

ZEMİN RİJİTLİĞİNİN TEK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN SERBEST TİTREŞİMİNE ETKİSİ

Oktay DEMİRDAĞ

Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Buca/İzmir

Geliş Tarihi : 12.10.2004

ÖZET

Çerçevelerin dinamik analizinde hesap kolaylığı açısından, çerçevelerin zemine bağlandığı noktaların mafsallı veya tam ankastre olduğu, kat kütlelerinin kat seviyelerinde topaklandığı, kolonların yayılı kütlelerinin ve deformasyonunun ihmal edildiği kabullerine sık rastlanmaktadır. Ancak uygulamada çoğu kez çerçevelerin zemine bağlandığı noktalar, zeminin elastik davranışı nedeni ile bir miktar dönebilmektedir. Bu durumda çerçevenin zemine bağlandığı noktaya dönmeye karşı elastik yay yerleştirilerek yarı-rijit mesnet davranışı modellenebilir. Bu çalışmada, zemine yarı-rijit bağlı tek serbestlik dereceli (TSD) sistemlerin serbest titreşim analizi kolonların yayılı kütleleri ve P- δ etkisi dikkate alınarak yapılmış ve açısal frekansları elde edilmiştir. Kolon tabanındaki dönme yay sabitindeki ve eksenel kuvvet değerindeki değişimin açısal frekans değerleri üzerindeki etkileri tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : Zemin fleksibilitesi, TSD sistem, Serbest titreşim, P- δ etkisi

EFFECT OF SOIL FLEXIBILITY ON FREE VIBRATION OF SINGLE DEGREE OF FREEDOM SYSTEMS

The assumptions of frame supports being hinged or fully rigid; storey masses being concentrated at the floor levels; distributed masses and deformations of the columns being neglected are frequently seen in dynamic analysis of frames because of less effort in calculation. In practice, however, column bases of frames may usually rotate and translate a little due to elastic behavior of soil. In this case, semi-rigid support behavior can be modeled using elastic spring against rotation at the column bases of frames. In this study, free vibration of semi-rigid supported single degree of freedom (SDOF) systems is studied including distributed mass and P- δ effect of the columns and natural frequencies are obtained. Effects on frequency values of rotational spring coefficients at the column base and of axial force are presented in tables and graphs.

Key Words : Soil flexibility, SDOF system, Free vibration, P- δ effect

1. GİRİŞ

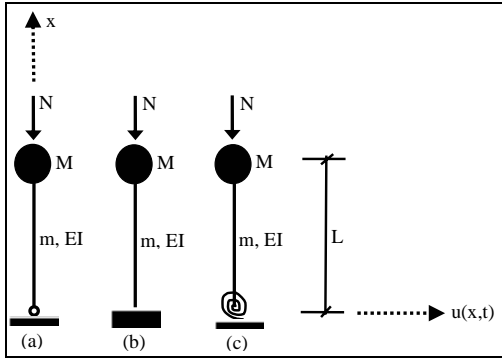
Tek serbestlik dereceli çerçevelerin serbest titreşim analizi yapılırken, yanal doğrultuda uzanan, döşeme ve kiriş gibi, tüm taşıyıcı elemanların kütleleri ve rijitlikleri toplamı, kolon ve perde gibi düşey taşıyıcı elemanların toplam kütleleri ve rijitliklerinden yüksek olduğundan genellikle kolonların yayılı kütleleri ihmal edilir. Fiziksel sistemlerin matematiksel hesap modelinin ayrık parametreliliği olarak kurulması, hesap

kolaylığı sağlaması sebebi ile literatürde çok sık karşılaşılan bir yöntemdir. Ancak bu tür bir modelleme taşıyıcı sistemlerin gerçek davranışını her zaman doğru temsil etmeyebilir. Bu gibi durumlarda en iyi yapı davranışı, sistemin sürekli olarak modellenmesi ile belirlenecektir. Bu çalışmada çerçeve kolonları, yayılı kütleleri ve rijitliği dikkate alınarak sürekli sistem olarak modellenmiş ve P- δ etkisi de dikkate alınarak ikinci mertebe teorisi geçerli kılınmıştır.

