

İKİ PARÇALI KİRİŞ KÜTLE SİSTEMİNİN TİTREŞİMİNDE DOĞAL FREKANSLAR ÜZERİNE BİR İNCELEME

Osman KOPMAZ, Sevda TELLİ

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16059/Görükle/Bursa

Geliş Tarihi : 29.01.2001

ÖZET

Boyutları ihmal edilmeyen bir kütle taşıyan iki ayrı kiriş parçasından oluşan bir sistemin özfrekanslarını hesaplamak için matematik bir model kurulmaktadır. Kiriş parçalarının diğer uçları basit mesnetlidir. Bu model kademeli mil ve kirişler, klasik basit mesnetli kirişler ve konsantre kütle taşıyan kirişlerin frekanslarını hesaplamaya da imkan sağlamaktadır. Ayrıca böyle bir sistemin temel frekansını yaklaşık bulmaya yarayan bir metot da verilmiş ve bu amaçla sisteme ait elastik eğri ifadeleri boyutsuz olarak çıkarılmıştır.

Anahtar Kelimeler : İki parçalı kiriş-kütle sistemi, Doğal frekanslar, Basit mesnetli kiriş, Titreşimleri

A STUDY ON THE EIGENFREQUENCIES OF A VIBRATING TWO PARTED BEAM-MASS SYSTEM

ABSTRACT

A mathematical model is established to find the eigenfrequencies of a system which consists of two beam segments connected with each other via a distributed mass. The beam segments are simply supported at their other ends. This model enables one to obtain the frequencies of some special cases like stepped beams and shafts, classical simply supported beams and beams carrying concentrated mass. Furthermore, in order to calculate the fundametal frequency of such a system, an approximate method is given. For this purpose, the deflection equations of the system are also derived in non-dimensional form.

Key Words : Two parted beam-mass system, Simply supported beam vibrations, Natural frequencies

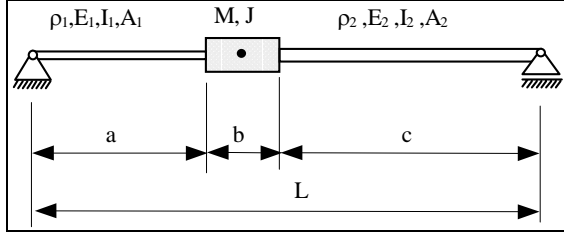
1. GİRİŞ

Kendi kütlesi dışında yayılı veya konsantre kütle taşıyan kiriş ve çubukların serbest titreşimleri çeşitli bakış açılarından ayrıntılı ve yoğun biçimde araştırılmıştır. Bu konudaki zengin literatür ve incelenen konular hakkında (Chen, 1963; Goel, 1973; Bhat ve Wagner, 1976; Chan ve Zhang, 1995; Gürgöze, 1998)'nin çalışmaları fikir verebilir. Kirişlerin taşıdığı kütlelerin boyutları kiriş boyutları yanında ihmal edilemez olduğunda kütlelerin jiroskopik etkisinin de göz önüne alınması gerekmektedir (Bhat ve Wagner, 1976; Bhat ve Kulkarni, 1976). Genelde şimdiye kadar incelenen sistemler ya ucunda konsantre kütle taşıyan ankastre

kirişler veya ara noktasında konsantre kütle yerleştirilmiş herhangi tarzda mesnetlenmiş kirişlerdir. Ayrıca kiriş üzerinde yayılı kütle olduğu sistemlerin incelendiği çalışmalar da mevcuttur (Chan ve Zhang, 1995; Chan, et all., 1996-1998; Chan ve Wang 1997; Cha ve Dym, 1998). Ancak bu çalışmalarda iki kiriş parçasıyla taşınan boyutları ihmal edilemez kütlelerden oluşan sistemin ele alınmadığı dikkat çekmektedir. Bu çalışmada Şekil 1'de gösterilen böyle bir sistemin doğal titreşim frekanslarının tayini için bir metot verilmektedir. Bulunan genel frekans denklemi konsantre kütle taşıyan ve taşımayan kirişlerin doğal frekanslarını bulmakta da kullanılabilir.

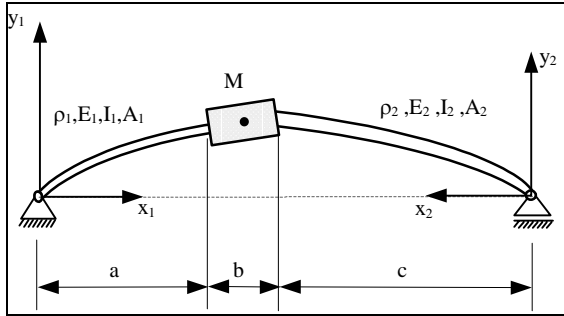
2. MATEMATİK MODEL

Şekil 1'de görülen sistemde kütlelerin düzgün şekilli ve kütle merkezine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Üniorm kiriş parçaları farklı eğilme katılıklarına ve boyuna yoğunluklara sahip olabilirler.



Şekil 1. İki parçalı kiriş-kütle sistemi

Şekil 2'de bu sistemin serbest titreşimleri esnasında alacağı hal abartılı olarak gösterilmiştir. Eksenel doğrultudaki hareketler bu aşamada ihmal edilecektir. Kiriş parçalarının hareket denklemleri iki farklı koordinat takımında ifade olunacaktır. Bunun amacı kirişin sağ ucundaki sınır şartlarının daha kolay ifade edilmesidir.



