

# DALGALI SINIRA HAİZ DELİK İHTİVA EDEN TEK EKSENLİ ÇEKMEYE MARUZ PLAKTA GERİLME DAĞILIMI

Yaşar PALA , Gültekin KARADERE

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Görükle Kampüsü, Bursa

Geliş Tarihi : 26.10.1999

## ÖZET

Bu çalışmada, dalgalı sınıra haiz delik ihtiva eden eksenel gerilmeye maruz sonsuz plak halinde gerilme dağılımı elde edilmektedir. Çözüm için pertürbasyonlar metodu kullanılmaktadır. Sonuçlar küçük üretim hatalarında bile gerilmenin önemli miktarlarda değişebildiğini göstermektedir. Özellikle yırtılmada önemli olan çengel gerilmesi için çeşitli grafikler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Dalgalı sınır, Dairesel delik, Pertürbasyon, Gerilme

## STRESS DISTRIBUTION IN AN AXIALLY LOADED PLATE INCLUDING A HOLE WITH A CORRUGATED BOUNDARY

### ABSTRACT

In this study, stress distribution in an axially loaded plate including a hole with corrugation is investigated. Perturbation technics is employed for the solution. Results reveal that stresses change in large amounts even for small variations in radius. Several graphics are given for the hoop stress that is especially important in tearing.

**Key Words :** Corrugated surface, Circular, Hole, Perturbation, Stress

## 1. GİRİŞ

Ortasında delik bulunan tek eksenli çekmeye maruz sonsuz plak problemi analitik olarak çok geniş bir şekilde incelenmiştir (Koiter, 1957; Savin, 1968; Venkatraman, 1970; Shilkrut and Ben-Gad, 1984). Yine, sonlu boyutları haiz plak içerisinde delik etrafındaki gerilme dağılımına ilişkin son yıllarda çok sayıda makale yayınlanmıştır (Shilkrut and Ben-Gad, 1984). Çok eksenli çekme hali de bu halden süper pozisyon prensibi yardımıyla elde edilmektedir (Nayfeh, 1981). Bu nazik konuda bir ikinci aşama olarak üretim düzgünsüzlerinin sebep olduğu etkilerde ele alınabilir. Biz bu çalışmada deliğin şeklinin üretim düzgünsüzlükleri dolayısıyla bir kapalı dalgalı eğri şeklinde olduğunu kabul ederek gerilme dağılımını elde ediyoruz. Daireden olan dalgalanmaların küçük olduğunu kabul ederek pertürbasyonlar teorisi yardımıyla çözüm elde etmeye çalışacağız. Bu alanda olmasa bile dalgalı

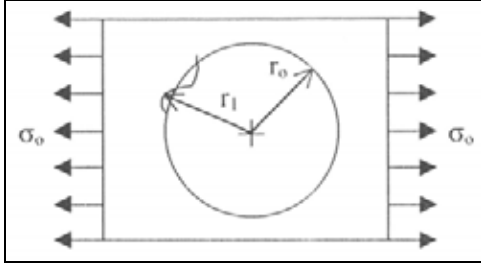
yüzeyle sahip burulmaya maruz silindirik çubuktaki gerilme dağılımı için kompleks fonksiyonlar teorisi içerisinde konform tasvir yöntemi kullanılmak suretiyle bir çözüm geliştirilmiştir (Savin, 1968 ).

## 2. ANALİZ

### 2. 1. Ön Bilgi

Şekil 1'deki gibi ortasında dalgalı eğrisel yüzeyle sahip delik bulunan  $\sigma_x$  eksenel gerilmesine maruz bir plağı göz önüne alalım. Sadece a yarıçaplı delik ihtiva eden halde Sınır şartlarının

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(\infty, 0) &= \frac{\bar{\sigma}}{2}(1 + \cos 2\theta) & \sigma_{\theta}(\infty, 0) &= \frac{\bar{\sigma}}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta}(\infty, 0) &= -\frac{\bar{\sigma}}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \right\} \text{sonsuzda} \quad (1a)$$



Şekil 1. Eksenel çekmeye maruz delikli plak

$$\sigma_r(a, \theta) = 0, \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0 \quad \text{delik kenarında} \quad (1b)$$

olduğu bilinmektedir. Yine, bu hal için gerilme fonksiyonu ve gerilmeler

$$\varphi = C_1(1 + 2 \ln r) + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + (C_5 r^4 + C_6 r^2 + C_7 + \frac{C_8}{r^2}) \cos 2\theta \quad (2)$$

ve

$$\sigma_r = C_1(1 + 2 \ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} - \left( 2C_6 + \frac{4C_7}{r^2} + \frac{6C_8}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (3a)$$

$$\sigma_\theta = C_1(3 + 2 \ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} - \left( 2C_6 + 12C_5 r^2 + \frac{6C_8}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (3b)$$

$$\tau_{r\theta} = \left( 2C_6 + 6C_5 r^2 - \frac{2C_7}{r^2} - \frac{6C_8}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (3c)$$

şeklinde oldukları gösterilmektedir. Gerilmeler sonsuz olamayacağına göre  $C_1 = C_5 = 0$  olması gerektiği açıktır. Sınır şartlarının (3) denklemlerine sağlatılması.