Ayrıca çerçevelerin dinamik analizinde genellikle rijit mesnet kabulü yapılır (Şekil 1b). Bu kabuller, matematiksel hesap modelinin dinamik analizini kolaylaştırmaktadır. Çerçevelerin zemine bağlandığı noktaların davranışı yarı-rijit olarak mesnetlenmiş modele daha uygundur. Çalışmada tek katlı, tek açıklıklı zemine yarı-rijit bağlanmış çerçevenin dinamik hesap modeli (Şekil 1c)'de sunulmuştur. Hesap modelindeki elastik çubuğun üst ucunda çerçevenin kat kütlesi topaklanmış, alt ucu ise yarı-rijit mesnet davranışını temsil eden dönmeye karşı elastik yay ile mesnetlenmiştir.

Bu konu ile ilgili literatürde topaklanmış kütleli kirişlerin titreşimi (Maurizi and Belles, 1991-1992; Chai, 1993; Low et al., 1993; Low, 1994, Gürgöze, 1995), elastik mesnetli ve topaklanmış kütleli kirişlerin lineer titreşimi (Laura, 1975; Goel, 1976; Bapat, 1987; DeRosa, 1996) ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur. Ayrıca Glabisz, statik yükleme etkisindeki, sadece ötelenmeye karşı elastik mesnetli, sürekli ve doğrusal çubukların titreşimini ve stabilitesini incelemiştir (Glabisz, 1999). Güler, zemin fleksibilitesinin kule tipi yapıların serbest titreşimi üzerindeki etkisini Bernoulli-Euler modeliyle araştırmıştır (Güler, 1996).

Bu çalışmada, eksenel kuvvetin kolon boyunca sabit kaldığı, yarı-rijit mesnedin dönmeye karşı elastik yay ile modellendiği, ikinci mertbe teorisinin geçerli olduğu, TSD sistemin ve yayın doğrusal-elastik davranışını kabul edilmiştir.



Şekil 1a. Mafsal mesnetli TSD sisteme ait matematiksel hesap modeli; b: Rijit mesnetli TSD sisteme ait matematiksel hesap modeli c: Yarı-rijit mesnetli TSD sisteme ait matematiksel hesap modeli

2. MATERYAL VE METOT

2. 1. Diferansiyel Hareket Denklemi ve Çözümü

Şekil 1 (a, b, c)'deki matematiksel hesap modelinin sınır şartlarından bağımsız dördüncü mertbeden

diferansiyel hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir (Clough and Penzien, 1993).

$$\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \frac{N}{EI} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{m}{EI} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

($0 \leq x \leq L$)

Burada; x, konumu; t, zamanı; u(x,t), konum ve zaman parametrelerine bağlı deplasman fonksiyonunu; N, eksenel basınç kuvvetini; EI, m ve L, kolonun sırasıyla, eğilme rijitliğini, yayılı kütlelerini ve boyunu göstermektedir. (1) numaralı diferansiyel denklemin çözümü için (2)'de verilen dönüşüm kullanılarak değişkenlere ayırma yöntemi uygulanmıştır (McOwen, 1996).

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot \sin(\omega t) \quad (2)$$

Burada X(x) ve T(t) sırasıyla, şekil ve zaman fonksiyonlarını; ω , açısal frekansı göstermektedir. (2) numaralı denklemin konum ve zamana göre ardışık türevleri alınır ve (1) numaralı denklemde yerine konur ise aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\left(X^{IV} + \frac{N}{EI} X^{II} - \frac{m \cdot \omega^2}{EI} X \right) \sin(\omega t) = 0 \quad (3)$$

(3) numaralı diferansiyel denklemin nontrivial çözümü için $\sin(\omega t) \neq 0$ şartının sağlanması gerektiğinden aşağıdaki bağıntı yazılır.

$$\left(D^4 + \frac{N}{EI} D^2 - \frac{m\omega^2}{EI} \right) X = 0 \quad (4)$$

Burada; $D = \frac{\partial}{\partial x}$ dir. (5) de verilen dört şart her zaman sağlanacağından (4) numaralı diferansiyel denklemin çözümü (6) numaralı bağıntıdaki gibi olacaktır.

