

ANALYTISCHE ERMITTLUNG DER SCHUBSPANNUNGS- VERTEILUNG DES MEHRSCICHTVERBUNDES BEI QUERKRAFTBIEGUNG

Zakir TAŞ, Aytekin POLAT

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi, Malzeme Bölümü, Gebze/Kocaeli

Geliş Tarihi : 21.07.2005

ZUSAMMENFASSUNG

Die Faserverbundkunststoffe sind kostengünstig, haltbar und unempfindlich gegen die Korrosion. Aber bei diesen Werkstoffen besteht die Gefahr der Delamination. Die einzelnen laminierten Schichten werden durch Scherkräfte voneinander getrennt. Dieser Vorgang kann sowohl die Festigkeit als auch die Steifigkeit dieses Materials vermindern. Aus diesem Grund ist es wichtig, die Delaminationsmechanismen zu begreifen und das Bruch vorherzusagen. In der vorliegenden Arbeit wurde die Schubspannungsverteilung mehrschichtiger Beigeträgers aus Glas-, Kohle- und Aramidfaser bei verschiedenen Dicken analytisch untersucht.

Schlüsselwörter : Faserverbundkunststoffe, Delamination, Schubfestigkeit

ÇOK KATMANLI TAKVİYELİ PLASTİKLERDE İNTERLAMİNAR KAYMA GERİLMELERİNİN ANALİTİK OLARAK BELİRLENMESİ

ÖZET

Takviyeli plastikler ucuz, dayanıklı ve korozyona karşı duyarsız malzemelerdir. Ancak bu malzemelerde yüklemeye sonucunda tabakalar arasında ayrışma (delaminasyon) tehlikesi ortaya çıkmaktadır. Katmanlar kayma kuvvetleri sonucunda birbirinden ayrılmaktadır. Katmanlar arası kırılma takviyeli plastiklerin hem mukavemetini hem de direngenliğini düşürebilmektedir. Bundan dolayı delaminasyon mekanizmasını anlamak ve öngörüle bulunabilmek büyük önem arz etmektedir. Bu çalışmada farklı kalınlıklardaki cam, karbon ve aramid takviyeli plastiklerden oluşan çok katmanlı taşıyıcılarda kayma gerilmeleri analitik olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Takviyeli plastik, Delaminasyon, Kayma mukavemeti

1. EINFÜHRUNG

In absehbarer Zukunft wird unser Energiebedarf, insbesondere in der Automobiltechnik und in der Luft- und Raumfahrt, nicht mehr mit fossilen Brennstoffen abgedeckt werden können. Aus diesem Grunde und zum Schutz der Umwelt müssen einerseits neue Energieträger gefunden und andererseits muss nach Einsparpotentialen gesucht werden. In diesem Zusammenhang wäre eine

Möglichkeit die Reduktion von bewegten Massen, wie Verkehrsmittel, Flugzeuge usw. Im Automobilbau bedeutet Gewichtsersparnis einen geringeren Kraftstoffverbrauch und in der Luft- und Raumfahrt eine höhere Nutzlastkapazität.

Um tragende Konstruktionsteile leichter zu machen, wird heutzutage die Formgebung mit rechnergestützten Programmen optimiert und durch Werkstoffe geringer Dichte ersetzt. Für diese Aufgaben sind Metalle wie Titan, Aluminium,

Magnesium und deren Legierungen prädestiniert. Auch finden geschäumte Metalle oder Polymere und immer häufiger faserverstärkte Kunststoffverbunde ihren Einsatz in den ingenieurmäßigen Konstruktionen. Letztere Materialien erlangen nur zögernd ihren Einzug, da noch eine gewisse Unsicherheit, das Bruchverhalten quantitativ zu beschreiben, besteht (Geiss, 2001).