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (4a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \quad (4b)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right] \quad (4c)$$

verir (Venkatraman and Patel, 1970).

## 2. 2. Dalgalı Yüzey Hali

Bu halde problem öncekine nazaran oldukça karışıktır. Çözüm için pertürbasyonlar teorisini kullanacağız. Deliğin sınırı

$$r_1 = a + h\varepsilon \sin n\theta = a + h\varepsilon S \quad (5)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Burada  $\varepsilon$  küçük bir sayıdır.  $n$ 'nin alacağı değerlere göre eğrinin şekli değişmektedir. Kabul edelim ki bu halde eğrinin gerilme fonksiyonu

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0(r, \theta) + \varepsilon \varphi_1(r, \theta) + \varepsilon^2 \varphi_2(r, \theta) + \dots \quad (6)$$

olarak verilsin. (6) denklemindeki  $\varphi_0(r, \theta)$  dairesel delik halindeki gerilme fonksiyonudur. Bu takdirde, yeni durumdaki gerilmelerin de;

$$\sigma_r(r, \theta) = \sigma_{r_0}(r, \theta) + \varepsilon \sigma_{r_1}(r, \theta) + \varepsilon^2 \sigma_{r_2}(r, \theta) + \dots \quad (7a)$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = \sigma_{\theta_0}(r, \theta) + \varepsilon \sigma_{\theta_1}(r, \theta) + \varepsilon^2 \sigma_{\theta_2}(r, \theta) + \dots \quad (7b)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \tau_{r\theta_0}(r, \theta) + \varepsilon \tau_{r\theta_1}(r, \theta) + \varepsilon^2 \tau_{r\theta_2}(r, \theta) + \dots \quad (7c)$$

şeklinde seriler olarak ifade edilebildiklerini kabul edelim.

Sınır şartlarına ulaşmak için  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$  yı  $r = a$  noktası etrafında Taylor serisine açalım:

$$\sigma_r \Big|_{a+h\varepsilon S} = \sigma_r \Big|_a + h\varepsilon S \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \Big|_a + \frac{h^2 \varepsilon^2 S^2}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} \Big|_a + \dots \quad (8)$$

ya da (7a) ifadesini (8) de yerine koyarak

$$\begin{aligned} \sigma_r \Big|_{a+h\varepsilon S} &= \left[ \sigma_r + \varepsilon \sigma_{r_1} + \varepsilon^2 \sigma_{r_2} + \dots \right]_a + \varepsilon S \left[ \frac{\partial \sigma_{r_0}}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} + \dots \right]_a \\ &+ \frac{h^2 \varepsilon^2 S^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 \sigma_{r_0}}{\partial r^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \sigma_{r_1}}{\partial r^2} + \dots \right]_a + \dots \\ &= \sigma_{r_0} + \varepsilon \left[ \sigma_{r_1} + hS \frac{\partial \sigma_{r_0}}{\partial r} \right] + \varepsilon^2 \left[ \sigma_{r_2} + hS \frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} + \frac{h^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{r_0}}{\partial r^2} \right] + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

elde ederiz. Dalgalı yüzeyin teğeti ve teğetine dik hiçbir kuvvet olmadığından dairesel delik halindeki gibi bu halde de  $\sigma_r|_{a+\varepsilon S}$ 'nin yüzeyde sıfır olacağını söyleyebiliriz. Aynı muhakeme  $\tau_{r\theta}$  için de geçerlidir. Bilahare, (9) ifadesini sıfıra eşitleyerek

$$\sigma_{r_1}(a, \theta) = -hS \frac{\partial \sigma_{r_0}}{\partial r} \quad (10a)$$

$$\sigma_{r_2}(a, \theta) = -hS \frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} - \frac{h^2 S^2}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_{r_0}}{\partial r^2} \quad (10a)$$

.....