$$1) \Delta > 0 \quad 2) \sqrt{\Delta} > \frac{N}{EI} \quad 3) n_1 > 0$$

$$4) n_2 < 0 \quad (5)$$

$$X(x) = C_1 \text{sh}(m_1 x) + C_2 \text{ch}(m_1 x) + C_3 \sin(m_2 x) + C_4 \cos(m_2 x) \quad (6)$$

$$\text{Burada; } \Delta = \left(\frac{N}{EI} \right)^2 + 4 \frac{m\omega^2}{EI},$$

$$n_1 = -\frac{N}{2EI} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad n_2 = -\frac{N}{2EI} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

$$m_1 = \sqrt{n_1}, m_2 = \sqrt{n_2}$$

ve

C_1, C_2, C_3, C_4 integrasyon sabitleridir.

Sonuç olarak, aksel basınç kuvveti etkisindeki kolonun eğilme deformasyonu ve P- δ etkileri dikkate alınarak yazılan diferansiyel denkleminin genel çözümü olan deplasman fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$u(x, t) = \left[C_1 \text{sh}(m_1 x) + C_2 \text{ch}(m_1 x) + C_3 \sin(m_2 x) + C_4 \cos(m_2 x) \right] \sin(\omega t) \quad (7)$$

2. 2. Sınır Şartları

Şekil 1 (a, b ve c'deki modeller için kullanılacak dört adet sınır şartı sırasıyla, (8), (9) ve (10) numaralı bağıntılarda verilmiştir.

$$\left. \begin{array}{l} 1) u(0, t) = 0 \\ 2) M(0, t) = 0 \Rightarrow u''(0, t) = 0 \\ 3) M(L, t) = 0 \Rightarrow u''(L, t) = 0 \\ 4) V(L, t) = -M \cdot \ddot{u}(L, t) \Rightarrow u'''(L, t) + \frac{M\omega^2}{EI} u(L, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) u(0, t) = 0 \\ 2) \theta(0, t) = 0 \Rightarrow u'(0, t) = 0 \\ 3) M(L, t) = 0 \Rightarrow u''(L, t) = 0 \\ 4) V(L, t) = -M \cdot \ddot{u}(L, t) \Rightarrow u'''(L, t) + \frac{M\omega^2}{EI} u(L, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) u(0, t) = 0 \\ 2) M(0, t) = -K_\theta \cdot \theta(0, t) \Rightarrow u''(0, t) - \frac{K_\theta}{EI} u'(0, t) = 0 \\ 3) M(L, t) = 0 \Rightarrow u''(L, t) = 0 \\ 4) V(L, t) = -M \cdot \ddot{u}(L, t) \Rightarrow u'''(L, t) + \frac{M\omega^2}{EI} u(L, t) = 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Burada; $\theta(x, t)$, $M(x, t)$ ve $V(x, t)$ sırasıyla, kesit dönmesi, moment ve kesme kuvveti fonksiyonlarını; K_θ , dönme yay sabitini; çizgiler konuma, noktalar zamana göre türev mertebelerini göstermektedir.

2. 3. Açısız Frekansların Hesaplanması

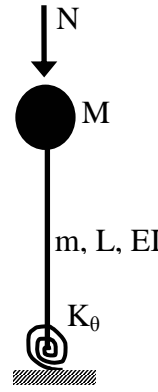
(8), (9) ve (10) numaralı sınır şartları kullanılarak her bir model için dört adet lineer denklem takımı elde edilmiş ve matris formda aşağıda sunulmuştur.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow [f] \cdot \{C\} = \{0\} \quad (11)$$

Burada; $[f]$, katsayılar matrisidir ve (11) numaralı denklem takımının nontrivial çözümü için katsayılar matrisinin determinanı sıfır olmalıdır. Determinantın sıfıra eşitlenmesi suretiyle elde edilen fonksiyon, (Şekil 1)'de verilen sistemin frekans denklemidir. Bu denklemin kökleri sistemin açısız frekanslarına karşılık gelir. Frekans denkleminin köklerini hesaplamak için kullanılan basit ve yaygın metotlardan birisi sekant metodudur (Low, 1991). Bu metotta, belli bir ω değerleri aralığı için determinant değerleri elde edilir. Ardışık determinant değerleri arasında işaret değişimi sağlayan ω değeri frekans denkleminin bir köküdür ve sistemin açısız frekansına karşılık gelmektedir.