Şekil 2. İncelenen sistemin titreşim halindeki görünümü ve seçilen koordinat takımları

Uzunluğu a olan kiriş parçası 1 ve c uzunluklu diğer parça ise 2 ile numaralanacaktır. x_1y_1 takımında 1 kirişinin hareket denklemi

$$E_1 I_1 y_1'''' + \rho_1 A_1 \ddot{y}_1 = 0 \quad (1)$$

ve x_2y_2 takımında ise 2 kirişinininki

$$E_2 I_2 y_2'''' + \rho_2 A_2 \ddot{y}_2 = 0 \quad (2)$$

olmaktadır. Kiriş kesitlerinin dönme etkisi göz önüne alınmamaktadır. (') işareti x_1 veya x_2 'ye göre türevleri, (') işareti ise zamana göre türevleri göstermektedir.

2. 1. Sınır Şartları

1'nolu parçaya ait sınır şartlarının ilk ikisi şöyledir:

$$y_1(0,t) = 0 \quad (3)$$

$$E_1 I_1 y_1'''(0,t) = 0 \quad (4)$$

2'nolu parça için de x_2y_2 takımı kullanıldığında benzer şartlar yazılabilir:

$$y_2(0,t) = 0 \quad (5)$$

$$E_2 I_2 y_2'''(0,t) = 0 \quad (6)$$

1'nolu kirişin $x_1 = a$ 'da ve 2'nolu kirişin $x_2 = c$ 'de sağlaması gereken sınır şartlarının sayısı dördür. Bunların ikisi geometrik, ikisi ise doğal (dinamik) sınır şartlarıdır. Aslında bu sınır şartlarına örtüşme şartları (matching conditions) veya süreklilik şartları demek daha anlamlı olacaktır. Bu şartlar aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$y_1'(a,t) = -y_2'(c,t) \quad (7)$$

$$y_1(a,t) + b y_1'(a,t) = y_2(c,t) \quad (8)$$

$$E_1 I_1 y_1''(a,t) + E_2 I_2 y_2''(c,t) = M \left[\ddot{y}_1(a,t) + \frac{b}{2} \ddot{y}_1'(a,t) \right] \quad (9)$$

$$-E_1 I_1 y_1''(a,t) + E_2 I_2 y_2''(c,t) = J \ddot{y}_1'(a,t) \quad (10)$$

(7) ve (8) geometrik örtüşme şartları olup, elastik eğrinin sürekliliğini garanti etmektedirler. (9) ve (10) doğal (ya da dinamik) şartları ise aslında kütlelerin ötelenme ve dönmesinin ait hareket denklemleridir. (9) ve (10) un sağ taraflarında M ve J nin çarpanları istenirse y_2 nin türevleri cinsinden de ifade olunabilir.

2. 2. Hareket Denklemlerinin Çözülmesi

Değişkenlerine ayırma yöntemine dayanarak (1) ve (2) için,

$$y_1(x_1,t) = Y_1(x_1) \cdot q(t) \quad (11)$$

$$y_2(x_2,t) = Y_2(x_2) \cdot q(t) \quad (12)$$

şeklinde çözümler önerilir, bunlar (1) ve (2)'de yerine konur gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\frac{E_1 I_1 y_1''''}{\rho_1 A_1 Y_1} = -\frac{E_2 I_2 y_2''''}{\rho_2 A_2 Y_2} = -\omega^2 \quad (13)$$

ve buradan

$$Y_1'''' + k_1^4 Y_1 = 0 \quad (14)$$

$$Y_2'''' + k_2^4 Y_2 = 0 \quad (15)$$

denklemlerine erişilir. Burada ω^2 , k_1 ve k_2 arasında

$$\omega^2 = k_1^4 \frac{E_1 I_1}{\rho_1 A_1} = k_2^4 \frac{E_2 I_2}{\rho_2 A_2} \quad (16)$$

bağıntısı mevcut olup, (14) ve (15) in çözümlerinin

$$Y_1 = A_1 \text{ch } k_1 x_1 + B_1 \text{sh } k_1 x_1 + C_1 \cos k_1 x_1 + D_1 \sin k_1 x_1 \quad (17)$$

$$Y_2 = A_2 \text{ch } k_2 x_2 + B_2 \text{sh } k_2 x_2 + C_2 \cos k_2 x_2 + D_2 \sin k_2 x_2 \quad (18)$$

tarzında olacağı açıktır.

(3), (4) ve (5), (6) sınır şartlarından

$$A_1 = C_1 = A_2 = C_2 = 0 \quad (19)$$

bulunur. Diğer dört şartta Y_1 ve Y_2 kalan terimleriyle gerekli türevler alınarak yerine konulduğunda B_1 , D_1 , B_2 ve D_2 için bir homojen denklem takımı elde olunur. Bu takımın triviyal olmayan çözümünün olması için katsayılar matrisi determinantının sıfır olması gerektiği açıktır. Bu ise sistemin özdeğer denklemine ve dolayısıyla frekans denklemine sevk eder. Bu determinanı vermeden evvel bazı boyutsuz parametrelerin tanımlanması sonuçların genelleştirilmesi bakımından yararlı olacaktır. Bu parametreler aşağıdaki gibidir:

$$L = a + b + c \quad (20)$$

olduğuna göre

$$\frac{a}{L} = \eta_1 \quad (21)$$

$$\frac{c}{L} = \eta_2 \quad (22)$$

$$\frac{b}{L} = (1 - \eta_1 - \eta_2) \quad (23)$$

$$\varphi = \frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} \quad (24)$$

$$d_{31} = \lambda_1^3 \left[\text{ch } \lambda_1 + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{(\eta_1 + \varphi \eta_2)}{\eta_1} \lambda_1 \text{sh } \lambda_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\eta_1-\eta_2}{\eta_1} \right) \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\eta_1 + \varphi \eta_2}{\eta_1} \right) \lambda_1^2 \text{ch } \lambda_1 \right]$$