Weitere Verbesserung im Gesamtverhalten und in speziellen Eigenschaften erwartet man durch die Hybridbauweise, in denen verschiedene Fasermaterialien (z.B. Glas + Kohle oder Kohle + Kevlar) kombiniert werden, sei es um die Materialkosten zu senken, die Schlagfestigkeit und die Arbeitsaufnahme zu erhöhen oder die Verletzungsgefahr von Kohlefaser zu vermeiden (Tousen-Abdelwahed, 1984).

Mehrschichtverbund ist ein Bauelement, das aus zwei oder mehr Schichten aufgebaut ist. Jede einzelne Schicht kann verschiedene Elastizitätseigenschaften besitzen. Innerhalb einer Schicht sollen die Schichtdicke und der Schichtwinkel konstant sein. Von Schicht zu Schicht ändern sich die Dicken.

Es wird angenommen, dass der Mehrschichtverbund ein flächiges Gebilde ist, dessen Dicke klein gegenüber seinen übrigen Abmessungen ist. Die Kompatibilitätsbedingung fordert, dass die Berührungsflächen so einander haften, dass sie gleiche Verformungen erfahren (Wissmann, 1976).

In faserverstärkten Polymeren treten häufig bei Belastung Delaminationen auf. Der interlaminare Bruch kann sowohl die Festigkeit als auch die Steifigkeit von Faserverbundstrukturen herabsetzen und damit zu einem Sicherheitsproblem führen (Chen, 2000). Ein Laminat besteht aus mehreren Lagen, was zur vereinheitlichenden Annahme führen würde, dass dies auch noch wegen des gleichen Elastizitätsmoduls wiederum eine Schicht sei. In dieser analytischen Arbeit werden Mehrschichtverbunde behandelt, deren Einzelschichten bzw. Schichtpaare aus unidirektionalen faserverstärkten Kunststoffen bestehen.

2. BERECHNUNGEN

2. 1. Bestimmung der Steifigkeiten des Verbundes

Die Schubspannungen bei den Querkraftbiegeträgern werden aus den

Längsspannungen mit Hilfe einer Gleichgewichtsbedingung berechnet. Bei der Berechnung der Längsspannungen werden die Steifigkeiten und Dehnungen benötigt. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Steifigkeiten und Verformungen zu ermitteln, bevor man die Spannungen berechnet. Man setzt hier voraus, dass der Mehrschichtverbund frei von Spannungen ist, solange auf ihn keine äußeren Kräfte einwirken.

Man kann die Zahl der Schichten beliebig erhöhen. Hier als Beispiel ein Mehrschichtverbund von drei Schichten angenommen. Um das elastische Verhalten eines Mehrschichtverbundes zu beschreiben, werden zuerst die Bezugskordinaten festgelegt.

Da hier alle Schichten des Verbundes aus UD-Laminaten bestehen, wird die x- Achse in die Symmetrierichtung des Verbundes eingesetzt, womit die x- Achse Orthotropieachse wird. Bei unsymmetrischen Querschnitten kann die Höhenordinate beliebig gewählt werden, was bei symmetrischen Querschnitten sinnvollerweise in die Neutralfaser (Mittlebene) eingesetzt wird.

Wir wollen die Schubspannungen am Beispiel eines unsymmetrischen Querschnittes ermitteln und setzen die z- Achse an die untere Seite des Verbundes. Die Lagen der Einzelschichten werden durch den Abstand z_k ihrer jeweiligen Neutralfaser von der Bezugsebene definiert.

Da die Gesamtbelastung des Verbundes gleich der Summe der Einzelschichten ist, ergeben sich die Verbundsteifigkeiten C als Summe der Einzelschichtsteifigkeiten (Wiedemann, 1986).

$$\begin{aligned} C_s &= \sum C_{sk} \text{ (Scheibenquadrant)} \\ C_s &= \sum z_k C_{sk} \text{ (Koppelquadrant)} \\ C_s &= \sum (C_{pk} + z_k^2 C_{sk}) \text{ (Plattenquadrant)} \end{aligned} \quad (1)$$