2. 4. Sayısal Uygulama

Bu çalışmada sayısal uygulama olarak seçilen tek serbestlik dereceli, zemine yarı-rijit bağlı sisteme ait dinamik hesap modelinin fiziksel özellikleri aşağıda sunulmuştur.



Çubuk yayılı kütlesi:
 $m=1.7982 \text{ ts}^2/\text{m}^2$
 Çubuk yüksekliği: $L=3 \text{ m}$
 Topaklanmış kat kütlesi:
 $M=53.946 \text{ ts}^2/\text{m}$
 Aksel basınç kuvveti: $N=0-5000-10000 \text{ t}$
 Dönme yayı sabiti: $K_\theta=0-10^3-10^5-10^7-10^9-10^{10} \text{ tm}$
 Çubuk eğilme rijitliği:
 1. model için $EI=198750 \text{ tm}^2$
 2. model için $EI=100000 \text{ tm}^2$
 3. model için $EI=400000 \text{ tm}^2$

Mesnetlenme şartları farklı (Şekil 1)'deki 3 sistemin farklı eğilme rijitliklerine sahip üç modeli için ilk üç moda ait frekanslar değerleri, sisteme etkiyen aksel basınç kuvvetinin ve dönme yay sabitinin yukarıda verilen artan değerleri için sekant metoduna dayanan bir bilgisayar algoritması ile hesaplanmış; 1. model için Tablo 1, 2. model için Tablo 2 ve 3. model için Tablo 3'de sunulmuştur.

Eğilme rijitliği 198750 tm^2 olan 1. modelin normalleştirilmiş frekans değerlerinin, farklı aksel kuvvet değerleri için, dönme yay sabitindeki artışa bağlı değişimi 1. mod, 2. mod ve 3. mod için sırasıyla, Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4'deki grafiklerle sunulmuştur. Aksel kuvvet değerindeki artışın

frekans değerlerinde meydana getirdiği azalma düşük mertebede olduğundan grafiklerde eksenel kuvvetin 5000 ve 10000 değerine karşılık gelen eğrilerde çakışma görülmüştür. Tüm uygulamalarda elde edilen frekans değerlerinin yay sabitindeki

artışa bağlı değişimi aynı formda olduğundan burada sadece 1. modelin grafikleri verilmiştir. Düşey eksendeki ω , en küçük frekans değerine göre normalize edilmiş frekans değerini göstermektedir.

Tablo 1. 1. Model TSD Sistemin Farklı Mesnet Şartları İçin İlk Üç Moda Ait Frekans Değerleri

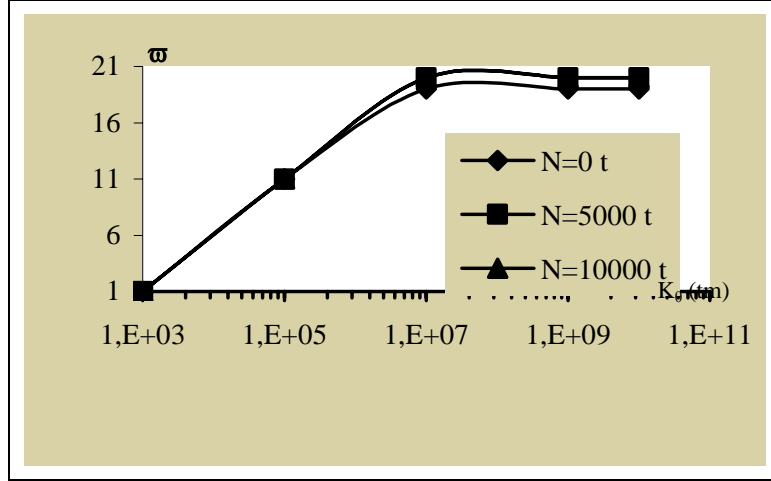
Eksenel Kuvvet N (ton)	Mod	Mesnetlenme Şekline Göre Frekans Değerleri (rd/sn)							Rijit
		Mafsalsal	Yarı-Rijit Mesnet İçin K_0 (tm.)						
			0	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{10}	
0	1	0	0	1	11	19	19	19	19
	2	368	368	368	441	565	572	572	572
	3	1461	1461	1462	1511	1826	1849	1849	1849
5000	1	0	0	1	11	20	20	20	20
	2	364	364	364	407	562	569	569	569
	3	1457	1457	1458	1507	1822	1845	1845	1845
10000	1	0	0	1	11	20	20	20	20
	2	359	359	360	404	559	566	566	566
	3	1453	1453	1454	1503	1819	1841	1842	1842