$$d_{32} = \lambda_1^3 \left[-\cos \lambda_1 + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{(\eta_1 + \varphi \eta_2)}{\eta_1} \lambda_1 \sin \lambda_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1-\eta_1-\eta_2}{\eta_1} \right) \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\eta_1 + \varphi \eta_2}{\eta_1} \right) \lambda_1^2 \cos \lambda_1 \right]$$

$$\xi = \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1} \quad (25)$$

ve sistemin toplam kütle sine M_t denirse,

$$M_t = \rho_1 A_1 a + \rho_2 A_2 c + M \quad (26)$$

olmak üzere,

$$\mu = \frac{M}{M_t} \quad (27)$$

$$\mu_1 = \frac{\rho_1 A_1 a}{M_t} \quad (28)$$

$$\mu_2 = \frac{\rho_2 A_2 c}{M_t} \quad (29)$$

$$\lambda_1 = k_1 a \quad (30)$$

$$\lambda_2 = k_2 c \quad (31)$$

$$\psi = \frac{J}{M b^2} \quad (32)$$

Bu parametreler cinsinden 4 x 4'lük karakteristik determinant d nin elemanları şöyle bulunur:

$$d_{11} = \lambda_1 \text{ch } \lambda_1$$

$$d_{12} = \lambda_1 \cos \lambda_1$$

$$d_{13} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \lambda_2 \text{ch } \lambda_2$$

$$d_{14} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \lambda_2 \cos \lambda_2$$

$$d_{21} = \text{sh } \lambda_1 + \left(\frac{1-\eta_1-\eta_2}{\eta_1} \right) \lambda_1 \text{ch } \lambda_1 \quad (33)$$

$$d_{22} = \sin \lambda_1 + \left(\frac{1-\eta_1-\eta_2}{\eta_1} \right) \lambda_1 \cos \lambda_1$$

$$d_{23} = -\text{sh } \lambda_2$$

$$d_{24} = -\sin \lambda_2$$

$$d_{33} = \xi \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^3 \lambda_2^3 \operatorname{ch} \lambda_2$$

$$d_{34} = -\xi \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^3 \lambda_2^3 \cos \lambda_2$$

$$d_{41} = \lambda_1^2 \left[-\operatorname{sh} \lambda_1 + \psi \mu \frac{(\eta_1 + \varphi \eta_2)(1 - \eta_1 - \eta_2)^2}{\eta_1^3} \lambda_1^3 \operatorname{ch} \lambda_1 \right]$$

$$d_{42} = \lambda_1^2 \left[\sin \lambda_1 + \psi \mu \frac{(\eta_1 + \varphi \eta_2)(1 - \eta_1 - \eta_2)^2}{\eta_1^3} \lambda_1^3 \cos \lambda_1 \right]$$

$$d_{43} = \xi \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^2 \lambda_2^2 \operatorname{sh} \lambda_2$$

$$d_{44} = -\xi \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2$$

Karakteristik denklem ise

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

olur.

İncelenen sistemin ilk doğal frekansını başka bir yolla yaklaşık hesaplayabilmek için elastik eğri ifadesi de çıkarılmıştır. Genelde farklı geometri ve malzemeye sahip olduğundan 1 ve 2'nolu kiriş parçalarının eğim ve sehim ifadeleri de farklıdır. 1 ve 2'nolu kiriş parçalarının eğim ve sehimleri sırasıyla y'_1 , y'_2 , y_1 , y_2 ile gösterilmiştir. Her iki parçanın eğim ve sehim fonksiyonları uygun tarzda boyutsuzlaştırılmıştır. \bar{y}'_1 , \bar{y}'_2 , \bar{y}_1 ve \bar{y}_2 boyutsuz eğim ve sehimleri göstermek üzere boyutsuzlaştırma bağıntıları

$$y'_1 = \frac{G_T L^2}{E_1 I_1} \bar{y}'_1 \quad (35)$$

$$y_1 = \frac{G_T L^3}{E_1 I_1} \bar{y}_1 \quad (36)$$

$$y'_2 = \frac{G_T L^2}{E_2 I_2} \bar{y}'_2 \quad (37)$$

$$y_2 = \frac{G_T L^3}{E_2 I_2} \bar{y}_2 \quad (38)$$

şeklinde olup burada G_T sistemin toplam ağırlığını göstermektedir. Kirişlerin eğilme rijitlikleri aynı ise boyutsuzlaştırma sayıları aynı olacaktır. \bar{R}_1 ve \bar{R}_2 sırasıyla 1 ve 2'nolu kirişlerin zemine bağlandığı mesnetlerdeki G_T ye bölünerek boyutsuzlaştırılmış reaksiyon kuvvetleri olup aşağıdaki gibidirler:

$$\bar{R}_1 = \mu_1 \left(1 - \frac{\eta_1}{2} \right) + \mu_2 \frac{\eta_2}{2} + \mu \left[\frac{1 - (\eta_1 - \eta_2)}{2} \right] \quad (39)$$

$$\bar{R}_2 = \mu_1 \frac{\eta_1}{2} + \mu_2 \left(1 - \frac{\eta_2}{2} \right) + \mu \left[\frac{1 + (\eta_1 - \eta_2)}{2} \right] \quad (40)$$

\bar{y}'_1 , \bar{y}'_2 , \bar{y}_1 ve \bar{y}_2 boyutsuz eğim ve sehim fonksiyonları da şu şekilde bulunmuştur.

