortogonal bir matris olup, $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ şartını sağlamaktadır. Invariants teorisi göre, bu argümanların skaler bir fonksiyonu olan Σ 'nın, bu argümanlara müşterek invariantsları vasıtası ile bağlı olması gerekir. Bu durumda, \mathbf{C} , \mathbf{Z} simetrik matrisleri ile \mathbf{B} vektörünün birbirinden bağımsız 16 adet müşterek invariantsları aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \mathbf{C}, I_2 = \text{tr } \mathbf{C}^2, I_3 = \text{tr } \mathbf{C}^3, I_4 = \text{tr } \mathbf{Z}, I_5 = \text{tr } \mathbf{Z}^2, \\ I_6 &= \text{tr } \mathbf{Z}^3, I_7 = B_N B_N, I_8 = B_N C_{NL} E_1, \\ I_9 &= B_N C_{NQ} C_{QL} B_L, I_{10} = B_N Z_{NL} B_L, \\ I_{11} &= B_N Z_{NR} Z_{RL} B_L, I_{12} = B_N C_{NQ} Z_{QL} B_L, \\ I_{13} &= \text{tr } \mathbf{C} \mathbf{Z}, I_{14} = \text{tr } \mathbf{C}^2 \mathbf{Z}, I_{15} = C_{NQ} Z_{QL} Z_{LN}, \\ I_{16} &= C_{NQ} C_{QL} Z_{LR} Z_{RN} \end{aligned} \quad (53)$$

\mathbf{Z} hasar tansörü, \mathbf{A} vektörünün kendi kendisi ile tansörel çarpımı (7)₂ olarak seçildiğinden $I_{11} = I_4 \cdot I_{10}$, $I_{15} = I_4 \cdot I_{13}$ ve $I_{16} = I_4 \cdot I_{14}$ yazılabileceği görülmektedir. Bu sebepten, I_{11} , I_{15} ve I_{16} invariantslar listesinden çıkarılabilir. Invariantsların kendisini oluşturan birimlerin simetrik bir fonksiyonu olması gereğine dayanarak, yukarıda hasar tansörü için yaptığımız bu kabul teorinin genel sistematiğini bozamaz. Bu durumda serbest enerji fonksiyonumuz yukarıda verilen argümanların fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{12}, I_{13}, I_{14}) \quad (54)$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invariantslarının

$$I = I_1, II = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2), III = \frac{1}{3!}(I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3) \quad (55)$$

şeklinde olduğu dikkate alınarak (53) ifadesindeki (I_1 , I_2 , I_3) invariantsları yerine, (55) ifadeleri ile verilen asal invariantslar kullanılabilir. Ortam

sıkışmaz kabul edildiğinden III=1 olur. Bu durumda Σ 'nın bağlı olduğu invariantlar, (53) ve (55) ifadeleri yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Sigma = \Sigma(I, II, I_4, I_5, I_6, \dots, I_{10}, I_{12}, I_{13}, I_{14}) \quad (56)$$

Ortam sıkışmaz olduğundan gerilmenin, mıknaatıslanmanın ve GEYDH'nın bünye denklemi aşağıdaki gibi ortaya konulmuştur.

$$\bar{T}_{PQ} = -p C_{PQ}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} \quad (57)$$

$$M_R = -\frac{\partial \Sigma}{\partial B_R}, \quad (58)$$

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{PQ}} \quad (59)$$

(57)–(59) ifadelerindeki kısmi türevler (56) ifadesini dikkate alarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial C_{PQ}} + \quad (60)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} \frac{\partial I_9}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} \frac{\partial I_{13}}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} \frac{\partial I_{14}}{\partial C_{PQ}}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial B_R} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial B_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial B_R} + \quad (61)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} \frac{\partial I_9}{\partial B_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \frac{\partial I_{10}}{\partial B_R} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial B_R}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{PQ}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial Z_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial Z_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial Z_{PQ}} + \quad (62)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \frac{\partial I_{10}}{\partial Z_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial Z_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} \frac{\partial I_{13}}{\partial Z_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} \frac{\partial I_{14}}{\partial Z_{PQ}}$$