Tablo 2. 2. Model TSD Sistemin Farklı Mesnet Şartları İçin İlk Üç Moda Ait Frekans Değerleri

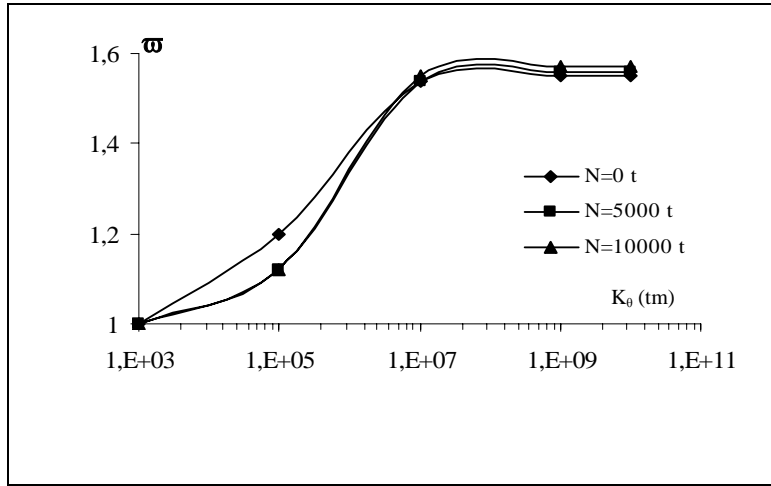
Eksenel Kuvvet N (ton)	Mod	Mesnetlenme Şekline Göre Frekans Değerleri (rd/sn)							Rijit
		Mafsalsal	Yarı-Rijit Mesnet İçin K_0 (tm.)						
			0	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{10}	
0	1	0	0	1	10	14	14	14	14
	2	261	261	261	311	403	406	406	406
	3	1037	1037	1037	1099	1303	1311	1311	1311
5000	1	0	0	1	10	14	14	14	14
	2	255	255	256	306	399	402	402	402
	3	1031	1031	1031	1093	1298	1306	1306	1306
10000	1	0	0	1	10	14	14	14	14
	2	249	249	250	301	394	397	397	397
	3	1025	1025	1025	1087	1293	1301	1301	1301

Tablo 3. 3. Model TSD Sistemin Farklı Mesnet Şartları İçin İlk Üç Moda Ait Frekans Değerleri