$$\bar{y}'_1 = \frac{\bar{R}_1}{2} \bar{x}_1^2 - \frac{1}{6} \frac{\mu_1}{\eta_1} \bar{x}_1^3 + \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{2} \eta_2 f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right) \quad (41)$$

$$\eta_1 \geq \bar{x}_1 \geq 0$$

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{R}_1}{6} \bar{x}_1^3 - \frac{1}{24} \frac{\mu_1}{\eta_1} \bar{x}_1^4 + \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{2} \eta_2 f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right) \bar{x}_1 \quad (42)$$

$$\bar{y}'_2 = \frac{\bar{R}_2}{2} \bar{x}_2^2 - \frac{1}{6} \frac{\mu_2}{\eta_2} \bar{x}_2^3 + \left(\frac{1}{2} (1 - \eta_2) f_1 - \frac{1}{6} f_2 \right) \quad (43)$$

$$\eta_2 \geq \bar{x}_2 \geq 0$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{R}_2}{6} \bar{x}_2^3 - \frac{1}{24} \frac{\mu_2}{\eta_2} \bar{x}_2^4 + \left(\frac{1}{2} (1 - \eta_2) f_1 - \frac{1}{6} f_2 \right) \bar{x}_2 \quad (44)$$

Burada ;

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{L} \quad (45)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_2}{L} \quad (46)$$

$$f_1 = \mu_1 \left[\left(\xi \eta_1^2 - \eta_2^2 \right) \frac{\eta_1}{2} - \frac{2}{3} \xi \eta_1^2 \right] + \mu_2 \left[- \left(\xi \eta_1^2 - \eta_2^2 \right) \frac{\eta_2}{2} - \frac{2}{3} \eta_2^2 \right] + \mu \left[- \left(\xi \eta_1 + \eta_2 \right) \eta_1 \eta_2 - \left(\xi \eta_1^2 + \eta_2^2 \right) \frac{(1 - \eta_1 - \eta_2)}{2} \right] \quad (47)$$

$$f_2 = \mu_1 \left[- \xi \eta_1^3 \left(- \frac{1}{2} + \eta_1 + \frac{3}{2} \eta_2 + 2 \frac{(1 - \eta_1 - \eta_2)}{\eta_1} \right) + \eta_2^3 \frac{\eta_1}{2} \right] + \mu_2 \left[- \xi \eta_1^3 \left(1 + 3 \frac{(1 - \eta_1 - \eta_2)}{\eta_1} \right) \frac{\eta_2}{2} + \eta_2^3 \left(\frac{3}{4} - \frac{\eta_2}{2} \right) \right] + \mu \left[- \xi \eta_1^3 \left(1 + 3 \frac{(1 - \eta_1 - \eta_2)}{\eta_1} \right) \frac{(1 - \eta_1 + \eta_2)}{2} + \eta_2^3 \frac{(1 + \eta_1 - \eta_2)}{2} \right] \quad (48)$$

olmaktadır. M kütesinin merkezinin boyutsuz sehimi,

$$\begin{aligned} \bar{y}_m = & \mu_1 \left[\left(\frac{1}{6} \eta_1^3 + \frac{1}{4} \eta_1^2 (1 - \eta_1 - \eta_2) \right) \left(1 - \frac{\eta_1}{2} \right) - \frac{1}{24} \eta_1^3 - \frac{1}{12} \eta_1^2 \eta_3 \right] \\ & + \mu_2 \left[\left(\frac{1}{6} \eta_1^3 + \frac{1}{4} \eta_1^2 (1 - \eta_1 - \eta_2) \right) \frac{\eta_1}{2} \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{1}{6} \eta_1^3 + \frac{1}{4} \eta_1^2 (1 - \eta_1 - \eta_2) \right) \left(\frac{1 - \eta_1 + \eta_2}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{2} \eta_2 f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right) \left(\frac{1 + \eta_1 - \eta_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

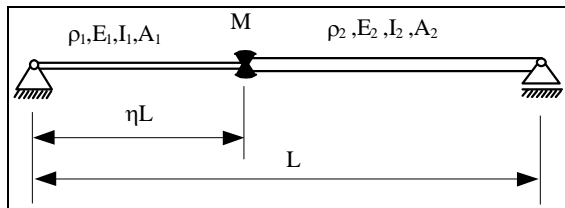
olarak bulunmuştur. Boyutlu ve boyutsuz y_m ve \bar{y}_m sehimleri arasındaki ilişki,

$$y_m = \frac{G_T L^3}{E_1 I_1} \bar{y}_m \quad (50)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3. NÜMERİK SONUÇLAR

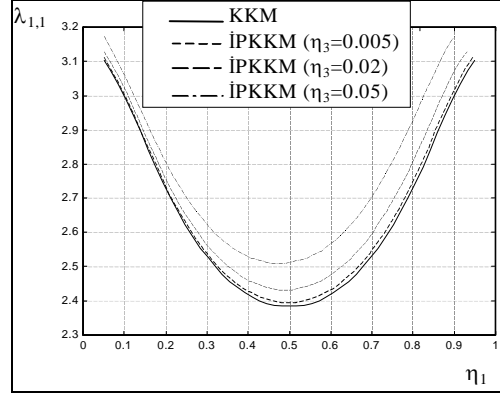
(34) bağıntısıyla verilen karakteristik denklemin köklerinin hesaplanması için Matlab'da bir program yazıldı. Her ne kadar bulunan kökler incelenen sistemin özdeğerleri ise de aralarındaki ilişki ve ifade kolaylığı için metnin bundan sonraki kısımlarında frekans veya özfrekans deyiminin kullanılması tercih edilecektir. İncelenen sisteme ait matematiksel model, konsantre kütle taşıyan kiriş ve herhangi bir ek kütle taşımayan, sürekli ancak farklı kesit ve malzeme özelliklerini haiz kirişlerin frekanslarını da hesaplamaya müsaade etmektedir. Konsantre kütle taşıyan kiriş hallerini mukayese amacıyla bu şekilde kütle taşıyan bir kirişe ait matematiksel model de oluşturularak, frekans denklemini elde edilmiştir (Şekil 3). Bu modeller İPKKM (İki Parçalı Kiriş + Kütle Modeli) ve KKM (Konsantre Kütle Modeli) diye kısaca adlandırılacaktır.