(53) ve (55) ifadeleri ile verilen invariantların sırasıyla C_{PQ} , B_R ve Z_{PQ} ya göre türevleri (60), (61) ve (62) denklemlerinde yerine yazılır ve elde edilen ifadeler (57), (58) ve (59) denklemlerine taşınırsa; mekanik bir yüklemeye maruz, mikro-boşluklu ve sıkışmaz olarak kabul edilen manyetoelastik bir ortamdaki simetrik gerilme, mıknaatıslanma ve GEYDH'na ait bünye denklemleri, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} (\delta_{PQ}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} (C_{RR} \delta_{PQ} - C_{PQ}) + \right. \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (B_P B_Q) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (C_{PR} B_R B_Q + C_{QR} B_R B_P) + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (B_P Z_{QR} B_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} (Z_{PQ}) + \\ & \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} (C_{PR} Z_{RQ} + Z_{PR} C_{RQ}) \right] \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} M_R = & -2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} B_R + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (C_{RL} B_L) + \\ & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (C_{RM} C_{ML} B_L) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (Z_{RL} B_L) + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (C_{RL} Z_{LM} B_M + B_M C_{ML} Z_{LR}) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} (\delta_{PQ}) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} (Z_{PQ}) + \\ & 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (Z_{PR} Z_{RQ}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (B_P B_Q) + \\ & \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (B_R C_{RP} B_Q) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{13}} (C_{PQ}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{14}} (C_{PR} C_{RQ}) \end{aligned} \quad (65)$$

(63) denkleminde gözüken Lagrange çarpanı p , hidrostatik basınç olarak bilinir ve alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenebilir. (63), (64) ve (65) denklemlerinin daha somut şekli elde etmek için bu denklemlerdeki Σ 'nin invariantlarına göre türevlerinin değerlendirilmesi gerekir. Σ 'nin bağlı olduğu invariantlar daha önce (56) ifadesi ile verilmiş ancak bu invariantlara nasıl bağlı olduğu henüz belirlenmemiştir. Σ , bu invariantların analitik bir fonksiyonu ise, Σ için uygun bir polinom seçilebilir. Σ 'nin kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği deformasyon büyüklüklerinin olaydaki etkileşim paylarına kısacası nonlineerlik mertebelerine bağlıdır (Erdem ve ark., 2005a; 2005b; Korkmaz, 2001; Spencer, 1971).

İç enerji pozitif tanımlı olduğundan bu polinomun pozitif tanımlı olması gerekir. Ayrıca invariantların sırasının Σ 'yi etkilememesi için bu polinomun simetrik katsayılı olması, yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Serbest enerji yoğunluğu fonksiyonu için mevcut invariantlar cinsinden bir polinom seçilmesi durumunda aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\Sigma = \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (66)$$

$$(i, j = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14),$$

Bu ifadedeki a_{ij} katsayılarının hepsi, X parçacığına ve ortamın θ sıcaklığına bağlıdır. (63), (64) ve (65) ifadelerinde yer alan Σ 'nin invariantlara göre türevleri (66) polinom açılımından faydalanarak bulunabilir. (66) ifadesinin ihtiva ettiği invariantlara göre Σ 'nin kısmi türevleri alınarak (63), (64) ve (65) denkleminde yerine yazıldıktan sonra deformasyon tansörü C 'nin birinci dereceden, manyetik indüksiyon vektörü B ve hasar tansörü Z 'nin ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PQ} = & -pC_{PQ}^{-1} + 2[2a_{11}C_{RR}\delta_{PQ} + 2a_{14}Z_{RR}\delta_{PQ} + \\ & 2a_{15}Z_{RL}Z_{LR}\delta_{PQ} + 2a_{17}B_R B_R \delta_{PQ} + \\ & 2a_{18}B_R C_{RL} B_L \delta_{PQ} + 2a_{1,10}B_R Z_{RL} B_L \delta_{PQ} + \\ & 2a_{1,12}B_R C_{RL} Z_{LM} B_M \delta_{PQ} + 2a_{1,13}C_{RL} B_{LR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{24}B_{LL} C_{RR} \delta_{PQ} + 2a_{25}Z_{ML} Z_{LM} C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{27}B_M B_M C_{RR} \delta_{PQ} + 2a_{2,10}B_M Z_{ML} B_L C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & 2a_{24}Z_{RR} C_{PQ} - 2a_{25}Z_{RL} Z_{LR} C_{PQ} - \\ & 2a_{27}B_R B_R C_{PQ} - 2a_{2,10}B_R Z_{RL} B_L C_{PQ} - \\ & 2a_{18}C_{RR} B_P B_Q + 2a_{8,13}C_{RL} Z_{LR} B_P B_Q + \\ & 2a_{1,12}C_{RR} B_P Z_{QN} B_N + 2a_{12,13}C_{RL} Z_{LR} B_P Z_{QN} B_N + \\ & 2a_{1,13}C_{RR} Z_{PQ} + 2a_{13,13}C_{RL} Z_{LR} Z_{PQ}] \quad (67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_R = & -[4a_{17}C_{NN} B_R + 4a_{7,13}C_{NL} Z_{LN} B_R + \\ & 4a_{1,10}C_{NN} Z_{RP} B_P + 4a_{10,13}C_{NL} Z_{LN} Z_{RP} B_P] \quad (68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & 2a_{14}C_{RR}\delta_{PQ} + 2a_{44}Z_{RR}\delta_{PQ} + \\ & 2a_{45}Z_{NL}Z_{LN}\delta_{PQ} + 2a_{47}B_R B_R \delta_{PQ} + \\ & 2a_{48}B_R C_{RL} B_L \delta_{PQ} + 2a_{4,10}B_R Z_{RL} B_L \delta_{PQ} + \\ & 2a_{4,12}B_R C_{RL} Z_{LM} B_M \delta_{PQ} + 2a_{4,13}C_{RL} Z_{LR} \delta_{PQ} + \\ & 4a_{15}C_{RR} Z_{PQ} + 4a_{57}B_R B_R Z_{PQ} + 4a_{58}B_R C_{RL} B_L Z_{PQ} + \\ & 4a_{5,10}B_R Z_{RL} B_L Z_{PQ} + 4a_{5,12}B_R C_{RL} Z_{LM} Z_{PQ} + \\ & 4a_{5,13}C_{RL} Z_{LR} Z_{PQ} + 6a_{16}C_{NN} Z_{PR} Z_{RQ} + \\ & 6a_{67}B_N B_N Z_{PR} Z_{RQ} + 6a_{68}B_R C_{RL} B_L Z_{PR} Z_{RQ} + \\ & 2a_{1,10}C_{RR} B_P B_Q + 2a_{10,13}C_{RL} Z_{LR} B_P B_Q \quad (69) \end{aligned}$$