Deswegen müssen zuerst die Einzelschichtsteifigkeiten berechnet werden. Die Steifigkeiten a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , a_{33} werden mit vorgegebenen Materialdaten in Tabelle 1 wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\parallel\perp}} \left(\frac{N}{\text{mm}^2} \right) \\ a_{12} &\equiv \frac{\nu_{\perp\parallel} E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\parallel\perp}} = a_{21} \\ a_{22} &\equiv \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \nu_{\parallel\perp}} \\ a_{33} &= G_{\epsilon} \end{aligned} \quad (2)$$

Da die Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist, sind die Steifigkeiten a_{12} und a_{21} gleich. Man bestimmt die Steifigkeiten bezüglich des Koordinatensystems für die 1. Schicht:

$$\begin{aligned} c_{11,1} &= a_{11,1} t_1 \left(\frac{N}{mm} \right) \\ c_{14,1} &= a_{11,1} t_1 \left(\frac{t_1}{2} \right) (N) \\ c_{44,1} &= a_{11,1} \frac{t_1^3}{12} + \left(\frac{t_1}{2} \right)^2 a_{11,1} t_1 (Nmm) \end{aligned} \quad (3)$$

Für weitere Steifigkeiten siehe Anhang.

Wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix sind die folgenden Steifigkeiten identisch:

$$\begin{aligned} c_{12} = c_{21}, \quad c_{14} = c_{41}, \quad c_{15} = c_{24} = c_{51} = c_{42}, \\ c_{25} = c_{52}, \quad c_{36} = c_{63}, \quad c_{45} = c_{54} \end{aligned}$$

Für die folgenden Schichten ändern sich die Steifigkeiten entsprechen der Schichtindizierung. Man muss für jede Schicht mit den eigenen Materialdaten der jeweiligen Schicht multiplizieren und den Abstand von eigener Symmetrieebene zum Koordinatensystem beachten.

Mit den folgenden Größen normieren wir die Steifigkeiten:

$$\frac{t_1}{t} = f_1 ; \quad \frac{t_2}{t} = f_2 ; \quad \frac{t_3}{t} = f_3$$

Damit erhalten wir die Steifigkeiten in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{c_{14}}{t^2} &= a_{11,1} \frac{f_1^2}{2} \left(\frac{N}{mm^2} \right) \\ \frac{c_{44}}{t^3} &= a_{11,1} \frac{f_1^3}{3} \left(\frac{N}{mm^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Für die Bestimmung der Steifigkeiten des Verbundes sind die Schichtsteifigkeiten aufzuaddieren.

$$\begin{aligned} c_{11,ges} &= c_{11,1} + c_{11,2} + c_{11,3} \\ c_{14,ges} &= c_{14,1} + c_{14,2} + c_{14,3} \\ c_{44,ges} &= c_{44,1} + c_{44,2} + c_{44,3} \end{aligned} \quad (5)$$

Mit Hilfe der folgenden Abkürzungen können wir die Verbundsteifigkeiten kurz zusammenfassen:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{f_1}{2} \\ d_2 &= f_1 + \frac{f_2}{2} \\ d_3 &= f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} \\ \frac{c_{44}}{t} &= \sum a_{11j} \left(\frac{f_j^3}{12} + d_j^2 f_j \right) = c_{44,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Damit hat man die Steifigkeitsmatrix für den Mehrschichtverbund:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11,g} & c_{12,g} & 0 & c_{14,g} & c_{15,g} & 0 \\ c_{21,g} & c_{22,g} & 0 & c_{24,g} & c_{25,g} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33,g} & 0 & 0 & c_{36,g} \\ c_{41,g} & c_{42,g} & 0 & c_{44,g} & c_{45,g} & 0 \\ c_{51,g} & c_{52,g} & 0 & c_{54,g} & c_{55,g} & 0 \\ 0 & 0 & c_{63,g} & 0 & 0 & c_{66,g} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Durch die Inversion der Steifigkeitsmatrix erhalten wir die Nachgiebigkeitsmatrix des Verbundes:

$$\begin{aligned} C^+ &= \frac{C^+}{\det C} \\ C_{ij}^+ &= \frac{C_{ij}^T}{\det C} \end{aligned} \quad (8)$$

Die Inversion der Steifigkeitsmatrix erfolgte durch ein Matlab Programm (Gedikbey, 2004). Mit diesen Nachgiebigkeiten können wir erforderliche Dehnungen und Krümmungen ermitteln.