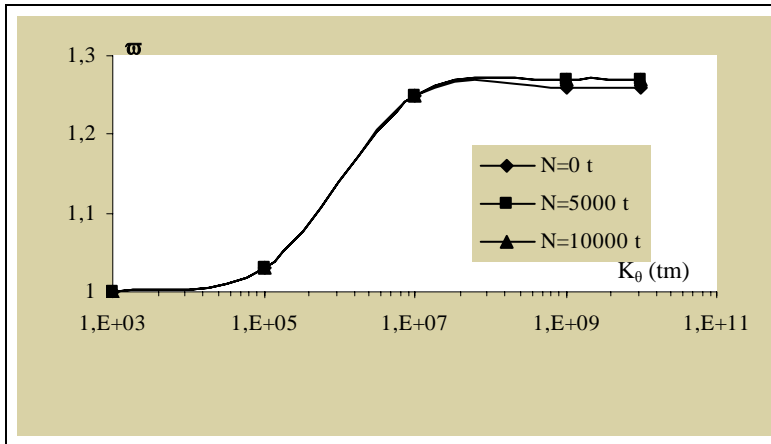
Eksenel Kuvvet N (ton)	Mod	Mesnetlenme Şekline Göre Frekans Değerleri (rd/sn)							Rijit
		Mafsalsal	Yarı-Rijit Mesnet İçin K_0 (tm.)						
			0	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{10}	
0	1	0	0	1	12	27	28	28	28
	2	522	522	522	556	792	812	812	812
	3	2074	2074	2074	2110	2560	2622	2623	2623
5000	1	0	0	1	12	27	28	28	28
	2	519	519	519	553	790	810	810	810
	3	2071	2071	2071	2108	2558	2620	2620	2621
10000	1	0	0	1	12	28	28	28	28
	2	516	516	516	551	788	808	808	808
	3	2068	2068	2068	2105	2555	2617	2618	2618



Şekil 2. 1. modelin 1. moduna ait normalize edilmiş frekans değerlerinin aksel kuvvetin 0-5000-10000 t. değerleri için dönme yay sabitine bağlı değişimi



Şekil 3. 1. modelin 2. moduna ait normalize edilmiş frekans değerlerinin aksel kuvvetin 0-5000-10000 t. değerleri için dönme yay sabitine bağlı değişimi



Şekil 4. 1. modelin 3. moduna ait normalize edilmiş frekans değerlerinin aksel kuvvetin 0-5000-10000 t. değerleri için dönme yay sabitine bağlı değişimi

2. 4. 1. Sayısal Uygulamanın Literatür İle Kıyaslanması

Çalışmada kullanılan modelin üst ucundaki topaklanmış kütle sıfır ve alt ucundaki yay sabiti teorik olarak sonsuz (10^{10}) alınarak, hazırlanan bilgisayar programı ile $N=0$ için elde edilen frekans değerleri, literatürde verilen (Paz, 1997) sürekli kütleli konsol çubuğun frekans değerleri ile ($\omega_1=129$, $\omega_2=813$, $\omega_3=2279$) aynı bulunmuştur. Benzer şekilde, hem topaklanmış kütle hem de yay sabiti değerleri için sonsuz değeri kullanıldığında $N=0$ için hesaplanan frekans değerleri, aynı literatürdeki bir ucu ankastre bir ucu basit mesnetli sürekli kütleli çubuğun frekans değerleri ile ($\omega_1=569$, $\omega_2=1845$, $\omega_3=3850$) aynı çıkmıştır. Yay sabitinin sıfır kılınıp topaklanmış kütle için teorik olarak sonsuz değeri için basit mesnetli sürekli kütleli çubuğun frekans değerleri ($\omega_1=364$, $\omega_2=1458$, $\omega_3=3281$) elde edilmiştir.

3. SONUÇ

Yapılan tüm sayısal uygulamalar sonucunda, $P-\delta$ etkisinin dikkate alınmasına ve eksenel kuvvet değerindeki artışa bağlı olarak serbest titreşimin ilk üç moduna ait frekans değerlerinde düşük mertebede bir azalma meydana gelmiştir. Bu sebeple ikinci mertebe teorisine göre analizin daha gerçekçi sonuçlar vereceği görülmüştür. Yarı-rijit mesnet için yapılan analizde dönme yay sabiti için sıfır değeri ($K_0=0$) alındığında mafsallı mesnetli sistemin, sonsuz değeri ($K_0=10^{10}$) alındığında ise rijit mesnetli sistemin frekans değerleri elde edilmiştir. Dönme yayı sabitindeki artış frekans değerlerinde de artmaya sebep olmuştur. Bu artış birinci modda K_0 'nın 10^7 , diğer modlarda K_0 'nın 10^9 değerine kadar devam etmiştir. K_0 'nın, bu değerlerden büyük değerleri için zemine yarı-rijit bağlı çerçevelerin frekans değerleri, aynı fiziksel özelliklere sahip zemine rijit bağlı çerçevelerin frekans değerlerine ulaşmış ve daha fazla artmamıştır.