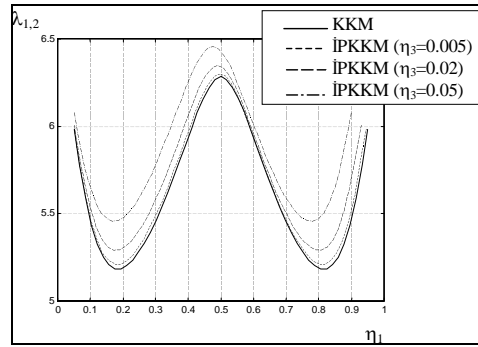
Şekil 3. Konsantre kütle taşıyan kiriş

Model yardımıyla bazı parametrelerin sistemin doğal frekanslarına etkisi araştırılmıştır. Bunlara kısa kısa değinilecektir:

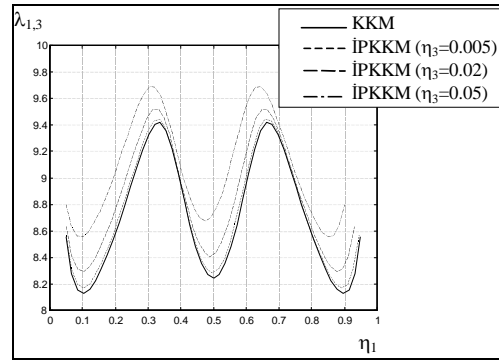
Kütle oranı μ ve yayılma açıklığı b sabit iken kütle başlangıç noktası η_1 'in değişiminin ilk üç frekansa etkisi incelenmiştir. Şekil 4, 5 ve 6'da sırasıyla ilk üç frekansın kütle başlangıç noktasının konumuyla değişimi verilmektedir. Şöyle ki, dolu çizgi doğrudan konsantre kütle taşıyan modelden bulunan frekansın eğrisidir. Bu şekillerdeki bütün eğrilerde



Şekil 4. Birinci frekansın KK ve İPKK modellerinde sırasıyla η ve η_1 'e göre değişimi



Şekil 5. İkinci frekansın KK ve İPKK modellerinde sırasıyla η ve η_1 'e göre değişimi



Şekil 6. Üçüncü frekansın KK ve İPKK modellerinde sırasıyla η ve η_1 e göre değişimi

$\mu=0.5$, $\varphi = \xi = 1$, $\psi = 0$ alınmıştır. İPKK modelinde ayrıca kütle açıklık oranı b/L için de farklı değerler alınmıştır. Bu değerler sırasıyla 0.005, 0.02, 0.05'dir. Grafiklerde yatay eksen İPKK modeli için η_1 e, KKM için η ya tekabül etmektedir. Her iki model arasında mukayese yapabilmek için İPKK modelinden bulunan λ_1 özdeğeri η_1 'e bölünmüştür. Bu üç grafikten şu sonuçlar çıkmaktadır:

KK modeline ait frekans eğrisi, İPKK modelinden bulunan frekans eğrilerinin daima altında

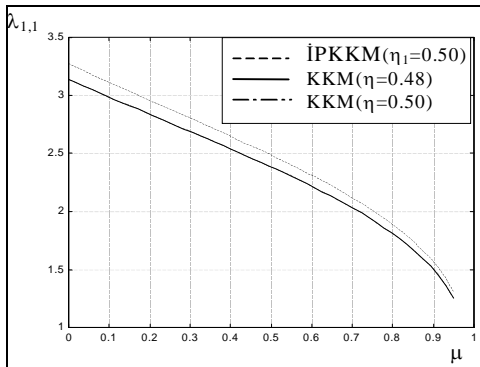
kalmaktadır. b/L oranı arttırıldığında İPKK modelinden bulunan frekans eğrilerinin yukarıya doğru kaydığı görülmektedir.

Bu durum μ oranının sabit tutulmasından kaynaklanmaktadır. Gerçekten b/L oranı arttırılıp μ sabit tutulduğunda, μ oranının değişmezliğini sağlamak için uzunlukları azaltılmış olan kiriş parçalarının kütlelerinde artış olmalıdır. Bu ise $\varphi = \xi = 1$ alındığından kesitlerin büyümesi ile mümkündür. Böylece kiriş parçaları daha katı hale gelmektedir.

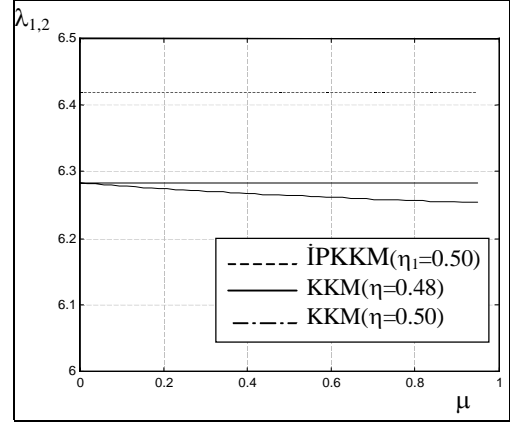
Bu grafiklerde dikkat çeken diğer bir husus ikinci ve üçüncü frekans eğrilerindeki maksimum ve minimumlardır. Bu ekstrem noktalar ikinci ve üçüncü frekansa ait modal fonksiyonların nod ve antinodlarına karşılık gelmektedir (Cha ve Dym, 1998). Maksimumlar nodların, minimumlar ise antinodların yaklaşık konumlarını vermektedir. Buna göre birinci frekans eğrisinde sadece bir antinod vardır. Buna mukabil ikinci modda bir nod, iki antinod; keza üçüncü modda iki nod, üç antinod vardır ki, iki parçalı kiriş + kütle sisteminin bu parametrik değerler için modların basit mesnetli kiriş modlarını andırdığı görülmektedir.