denklemleri bulunur. C'nin birinci dereceden etkilerinin dikkate alınma sebebi, seramik malzemelerde ortaya çıkan deformasyonların infinitesimal olmasıdır. İnfinitesimal bir deformasyonun karesi ihmal edilebilir bir etki olarak düşünülmüştür. Yukarıda verilen (67), (68) ve (69) denklemindeki katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \gamma_1 & \equiv 4a_{11}, \gamma_2 \equiv 4a_{14}, \gamma_3 \equiv 4a_{15}, \gamma_4 \equiv 4a_{17}, \gamma_5 \equiv 4a_{18}, \\ \gamma_6 & \equiv 4a_{1,10}, \gamma_7 \equiv 4a_{1,12}, \gamma_8 \equiv 4a_{1,13}, \gamma_9 \equiv 4a_{24}, \\ \gamma_{10} & \equiv 4a_{25}, \gamma_{11} \equiv 4a_{27}, \gamma_{12} \equiv 4a_{2,10}, \gamma_{13} \equiv 4a_{8,13}, \\ \gamma_{14} & \equiv 4a_{12,13}, \gamma_{15} \equiv 4a_{13,13}, \mu_1 \equiv 4a_{17}, \mu_2 \equiv 4a_{7,13}, \\ \mu_3 & \equiv 4a_{1,10}, \mu_4 \equiv 4a_{10,13}, \xi_1 \equiv 2a_{44}, \xi_2 \equiv 2a_{45}, \\ \xi_3 & \equiv 2a_{47}, \xi_4 \equiv 2a_{48}, \xi_5 \equiv 2a_{4,10}, \xi_6 \equiv 2a_{4,12}, \\ \xi_7 & \equiv 2a_{4,13}, \xi_8 \equiv 4a_{57}, \xi_9 \equiv 4a_{58}, \xi_{10} \equiv 4a_{5,10}, \\ \xi_{11} & \equiv 4a_{5,12}, \xi_{12} \equiv 4a_{5,13}, \xi_{13} \equiv 6a_{16}, \xi_{14} \equiv 6a_{67}, \\ \xi_{15} & \equiv 6a_{68} \quad (70) \end{aligned}$$