buluruz. Aynı şekilde,  $\tau_{r\theta}$ 'yı da  $r = a$  civarında seriye açıp yukarıdaki işlemleri tekrarlayarak

$$\tau_{r\theta_1}(a, \theta) = -hS \frac{\partial \tau_{r\theta_0}}{\partial r} \quad (11a)$$

$$\tau_{r\theta_2}(a, \theta) = -hS \frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial r} - \frac{h^2 S^2}{2!} \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_0}}{\partial r^2} \quad (11b)$$

.....

buluruz. Biz gerilmelerde sadece birinci düzeltmeleri yapma yoluna gideceğiz. (6) denkleminin biharmonik denklemde yerine konulması

$$\nabla^4 \varphi_0 = 0 \quad (12a)$$

$$\nabla^4 \varphi_1 = 0, \quad (12b)$$

$$\nabla^4 \varphi_2 = 0 \quad (12c)$$

.....

verir.  $\varphi_0$  fonksiyonuna tekabül eden elemanter çözüm (4) denklemleri ile verilmektedir. (12b) nin çözümü için gerekli olan sınır şartları şimdi

$$\sigma_{r_1}(a, \theta) = -hS \frac{\partial \sigma_{r_0}}{\partial r}$$

$$\tau_{r\theta_1}(a, \theta) = -hS \frac{\partial \tau_{r\theta_0}}{\partial r} \quad (13)$$

$$\sigma_r(\infty, 0) = 0, \quad \sigma_\theta(\infty, 0) = 0$$

$$\tau_{r\theta}(\infty, 0) = 0$$

şeklinde. Yüzeyin pürüzlü olması sonsuzdaki şartları değiştirmeden (13)'teki son üç ifade sifıra eşit kılınmıştır.

$\varphi_1$ 'in formunun (2)'deki gibi olduğunu kabul edebiliriz:

$$\varphi = C_1'(1+2\ln r) + C_2'r^2 + C_3'\ln r + C_4' + (C_3'r^4 + C_6'r^2 + C_7' + \frac{C_8'}{r^2})\cos 2\theta \quad (14)$$

(14) ifadesi ile gerilme ifadelerine başvurarak

$$\sigma_r = C_1'(1+2\ln r) + 2C_2' + \frac{C_3'}{r^2} - \left( 2C_6' + \frac{4C_7'}{r^2} + \frac{6C_8'}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (15a)$$

$$\sigma_\theta = C_1'(3+2\ln r) + 2C_2' - \frac{C_3'}{r^2} - \left( 2C_6' + 12C_5'r^2 + \frac{6C_8'}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (15b)$$

$$\tau_{r\theta} = \left( 2C_6' + 6C_5'r^2 - \frac{2C_7'}{r^2} - \frac{6C_8'}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (15c)$$

elde ederiz. Gerilmeler sonsuz olamayacağından  $C_1' = C_2' = 0$  verir. Yine, birinci ve ikinci şartların kullanılması

$$C_3' = -\sigma haS, \quad C_7' = \sigma haS, \quad C_8' = -\sigma ha^3S \quad (16)$$

verir. Sabitlerin (15) denklemlerinde yerine konulması

$$\sigma_{r_1} = -\frac{\sigma haS}{r^2} - \frac{\sigma haS}{r^2} \left( 4 + \frac{6a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta_1} = \frac{\sigma haS}{r^2} - \left( \frac{6}{r^4} \sigma ha^3S \right) \cos 2\theta \quad (17)$$

$$\tau_{r\theta_1} = -\frac{2}{r^2} \sigma haS + \left( \frac{6}{r^4} \sigma ha^3S \right) \sin 2\theta$$

verir. Bundan sonraki ikinci merteye katkıları da aynı şekilde hesaplamak mümkündür.

Şimdi, (4) ve (17) denklemlerini (7) denklemlerinde yerine koyarak

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] - \varepsilon \sigma haS \left\{ -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \left( 4 + \frac{6a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\} \quad (18a)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] + \varepsilon \sigma h a S \left\{ \frac{1}{r^2} - \left( \frac{6}{r^4} a^2 \right) \cos 2\theta \right\} \quad (18b)$$

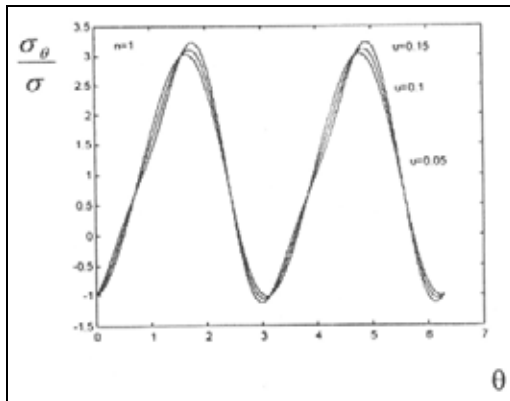
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \left[ \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right] - \varepsilon \sigma h a \left\{ -\frac{2}{r^2} + \left( \frac{6}{r^4} a^2 \right) \sin 2\theta \right\} \quad (18c)$$

Daha hassas sonuçlar elde edilmek istenildiğinde (13) deki sınır şartlarının ilk ikisi (10b) ve (11b) ile değiştirilerek ikinci mertebe düzeltmeler hesaplanabilir.