2. 2. Bestimmung der Verformungen des Verbundes

Die Verformungen des Verbundes ϵ_x, ϵ_y in x- und y-Richtung werden beschrieben durch die Verzerrungen der Bezugsebene $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}$ und durch die Krümmungen χ_x, χ_y .

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{x0} + z\chi_x \\ \epsilon_y &= \epsilon_{y0} + z\chi_y \end{aligned} \quad (9)$$

Für die Bestimmung der Verzerrungen $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}$ und Krümmungen χ_x, χ_y des mehrschichtigen Biegeträgers geht man von dem Elastizitätsgesetz des orthotropen Elementes aus.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{xy0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^+ & c_{12}^+ & 0 & c_{14}^+ & c_{15}^+ & 0 \\ c_{21}^+ & c_{22}^+ & 0 & c_{24}^+ & c_{25}^+ & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^+ & 0 & 0 & c_{36}^+ \\ c_{41}^+ & c_{42}^+ & 0 & c_{44}^+ & c_{45}^+ & 0 \\ c_{51}^+ & c_{52}^+ & 0 & c_{54}^+ & c_{55}^+ & 0 \\ 0 & 0 & c_{63}^+ & 0 & 0 & c_{66}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Da man die unendlich breite Fläche angenommen hat, existieren n_x , n_y , n_{xy} , χ_y und m_{xy} nicht. Durch die aus dem Gleichungssystem erhaltenen Gleichungen können wir die Gesamtdehnung in Abhängigkeit von z berechnen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z\chi_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{y0} = \left(c_{15}^+ - c_{25}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) m_x \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_{x0} + z\chi_x \\ \varepsilon_x &= \left(c_{14}^+ - c_{15}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) m_x \\ &+ z \left(c_{44}^+ - \frac{c_{45}^{+2}}{c_{55}^+} \right) m_x \end{aligned} \quad (11)$$

3. BESTIMMUNG DER SPANNUNGEN

3. 1. Normalspannungen

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Aus der 1. Gleichung können wir die Normalspannungen für jede einzelne Schicht berechnen:

$$\sigma_x(z) = a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y \quad (13)$$

Obwohl die Dehnungen linear über die Dicke verlaufen, springen dagegen die Spannungen entsprechend der Steifigkeiten von Schicht zu Schicht. Daher müssen die Steifigkeiten a_{11} , a_{12} der Schichten berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \sigma_x(z) &= a_{11} m_x \left[\left(c_{14}^+ + c_{15}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) + z \left(c_{44}^+ - \frac{c_{45}^{+2}}{c_{55}^+} \right) \right] \\ &+ a_{12} \left(c_{15}^+ - c_{25}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) m_x \end{aligned} \quad (14)$$

3. 2. Schubspannungen

Bei der Berechnung der Schubspannungen nutzt man die Gleichgewichtsaussage aus:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

Aus dieser Gleichgewichtsbedingung geht hervor, dass die Schub- und Normalspannungen miteinander gekoppelt sind; d.h., die Änderung der Normalspannungen in x -Richtung ist gleich der Änderung der Schubspannungen in z -Richtung mit negativem Vorzeichen.