Simetrik gerilme tansörü, mıknaatıslanma ve GEYDH'na ait bünye denklemleri maddesel koordinatlarda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PQ} = & -pC_{PQ}^{-1} + \gamma_1 C_{RR} \delta_{PQ} + \gamma_2 Z_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_3 Z_{RL} Z_{LR} \delta_{PQ} + \gamma_4 B_R B_R \delta_{PQ} + \\ & \gamma_5 B_R C_{RL} B_L \delta_{PQ} + \gamma_6 B_R Z_{RL} B_L \delta_{PQ} + \\ & \gamma_7 B_R C_{RL} Z_{LN} B_N \delta_{PQ} + \gamma_8 C_{RL} Z_{LR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_9 Z_{LL} C_{RR} \delta_{PQ} + \gamma_{10} Z_{NL} Z_{LN} C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_{11} B_L B_L C_{RR} \delta_{PQ} + \gamma_{12} B_N Z_{NL} B_L C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_9 Z_{RR} C_{PQ} - \gamma_{10} Z_{RL} Z_{LR} C_{PQ} - \gamma_{11} B_R B_R C_{PQ} - \\ & \gamma_{12} B_R Z_{RL} B_L C_{PQ} - \gamma_5 C_{RR} B_P B_Q + \\ & \gamma_{13} C_{RL} Z_{LR} B_P B_Q + \gamma_7 C_{RR} B_P Z_{QN} B_N + \\ & \gamma_{14} C_{RL} Z_{LR} B_P Z_{QN} B_N + \gamma_8 C_{RR} Z_{PQ} + \\ & \gamma_{15} C_{RL} Z_{LR} Z_{PQ} \quad (71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_R = & -[\mu_1 C_{NN} B_R + \mu_2 C_{NL} Z_{LN} B_R + \\ & \mu_3 C_{NN} Z_{RP} B_P + \mu_4 C_{NL} Z_{LN} Z_{RP} B_P] \quad (72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & \frac{1}{2} \gamma_2 C_{RR} \delta_{PQ} + \xi_1 Z_{RR} \delta_{PQ} + \xi_2 Z_{NL} Z_{LN} \delta_{PQ} + \\ & \xi_3 B_R B_R \delta_{PQ} + \xi_4 B_R C_{RL} B_L \delta_{PQ} + \xi_5 B_R Z_{RL} B_L \delta_{PQ} + \\ & \xi_6 B_R C_{RL} Z_{LN} B_N \delta_{PQ} + \xi_7 C_{RL} Z_{LR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_3 C_{RR} Z_{PQ} + \xi_8 B_R B_R Z_{PQ} + \xi_9 B_R C_{RL} B_L H_{PQ} + \\ & \xi_{10} B_R Z_{RL} B_L Z_{PQ} + \xi_{11} B_R C_{RL} Z_{LN} Z_{PQ} + \\ & \xi_{12} C_{RL} Z_{LR} Z_{PQ} + \xi_{13} C_{NN} Z_{PR} Z_{RQ} + \\ & \xi_{14} B_N B_N Z_{PR} Z_{RQ} + \xi_{15} B_R C_{RL} B_L Z_{PR} Z_{RQ} + \\ & \frac{1}{2} \gamma_6 C_{RR} B_P B_Q + \frac{1}{2} \mu_4 C_{RL} Z_{LR} B_P B_Q \quad (73) \end{aligned}$$

(45) denklemini dikkate alındığı zaman asimetrik toplam gerilme tansörü de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} T_{PQ} = & -pC_{PQ}^{-1} + \gamma_1 C_{RR} \delta_{PQ} + \gamma_2 Z_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_3 Z_{RL} Z_{LR} \delta_{PQ} + \gamma_4 B_R B_R \delta_{PQ} + \\ & \gamma_5 B_R C_{RL} B_L \delta_{PQ} + \gamma_6 B_R Z_{RL} B_L \delta_{PQ} + \\ & \gamma_7 B_R C_{RL} Z_{LN} B_N \delta_{PQ} + \gamma_8 C_{RL} Z_{LR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_9 Z_{LL} C_{RR} \delta_{PQ} + \gamma_{10} Z_{NL} Z_{LN} C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_{11} B_L B_L C_{RR} \delta_{PQ} + \gamma_{12} B_N Z_{NL} B_L C_{RR} \delta_{PQ} + \\ & \gamma_9 Z_{RR} C_{PQ} - \gamma_{10} Z_{RL} Z_{LR} C_{PQ} - \gamma_{11} B_R B_R C_{PQ} - \\ & \gamma_{12} B_R Z_{RL} B_L C_{PQ} - \gamma_5 C_{RR} B_P B_Q + \\ & \gamma_{13} C_{RL} Z_{LR} B_P B_Q + \gamma_7 C_{RR} B_P Z_{QN} B_N + \\ & \gamma_{14} C_{RL} Z_{LR} B_P Z_{QN} B_N + \gamma_8 C_{RR} Z_{PQ} + \\ & \gamma_{15} C_{RL} Z_{LR} Z_{PQ} + [\mu_1 C_{NN} B_P + \mu_2 C_{NL} Z_{LN} B_P + \\ & \mu_3 C_{NN} Z_{PR} B_R + \mu_4 C_{NL} Z_{LN} Z_{PR} B_R] E_S C_{SQ}^{-1} \quad (74) \end{aligned}$$