Şekil 7, 8 ve 9'da ise $\eta_1 = \eta_2$ ve dolayısıyla $b/L = 1 - \eta_1 - \eta_2$ oranları sabit tutulduğunda farklı μ 'ler için yine ilk üç frekansın nasıl değiştiği gösterilmiştir. İPKK modelinde yine $\varphi = \xi = 1$ alınmıştır. $\eta_1 = \eta_2 = 0.48$ ve dolayısıyla $b/L = 0.04$ tür. Burada nokta nokta çizilen eğriler İPKK modeline aittir. Buna mukabil kesikli çizilmiş eğriler $\eta = 0.5$ için, sürekli çizilen eğriler de $\eta = 0.48$ için KK modelinden bulunan sonuçları göstermektedir. Böylece grafiklerden iki farklı mukayese yapılması mümkün olmaktadır.

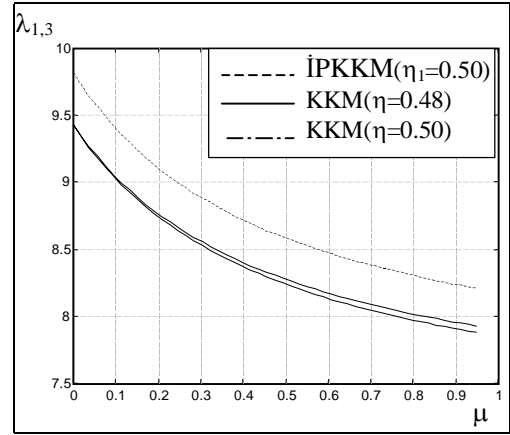
İlk üç frekansın $\eta = 0.50$ için KK modelinden bulunan μ ye göre değişim eğrilerinin, İPKK ya ait eğrilerin altında seyrettiği görülmektedir.



Şekil 7. Birinci frekansın KK ve İPKK modellerinde μ 'e göre değişimi



Şekil 8. İkinci frekansın KK ve İPKK modellerinde μ 'e göre değişimi

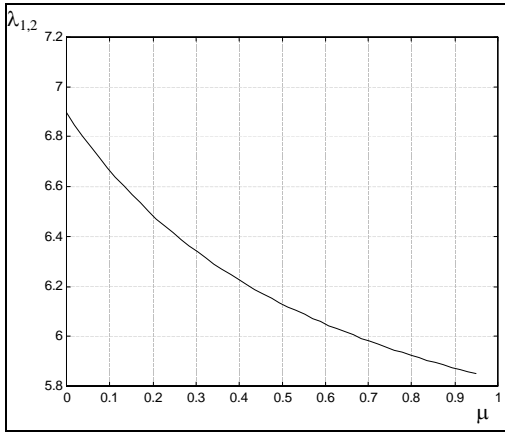


Şekil 9. Üçüncü frekansın KK ve İPKK modellerinde μ 'e göre değişimi

KK modelinde μ 'nün değişimi taşıyıcı kirişin boyutlarını etkilemeden mümkün olduğu halde İPKK modelinde ise bu değişim kiriş parçalarının boyutlarını etkilemektedir. Neticede KK modelinde katılık sabit kaldığı halde μ arttıkça sistemin kütlesi artmakta bu ise birinci frekansta azalmaya neden olmaktadır. Aynı durum İPKK modeli için de geçerli olmakla birlikte bu modelde μ artışı katılıkta da artışa yol açtığından birinci frekans değerleri daha yüksek olacaktır (Şekil 7). Aynı şekilde $\eta = 0.50$ ve $\eta = 0.48$ 'e karşılık gelen KK modeline ait birinci frekans eğrilerinin hemen hemen üstte olduğu görülmektedir. Aslında $\eta = 0.50$ eğrisi $\eta = 0.48$ eğrisinin altında seyretmektedir. Bu durum, KK modelinde $\eta = 0.50$ için kütle sisteminin tam antinoduna tesadüf etmesi ve böylece daha büyük bir kinetik enerjiye yol açması ile açıklanabilir. Şekil 8 deki ikinci frekans eğrileri mukayese edildiğinde İPKK modeli ile $\eta = 0.50$ için KK modelinden bulunan eğrilerin μ değişimine duyarsız olduğu dikkat çekmektedir. Bu durum da her iki modelde kütle konumunun bir nodun civarında veya

üzerinde olmasıyla açıklanır. Buradan her iki modelde de sistemin tam ortasında bir nod olduğu anlaşılmaktadır. Aynı grafikte KK modelinde $\eta = 0.48$ için ikinci frekansın da μ ye göre değiştiği görülmektedir. Zira bu kez kütle noda tekabül etmemektedir. Kütle oranı arttıkça da frekans azalmaktadır. Bu durum Rayleigh oranı hatırlanırsa kolayca anlaşılır. Bu oranın paydasını oluşturan referans kinetik enerji artmaktadır. Şekil 9'da ise üçüncü frekans için benzer eğriler gösterilmektedir. Yine İPKK modeline ait eğri önceki nedenlerden KK modelinden bulunanların üzerinde seyretmektedir. İkinci frekanstakinin aksine burada KK modeline ait $\eta = 0.48$ eğrisi yine aynı modelin $\eta = 0.50$ eğrisinin üzerinde seyretmektedir. Bu da yine modlarla açıklanabilir. $\eta = 0.50$ halinde kütle bu hale ait modun antinodunda yer almaktadır. $\eta = 0.48$ ise antinodun biraz uzağında olduğundan $\eta = 0.50$ 'e tekabül eden referans kinetik enerji daha büyüktür ve neticede frekans daha küçük olmaktadır.