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\int \sigma_x' d_z ; \\ \text{mit } m_x &= n_{xz} x \\ m_x' &= n_{xz} \\ \tau_{xz} &= -n_{xz} \int \left\{ a_{11} \left[\left(c_{14}^+ - c_{15}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) + z \left(c_{44}^+ - \frac{c_{45}^{+2}}{c_{55}^+} \right) \right] \right. \\ &\left. + a_{12} \left(c_{15}^+ - c_{25}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) \right\} d_z \end{aligned} \quad (16)$$

Die Klammerausdrücke werden zur Vereinfachung abgekürzt:

$$\begin{aligned} A &= \left(c_{14}^+ - c_{15}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) \\ B &= \left(c_{44}^+ - \frac{c_{45}^{+2}}{c_{55}^+} \right) \\ C &= \left(c_{15}^+ - c_{25}^+ \frac{c_{45}^+}{c_{55}^+} \right) \\ \tau_{xz} &= -n_{xz} \int \{ a_{11} [A + zB] + a_{12} C \} d_z \end{aligned} \quad (17)$$

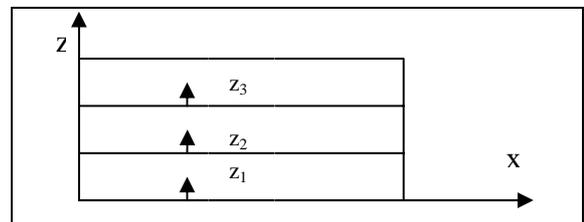


Bild 1. Einführung der Ortskoordinaten

Einfachheit halber werden die Ortskoordinaten z_1 , z_2 , z_3 eingeführt (Bild 1):

$$\begin{aligned} z = z_1 = f_1 & \quad 0 \leq z_1 \leq f_1 \\ z = z_2 + f_1 & \quad f_1 \leq z_2 \leq f_2 \\ z = f_1 + f_2 + z_3 & \quad f_1 + f_2 \leq z_3 \leq f_3 \end{aligned} \quad (18)$$

Die Gleichung (15) integriert man über einzelne Schichten. Die Integrationskonstanten werden durch die Rand- und Übergangsbedingungen so bestimmt, dass die Schubspannungen in den Schichtübergängen miteinander übereinstimmen und an den Außenflächen verschwinden.

Mit der Rand- und den Übergangsbedingungen erhält man die Schubspannungen bezüglich jeder Schicht (siehe Anhang).

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(z_1 = 0) &= 0 \\ \tau_{xz}(z_1 = f_1) &= \tau_{xz}(z_2 = 0) \\ \tau_{xz}(z_2 = f_2) &= \tau_{xz}(z_3 = 0) \end{aligned}$$

Die Querkraft n_{xz} ist bei einer vorgegebener äußeren Belastung (Q) aus der Gleichgewichtsforderung zu berechnen (Bild 2):

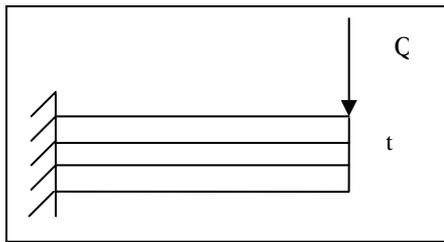


Bild 2. Biegung eines Mehrschichtträgers infolge einer äußeren Belastung.

$$\begin{aligned} Q &= n_{xz} \cdot t \\ n_{xz} &= \frac{Q}{t} \left(\frac{N}{mm} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Wir haben bei der Berechnung $n_{xz} = 50 \text{ N/mm}$ angenommen.

Tabelle 1. Materialkennwerte von Zugversuch (Taş, 1989)

Material	GFK-UD	CFK-UD	AFK-UD
$E_{\parallel z}$	61400	157000	52100
$E_{\perp z}$	32400	11000	8140
$\nu_{\parallel z}$	0.283	0.360	0.270
$\nu_{\perp z}$	0.212	0.0322	0.061
$G_{\parallel z}$	4360	4600	3600
Φ	0.74	0.68	0.47

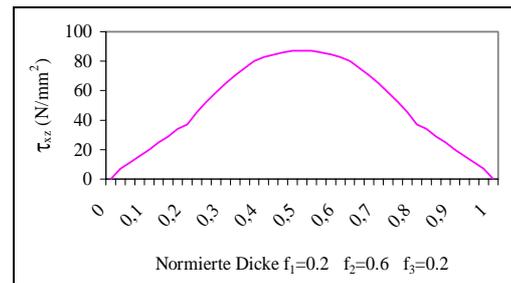
E, $G_{\parallel z}$ in N/mm^2 ; Φ und ν dimensionslos