4. SONUÇLAR

Gerilmenin, mıknatıslanmanın ve GEYDH'nın bünye denklemleri, (71), (72) ve (73) denklemleri ile verilmiştir. Son olarak, (45) ifadesi dikkate alındığında asimetrik bir formda ortaya çıkan toplam gerilme (74) denklemi ile ifade edilmiştir. Bu bünye denklemleri uygun lineerleştirme işlemleri ile daha basit formlara da dönüştürülebilir.

Simetrik gerilme bünye denklemi (71)'de yer alan terimlere baktığımızda; ilk terim sıkışmazlık kabulünden kaynaklanmaktadır. İkinci terim deformasyon tansörünün lineer etkisinden, üçüncü terim hasar tansörünün lineer etkisinden, 4. terim hasar tansörünün nonlineer etkisinden kaynaklanmaktadır. 5. terim manyetik induksiyon alanının karesini içermekte olup bu etki manyetostriksiyon adını alır. Manyetostriksiyon karesel (ikinci mertebeden) bir etki olduğundan manyetik induksiyon vektörünün yönüne bağlı değildir. Lineer etkileşimler dikkate alındığında bu etki gözlenmez. Manyetik induksiyon şiddetinin çok küçük olduğu durumlarda ise ihmal edilebilir. 6. terim ve ondan sonraki terimler kapıl (birleşik) etkileşimleri göstermektedir. 6, 12, 16 ve 18. terimler manyetik induksiyon vektörünün nonlineer deformasyon tansörünün lineer etkileşimlerinden, 7. terim manyetik induksiyon vektörünün nonlineer hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 8, 13, 17, 19 ve 20. terimler manyetik induksiyonun nonlineer hasar ve deformasyon tansörünün ise lineer etkileşiminden kaynaklanmakta olup üçlü etkileşimleri ifade eder. 9, 10, 14 ve 22. terimler deformasyon ve hasar tansörlerinin lineer etkileşiminden, 11, 13 ve 25. terimler ise deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün ise nonlineer etkileşimlerinden kaynaklanan terimlerdir. 21. terim hasar tansörünün ve manyetik induksiyon vektörünün nonlineer deformasyon tansörünün lineer etkileşimlerinden kaynaklanan bir terim olup üçlü etkileşimlere ilginç bir örnektir.

Mıknatıslanma denklemine (72) baktığımız zaman ise bütün terimlerde manyetik induksiyon vektörü birinci dereceden yer almakta olup manyetostriksiyon etkinin mıknatıslanmaya katkısı gözükmemektedir. Birinci terim deformasyon tansörü ve manyetik induksiyon vektörünün lineer etkileşiminden, ikinci ve üçüncü terim üçlü etkileşimlerden olup deformasyon ve hasar tansörü ile manyetik induksiyon vektörünün lineer etkileşiminden, son terim ise hasar tansörünün nonlineer deformasyon ve manyetik induksiyon vektörünün lineer etkileşiminin bir sonucudur.

GEYDH'nın bünye denklemi (73)'de ilk terim deformasyon tansörünün lineer etkisinden, ikinci terim hasar tansörünün lineer etkisinden, üçüncü terim ise hasar tansörünün nonlineer etkisinden kaynaklanmaktadır. 4. terim manyetostriksiyon katkısını göstermektedir. 5 ve 18. terimler manyetik induksiyon vektörünün nonlineer deformasyon tansörünün lineer etkileşiminden, 6 ve 10. terimler manyetik induksiyon vektörünün nonlineer hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 7, 11 ve 19. terimler manyetik induksiyon vektörünün lineer hasar ve deformasyon tansörlerinin lineer etkileşimlerinden kaynaklanan terimleri ifade eder. 8 ve 9. terimler hasar ve deformasyon tansörlerinin lineer etkileşimlerini, 12 ve 16. terimler manyetik induksiyon vektörü ve hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerini, 14 ve 15. terimler deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerini gösterir. 13. terim manyetik induksiyon vektörünün ve deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün nonlineer etkileşimini ve 17. terim ise deformasyon tansörünün lineer manyetik induksiyon vektörü ve hasar tansörünün nonlineer etkileşimini temsil etmektedir. Benzer mülahazalar toplam gerilme tansörü (74) için de yapılabilir. Bünye denklemlerinde ortaya çıkan katsayıların belirlenmesi, geliştirilen analitik modellerin doğruluğunun onaylanması ve eksikliklerin giderilmesi için kapsamlı deneysel çalışmalara ihtiyaç vardır. Doğruluğu onaylanmış deneysel parametreler elde edildikten sonra, sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler yardımıyla bu konu daha detaylı olarak incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