Yukarıda ikinci frekansla ilgili açıklamanın tutarlılığını irdelemek için $\eta_1 = 0.6$, $\eta_2 = 0.3$, $\phi = \xi=1$ ve $\psi = 0$ alınarak İPKK modelinden yeni bir ikinci frekans eğrisi elde edilmiş ve M kütle sisteminin noduna tekabül etmemesi durumunda ikinci frekansın da μ ile değiştiği görülmüştür (Şekil 10).

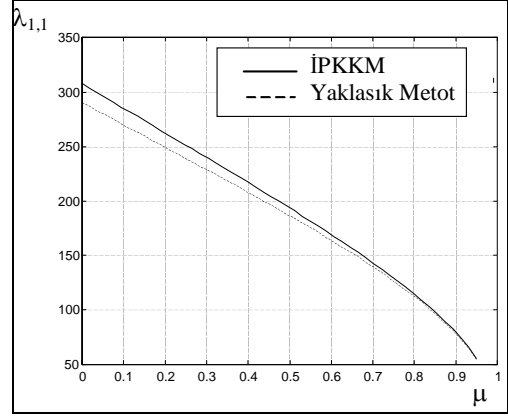


Şekil 10. Kütle merkezinin nodda yer almaması durumunda ikinci frekansın μ 'ye göre değişimi

Şekil 11, fiziki ve geometrik parametrelere ait sayısal değerleri bilinen bir sistem için İPKK modeli ve Dunkerley benzeri yaklaşık bir formülle bulunan birinci frekansın μ 'ye göre değişimini göstermektedir. Burada kütle merkezinin yeri aynı kalmaktadır ve

$$\eta_1 + \frac{1 - \eta_1 - \eta_2}{2} = 0.6 + \frac{1 - 0.6 - 0.3}{2} = 0.65$$

bağıntısından bulunduğu üzere $0.65L$ 'dedir.



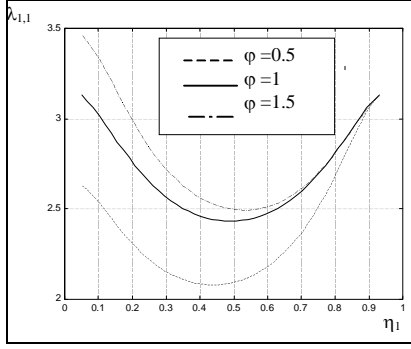
Şekil 11. İPKK modelinde ve yaklaşık metotta birinci frekansın μ 'ye göre değişimi

Yaklaşık metotta (49) bağıntısı ile kütle merkezinin sehimi bulunmakta ve $\omega_1 \equiv (g/y_m)^{1/2}$ ile sistemin birinci doğal frekansı hesaplanmaktadır. Bu yaklaşık bağıntının Dunkerley formülünden farklı tarafı, kiriş ve kütle ağırlıklarının ayrı ayrı ele alınıp iki ayrı frekans olarak buradan birinci frekansın hesaplanmayışıdır. Mafatih, y_m sehiminin hesabında kiriş segmentlerinin ağırlığı da hesaba katılmaktadır. Bu incelemede kullanılan sayısal değerler şöyledir: Kiriş parçaları için değerler (uniform ve homojen kabul ediliyorlar):

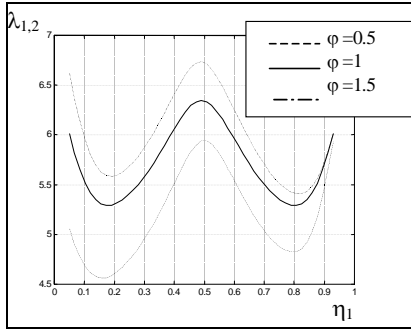
$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $L = 1 \text{ m}$, $a = 0.6 \text{ m}$, $b = 0.1 \text{ m}$, $c = 0.3 \text{ m}$, D (kiriş çapları) = 0.2 m . Bu örnekte kiriş parçalarının boyutları sabit kalmakta M artırılarak μ değiştirilmektedir.

Son olarak Şekil 12 ve 13'de farklı ϕ değerleri için birinci ve ikinci frekansın η_1 ile değişimi verilmektedir. Burada iki kiriş malzemesinin aynı olduğu kabul edilmiş ve buna uygun olarak $\xi = \phi^2$ alınmıştır. İki grafikte de $\mu = 0.5$ 'tir.

Şekil 12 incelendiğinde ϕ arttıkça birinci frekansın yükseldiği gözleniyor. ϕ nin artışı iki nolu kirişin çapının artması demektir. Her üç eğrinin minimum noktaları, her ϕ için birinci modun antinoduna karşılık gelmektedir. $\phi = 1.5$ için, $\eta_1 < 0.5$ halinde daha narin olan 1'nolu kirişin boyu kısalmakta (bir başka deyişle iki nolu kirişin boyu artmakta), dolayısıyla sistemin katılığı ϕ arttıkça artmaktadır. Bu nedenle $\phi = 1.5$ eğrisi $\phi = 1$ eğrisinin, o da $\phi = 0.5$ eğrisinin üzerinde seyretmektedir. $\eta_1 \rightarrow 1$ oldukça eğrilerin birbirlerine yaklaştığı görülüyor. Bu ise iki nolu parçanın sistemin katılığına etkisinin azalmasıyla açıklanabilir. Benzer durum Şekil 13'deki ikinci frekans eğrileri için de söz konusudur.