4. ERGEBNISSE DER UNTERSUCHTEN HYBRIDKOMBINATIONEN UND DISKUSSION

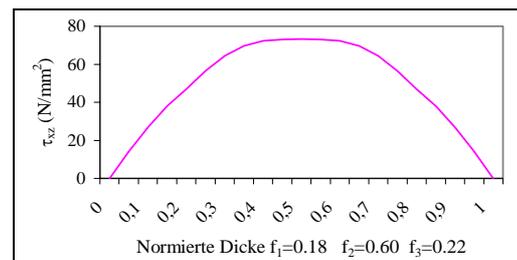
In den Gleichungen (17-19) sind die Schubspannungen als Funktion der Schichtdickenverhältnisse angegeben. Die maximalen Schubspannungen treten in der Neutralfaser auf. Mit den in Tabelle 1 angegebenen Materialkennwerten wurde mit Hilfe eines analytischen Programms in Fortran 77 (Engeln-Müllges u. Reuter, 1988) die Schubspannungen folgender Kombinationen gerechnet und in Bild 3 von a bis d graphisch dargestellt.

Theoretisch gerechnete Hybridkombinationen sind:

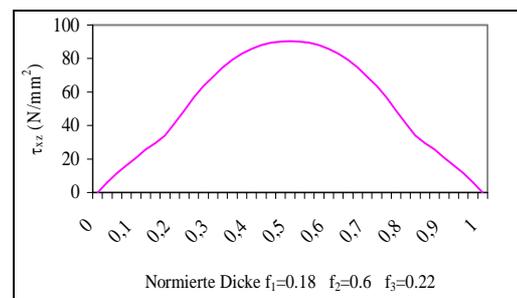
- GFK/CFK/GFK-Kombination,
- GFK/CFK/AFK-Kombination,
- CFK/GFK/CFK-Kombination,
- GFK/AFK/CFK/AFK/GFK-Kombination.



a)



b)



c)

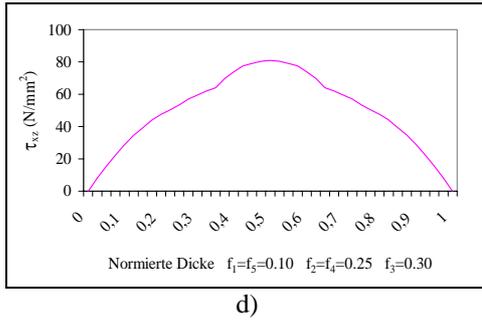


Bild 3: Theoretisch ermittelte Schubspannungen der untersuchten Hybridkombinationen von a bis d.

Es handelt sich um zwei Arten von Schubspannungen:

Intralaminare Schubspannungen,
Interlaminare Schubspannungen.

Es kann sich um einen Verbund handeln, dessen Schichten gleiche Elastizitätseigenschaften haben und einen Mehrschichtverbund, dessen Schichten verschiedene Elastizitätseigenschaften besitzen. Hier interessiert uns als interlaminare Schubspannung;

- Bei einem Verbund; zwischen zwei Lagen,
- Bei einem Mehrschichtverbund; zwischen den Schichten.

Die maximale Schubspannung stellt sich in der Neutralfaser des Trägers ein. Da die Übergangsbereiche die kritischen Punkten darstellen, muss man bei der Auslegung der Schichtdicken Aufmerksamkeit schenken. Es wäre eine Lösungsmöglichkeit, bei solchen dreifachen Kombinationen äußere Schichten möglichst klein zu halten.

5. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Bei der Auslegung der Hybridkombinationen muss darauf beachtet werden, dass die maximale Schubspannung nicht in Verbindungsebene einstellt.