- Chaboche, J. L. 1981. Continuous Damage Mechanics-A Tool to Describe Phenomena before Crack Initiation. Nuclear Engineering and Design, 64, 233-247.
- Chaboche, J. L. 1987. Continuum Damage Mechanics: Present State and Future Trends. Nuclear Engineering and Design, 105, 19-33.
- Chaboche, J. L. 1988. Continuum Damage Mechanics: Part I-General Concepts. Journal of Applied Mechanics, 55, 59-64.
- Eringen, A. C., Maugin, G. A. 1990. Electrodynamics of Continua, Vol. I. Foundations and Solid Media, North - Holland.
- Erdem, A.Ü., Usal, M.R., Usal, M. 2005a. Keyfi Fiber takviyeli Viskoelastik Piezoelektrik Bir Cismin Elektro-Termomekanik Davranışı için

- Matematiksel Bir Model, Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der., 20, 3, 305-319, Ankara.
- Erdem, A.Ü., Usal, M., Usal, M. R. 2005b. İzotropik Matris Malzemesi Olan Fiber Takviyeli Dielektrik Viskoelastik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışı için Matematiksel Bir Model, Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der., 20, 3, 321-334, Ankara.
- Ibijola, E. A. 2002. On Some Fundamental Concepts of Continuum Damage Mechanics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 1505-1520.
- Kachanov, L. M. 1986. Introduction to Continuum Damage Mechanics, Martinus Nijhof Publishers, 135 p, Dordrecht.
- Korkmaz, E. 2001. Sürekli Ortam Hasar Mekanik Yardımıyla Mekanik Davranışın Belirlenmesi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 110 s, Isparta.
- Krajcinovic, D. 1998. Selection of Damage Parameter– Art or Science?. Mechanics of Materials, 28, 165-179.
- Krajcinovic, D. 2000. Damage Mechanics, Trends and Needs. International Journal of Solids and Structures, 37, 267-277.
- Krajcinovic, D. 2003. Damage Mechanics. North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 41, Amsterdam, Elsevier.
- Lemaitre, J. 1985. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture, Journal of Engineering Materials and Technology, 107, 83-89.
- Lemaitre, J. 1996. A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag, 228 p, New York.
- Onaran, K. 1991. Malzeme Bilimi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 319 s, Sayı : 1448.
- Simo, J. C., Ju, J. W. 1978. Strain and Stress-Based Continuum Damage Models-I Formulation, International Journal of Solids and Structures, 23, 7, 821-840.
- Spencer, A. J. M. 1971. Theory of Invariants, In Continuum Physics, Vol. I., (Ed., A.C. Eringen), Academic Pres, N.Y., and London.
- Usal, M. R. 1994. Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışlarına Ait Matematiksel Bir Model, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
- Usal, M. 2001. Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı İçin Matematiksel Modelleme, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.
- Usal, M. R., Korkmaz, E., Usal, M. 2006. Hasarlı Elastik Ortamlar İçin Bünye Denklemleri, S.D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10-1, 125-135.
- Wang, B. L., Mai, Y. W. 2004. Fracture of Piezoelectromagnetic Materials, Mechanics Research Communications, 31, 65-73.
- Weitsman, Y. 1988a. Damage Coupled with Heat conduction in Uniaxially Reinforced Composites, Journal of Applied Mechanics, 55, 641-647.
- Weitsman, Y. 1988b. A Continuum Damage Model for Viscoelastic Materials. Journal of Applied Mechanics, 55, 773-780.
- Wu, T. L. 2000. Micromechanics Determination of Electroelastic Properties of Piezoelectric Materials Containing Voids, Materials Science & Engineering, A280, 320-327.
- Yüksel, M. 2000. Malzeme Bilgisine Giriş (Malzeme Temel Bilgileri), TMMOB, Makine Mühendisleri Odası, Y. No : 245, Denizli.