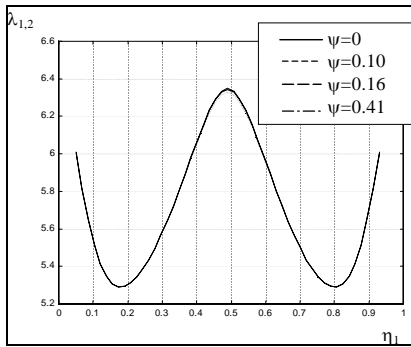


Şekil 12. İPKK modelinde farklı ϕ değerleri için birinci frekansın η_1 'e göre değişimi

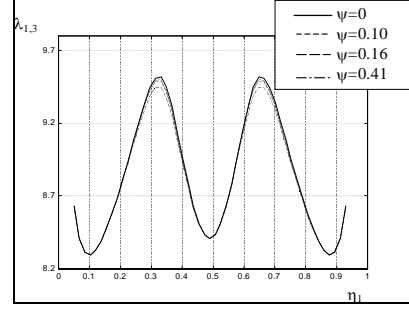


Şekil 13. İPKK modelinde farklı ϕ değerleri için ikinci frekansın η_1 'e göre değişimi

Şekil 14 ve 15'de ise M kütesinin dönme (jiroskopik) etkisinin göz önüne alınması halinde ikinci ve üçüncü frekans eğrilerinin kütle konumuna göre değişimi gösterilmektedir. Bu grafiklerde $\mu = 0.5$, $b/L = 0.02$ alınmıştır. ψ değeri arttıkça frekans değerleri düşmektedir. Birinci frekansta bu değişim grafik ölçekleri dahilinde farkedilemeyecek düzeyde olduğundan şekil olarak verilmemiştir. İkinci frekansta farklılık görünür hale gelmekte, üçüncü frekansta iyice ayırt edilmektedir. Bu da jiroskopik etkinin yüksek frekanslarda etkin olduğuna ilişkin standart titreşim teorisi kitaplarındaki bilgiyle tutarlılık arz etmektedir.



Şekil 14. İPKK modelinde kütle miktarı sabit iken farklı ψ değerleri için ikinci frekansın η_1 'e göre değişimi



Şekil 15. İPKK modelinde kütle miktarı sabit iken farklı ψ değerleri için üçüncü frekansın η_1 'e göre değişimi

Bu analizlerden ψ oranının çok etkin olmadığı anlaşıldığından daha önceki incelemelerde $\psi = 0$ alınmasının uygun olduğu görülmektedir.

4. DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada tamamen rijit kabul edilen bir kütle ile buna rijit bağlı iki kiriş parçasından oluşan bir taşıyıcı sistemin eğilme frekanslarını veren matematiksel bir model kurulmuştur. Bu model bilinen bazı özel halleri incelemede de kullanılabilir. Bu özel haller farklı kesit ve malzemeden oluşan kademeli kiriş veya mil ile üniform ve homojen klasik basit mesnetli kiriş ve nihayet üzerinde konsantre kütle taşıyan basit mesnetli kiriş halleridir. Model prensipte elastikiyeti olmayan bir kütle içerdiğinden üzerinde yayılı kütle taşıyan elastik sistemlerin incelenmesine elverişli değildir. Bu modelde ayrıca ϕ ve ξ parametreleri ile kiriş parçalarının malzeme ve geometrik özellikleri kontrol edilebilmektedir.

Diğer önemli bir noktada sistemin hareket denklemlerinin ve frekans denklemlerinin iki farklı koordinat takımı kullanılarak çıkarılmış olmasıdır. Böylece kademeli mil ve kirişlerin frekanslarını hesaba yarayan kullanışlı bir matematiksel model oluşturulmuştur.

Çalışmanın özgün sonuçları arasında böyle bir sistemin elastik eğri denklemlerinin boyutsuz formda ve ilk kez çıkarılmış olması da yer almaktadır.

5. KAYNAKLAR

Bhat, R. and Kulkarni, M. A. 1976. Natural Frequencies of a Cantilever With Slender Tip Mass. *AIAA Journal*, 14 (4), 536-537.

Bhat, B. R., Wagner, H. 1976. Natural Frequencies of a Uniform With a Tip Mass Slender in the Axial

Direction. *Journal of Sound and Vibration*, 45 (2), 304-307.

Cha, P. D. and Dym, C. L. 1998. Identifying Nodes and Anti-nodes of Complex Structures With Virtual Elements. *Journal of Sound and Vibration*, 211 (1), 249-264.

Chan, K. T., Leung, T. P. and Wong, W. O. 1996. Free Vibrations of Simply Supported Beam Partially Loaded With Distributed Mass. *Journal of Sound and Vibration*, 191, 590-597.

Chan, K. T. and Wang, X. Q. 1997. Free Vibration of a Timoshenko Beam Partially Loaded With Distributed Mass. *Journal of Sound and Vibration*, 206, 353-369.

Chan, K. T., Wang, X. Q. and Leung, T. P. 1998.

Free Vibrations of Beams With two Sections of Distributed Mass. *Journal of Vibration and Acoustics*, 120, 944-948.

Chan, K. T. and Zhang, J. Z. 1995. Free Vibration of a Cantilever Tube Partially Filled With Liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 182, 185-190.

Chen, Y. 1963. On the Vibration of Beams or Rods Carrying a Concentrated Mass. *Journal of Applied Mechanics*, 310-312.

Goel, R. P. 1973. Vibrations of a Beam Carrying a Concentrated Mass. *Journal of Applied Mechanics*, 821-822.

Gürgöze, M. 1998. On the Sensitivities of the Eigenvalues of a Viscously Damped Cantilever Carrying a Tip Mass. *Journal of Sound and Vibration*, 216 (2), 215-225.