Die größten interlaminaren Schubspannungen treten bei Dickenverhältnissen auf:

- GFK/CFK/GFK: 0,2 – 0,6 – 0,2
CFK/GFK/CFK: 0,4 – 0,2 – 0,4
GFK/CFK/AFK: 0,18 – 0,6 – 0,22
GFK/AFK/CFK/AFK/GFK: 0,1–0,25–0,3–0,25– 0,1

Für Biegeträgern oder Blattfeder mit hoher elastischer Energieaufnahme empfehlen sich Hybridkombinationen aus Kohlefaserkunststoff

(CFK) innen und Glasfaserkunststoff (GFK) außen oder anderen Werkstoffen wie Aramidfaser.

6. BEZEICHNUNGEN

- a : Kerbenabstand
a₁₁ bis a₃₃: Elastizitätsmodul
b : Breite
c₁₁ bis c₃₃: Scheibensteifigkeiten
c₁₄ bis c₃₆: Koppelsteifigkeiten
c₄₄ bis c₆₆: Plattensteifigkeiten
c_{ij,g} : Gesamtsteifigkeiten des Verbundes
c⁺_{ij} : Nachgiebigkeiten des Verbundes
C : Steifigkeitsmatrix allgemein
C_s : deren Scheibenquadrant
C_k : deren Koppelquadrant
C_p : deren Plattenquadrant
C^T : Nachgiebigkeitsmatrix
C^T : Transponierte Steifigkeitsmatrix
d : Kerbbreite
f_j : normierte Schichtdicke
i,j,k : nummerierindizes
m_x : Masse
n_x : Kraft am Flächenelement
n_{xz} : Querkraft am Flächenelement
t : Dicke des Verbundes
t_i : Dicke der Schicht
t_{ges} : Gesamtdicke
z_k : Abstand der Schicht k von Bezugsebene
z_n : Neutralfaser
v_f : Faservolumen
v : Querkontraktionszahl
γ_f : spezifisches Gewicht
χ : Verkrümmung des Verbundes
UD : unidirektional
GFK : Glasfaserkunststoff
CFK : Kohlefaserkunststoff
AFK : Aramidfaser
Φ : Faservolumenanteil
G_≠ : Schubmodul
≡_⊥ : parallel - senkrecht
σ_x : Normalspannung
τ_{xz} : Schubspannung

7. ANHANG

Die Steifigkeiten bezüglich des Koordinatensystems für die 1. Schicht:

$$c_{11,1} = a_{11,1} t_1 \left(\frac{N}{mm} \right)$$

$$c_{14,1} = a_{11,1} t_1 \left(\frac{t_1}{2} \right) (N)$$

$$c_{44,1} = a_{11,1} \frac{t_1^3}{12} + \left(\frac{t_1}{2} \right)^2 a_{11,1} t_1 (Nmm)$$

$$c_{12,1} = a_{12,1} t_1 \left(\frac{N}{mm} \right)$$

$$c_{15,1} = a_{12,1} t_1 \left(\frac{t_1}{2} \right) (N)$$

$$c_{45,1} = a_{12,1} \frac{t_1^3}{12} + \left(\frac{t_1}{2} \right)^2 a_{12,1} t_1 (Nmm)$$

$$c_{22,1} = a_{12,1} t_1 \left(\frac{N}{mm} \right)$$

$$c_{25,1} = a_{22,1} t_1 \left(\frac{t_1}{2} \right) (N)$$

$$c_{55,1} = a_{22,1} \frac{t_1^3}{12} + \left(\frac{t_1}{2} \right)^2 a_{22,1} t_1 (Nmm)$$

$$c_{33,1} = a_{33,1} t_1 \left(\frac{N}{mm} \right)$$

$$c_{36,1} = a_{33,1} t_1 \left(\frac{t_1}{2} \right) (N)$$

$$c_{66,1} = a_{33,1} \frac{t_1^3}{12} + \left(\frac{t_1}{2} \right)^2 a_{33,1} t_1 (Nmm)$$