Depremler sonrasında sık görülen, bina kolon temellerinde meydana gelen deformasyonlar yapı mesnetlerinin doğru imalatı kadar doğru modellenmesinin de önemini ortaya koymaktadır. Bu sebeple, çerçevelerin dinamik analizinde matematiksel hesap modeli kurulurken, ankastre gibi ideal mesnetlerden kaçınıp mesnedi yarı-rijit modellemek dinamik yüklere olan tepkiyi en doğru biçimde elde etmeyi mümkün kılar. Ayrıca, çerçeveyi zemine rijit bağlı kabul etmek daha büyük doğal frekans değeri, dolayısıyla daha küçük periyod değeri verecektir. Bu da, tasarım ivme spektrumuna

göre, yapıya intikal edecek deprem kuvvetini arttıracak ve yapı daha olumsuz yüklere göre tasarlanacaktır. Bu işlem, emniyeti getirirse de ekonomik olmayacaktır. Ancak, yapının dinamik zorlamalar altında yapacağı deplasmanı kısıtlayacağı deplasman-esaslı analiz yöntemleri ile optimum tasarım yoluna gidilebilir.

4. KAYNAKLAR

Bapat, C. N. 1987. Natural Frequencies of a Beam With Non-classical Boundary Conditions and Concentrated Masses, *Journal of Sound and Vibration*, 112 (1), 177-182.

Chai, G. B., Low, K. H. 1993. On the Natural Frequencies of Beams Carrying a Concentrated Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 160 (1), 161-166.

Clough, R.W., Penzien, J. 1993. *Dynamics of Structures*, Second edition, McGraw-Hill, Inc.

DeRosa, M. A., Franciosi, C., Maurizi, M. J. 1996. On the Dynamic Behavior of Slender Beams With Elastic Ends Carrying a Concentrated Mass, *Computers & Structures*, 58 (6), 1145-1159.

Glabisz, W. 1999. Vibration and Stability of a Beam With Elastic Supports and Concentrated Masses Under Conservative and Nonconservative Forces, *Computers & Structures*, 70, 305-313.

Goel, R. P. 1976. Free Vibration of a Beam-Mass System With Elastically Restrained Ends, *Journal of Sound and Vibration*, 47 (1), 9-14.

Güler, K. 1996. Effects of Soil Flexibility on Free Vibrations of Tower-like Structures, *Proceedings of the I. Symposium on Mathematical & Computational Applications*, Manisa, Turkey.

Gürgöze, M., Özgür, K., Erol, H. 1995. On the Eigenfrequencies of a Cantilevered Beam With a tip Mass and in-span Support, *Computers & Structures*, 56 (1), 85-92.

Laura, P.A.A., Maurizi, M. J., Pambo, J. L. 1975. A Note on the Dynamic Analysis of an Elastically Restrained-free Beam With a Mass at the Free end, *Journal of Sound and Vibration*, 41 (4), 397-405.

Low, K. H. 1994. An Equivalent-center Method for Quick Frequency Analysis of Beams Carrying a Concentrated Mass, *Computers & Structures*, 50 (3), 409-419.

Low, K. H., Lim, T. M., Chai, G. B. 1993. Experimental and Analytical Investigations of Vibration Frequencies for Centre-loaded Beams, *Computers & Structures*, 48 (6), 1157-1162.

Low, K. H. 1991. A comprehensive Approach for the Eigenproblem of Beams With Arbitrary Boundary Conditions, *Computers & Structures*, 39 (6), 671-678.

Maurizi, M. J., Belles, P. M. 1991. Natural Frequencies of the Beam-mass System: Comparison of the two Fundamental Theories of Beam

Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 150 (2), 330-334.

Maurizi, M. J., Belles, P. M. 1992. An Additional Evaluation of Free Vibration of Beam-mass Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 154 (1), 182-186.

McOwen, R. C. 1996. *Partial Differential Equations*, Prentice Hall.

Paz, M. 1997. *Structural Dynamics : Theory and Computation* (4th ed.), Chapman & Hall.