Die Verbundsteifigkeiten:

$$\frac{c_{11}}{t} = \sum a_{11j} f_j = c_{11,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{14}}{t} = \sum a_{14j} d_j f_j = c_{14,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{12}}{t} = \sum a_{12j} f_j = c_{12,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{15}}{t} = \sum a_{15j} d_j f_j = c_{15,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{22}}{t} = \sum a_{22j} f_j = c_{22,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{25}}{t} = \sum a_{25j} d_j f_j = c_{25,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{33}}{t} = \sum a_{33j} f_j = c_{33,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{36}}{t} = \sum a_{36j} d_j f_j = c_{36,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{44}}{t} = \sum a_{11j} \left(\frac{f_j^3}{12} + d_j^2 f_j \right) = c_{44,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{45}}{t} = \sum a_{12j} \left(\frac{f_j^3}{12} + d_j^2 f_j \right) = c_{45,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{55}}{t} = \sum a_{22j} \left(\frac{f_j^3}{12} + d_j^2 f_j \right) = c_{55,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

$$\frac{c_{66}}{t} = \sum a_{33j} \left(\frac{f_j^3}{12} + d_j^2 f_j \right) = c_{66,g} \left(\frac{N}{mm^2} \right)$$

Schubspannungen für jede einzelne Schicht:

$$\tau_{xz}(z_1) = -n_{xz} \begin{bmatrix} a_{11,1} \left(A + z_1 \frac{B}{2} \right) \\ + a_{12,1} C \end{bmatrix} z_1 \quad (17)$$

$$\tau_{xz}(z_2) = -n_{xz} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a_{11,2} A + B \left(f_1 + \frac{z_2}{2} \right) \\ + a_{12,2} C \end{array} \right] z_2 \\ + \left[\begin{array}{l} a_{11,1} \left(A + B \frac{f_1}{2} \right) \\ + a_{12,1} C \end{array} \right] f_1 \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$\tau_{xz}(z_3) = -n_{xz} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a_{11,3} A + B \left(f_1 + f_2 + \frac{z_3}{2} \right) \\ + a_{12,3} C \end{array} \right] z_3 \\ + \left[\begin{array}{l} a_{11,2} \left(A + B \left(f_1 + \frac{f_2}{2} \right) \right) \\ + a_{12,2} C \end{array} \right] f_2 \\ + \left[\begin{array}{l} a_{11,1} \left(A + B \frac{f_1}{2} \right) \\ + a_{12,1} C \end{array} \right] f_1 \end{array} \right\} \quad (19)$$

8. LITERATURVERZEICHNIS

Chen, J. 2000. Ermittlung der Interlaminaren Bruchzähigkeit von Faserverbundwerkstoffen, Wissenschaft und Technik Verlag Berlin.

Engeln-Müllges, G., Reuter, F. 1988. Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit Standart-Fortran 77-Programmen, Wissenschaftsverlag Mannheim.

Gedikbey, B. 2004. Örneklerle Matlab ve Simulink, GYTE Mühendislik Fakültesi, Gebze – Kocaeli.

Geiss, G. 2001. Einfluss von Tieftemperatur und Wasserstoff auf das Versagensverhalten von Glasfaser-Verbundwerkstoffen unter statischer und zyklischer Belastung, Genehmigte Dissertation, Universität Karlsruhe. <http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/cgi-bin/psview?document=fzk/6581>.

Taş, Z. 1989. Interlaminare Schubfestigkeit mehrschichtiger Biegeträger in Faserhybridbauweise, Diplomarbeit, Institut für Luft- u.

Raumfahrttechnik, Technische Universität Berlin.

Tousen-Abdelwahed, M. M. 1984. Untersuchungen zur Faserlaminat + Stahl – Hybridbauweise für lichte Biege- und Torsionsträger, Genehmigte Dissertation, Technische Universität Berlin.

Wiedemann, J. 1986. Leichtbau Band 1: Elemente, Springer Verlag, Berlin.

Wissmann, J. W. 1976. Entwurf und Optimierung von Faserverstärkten Strukturen unter Mehrfachen Belastung, Technische Hochschule, Darmstadt.