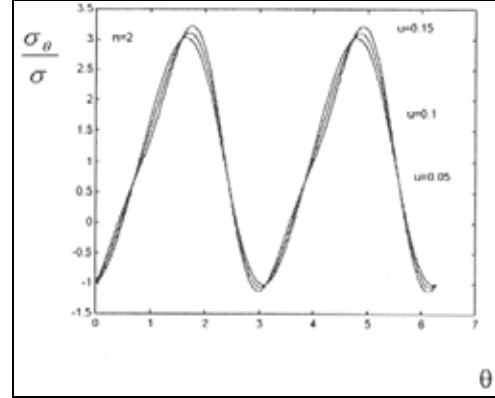
### 3. SONUÇ VE TARTIŞMA

Gerilmelerin şiddetleri sınırdan uzaklaştığında hızlı bir şekilde dalgasız yüzey haline dönüşeceğinden öncelikle yırtılma olayında önemli olan  $\sigma_{\theta}$ 'nın  $\theta$  ile değişimini çizmek gerekir. (18) denklemleri delik sınırı üzerinde  $n = 1, 2$  ve  $3$  için çizilerek Şekil 2, 3 ve 4 elde edilmiştir. Her bir grafik  $u = h\varepsilon/a$ 'nın  $0.05, 0.1$  ve  $0.15$  değerleri için elde edilmiştir.  $u$ 'nun artışıyla birlikte  $\sigma_{\theta}$ 'nın da önemli ölçüde arttığı gözlenmektedir.  $n > 1$  için eğrilerin yapılarının bozulduğuna dikkat edilmelidir.  $n = 1$  halinde  $u$  parametresi artırılarak kare deliğe yakın şekiller elde edilebilir.

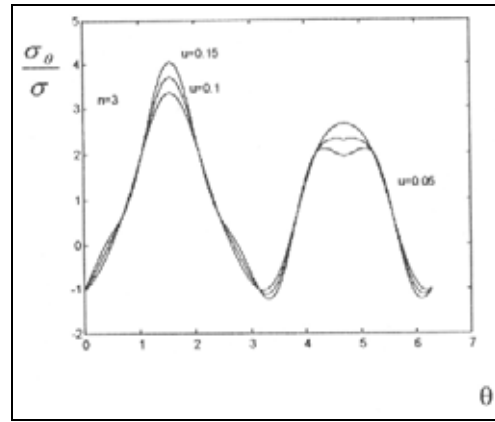
Pratikte karşılaşılan problemlerde plağın tekil yükle zorlandığı hale çok sık rastlanır. Bu nedenle, gerek dairesel delik halinde ve gerekse dalgalı yüzey halinde tekil yüke ya da bir  $c$  genişliği üzerine yayılı kuvvet ile çekmeye maruz plaktaki iç gerilme dağılımı ikinci bir problem olarak incelenebilir.



Şekil 2. Dalgalı yüzey halinde  $\sigma_{\theta}/\sigma$  nın  $\theta$  açısı ile değişimi ( $n = 1$ )



Şekil 3. Dalgalı yüzey halinde  $\sigma_{\theta}/\sigma$  nın  $\theta$  açısı ile değişimi ( $n = 2$ ).



Şekil 4. Dalgalı yüzey halinde  $\sigma_{\theta}/\sigma$  nın  $\theta$  açısı ile değişimi ( $n = 3$ )

### 4. REFERANSLAR

Koiter, W. T. 1957. An Elementary Solution of Two Stresses Concentration Problems in the Neighbourhood of a hole, *Q. J. of Appl. Math.*, (15), 303-308.

Nayfeh, Ali, Hasan, 1981. *Introduction To Perturbation Techniques*, John Wiley Publication.

Savin, G. N. 1968. *Stress Distribution Around Holes*, In Russian, Nav-kova Dumka Kiev.

Shilkrut, D. and Ben-Gad, E. 1984. Elastic Stress Concentration Phenomena in an Axially Stressed Rectangular Plate With a Central Circular Hole and Other Related Problems, *J. of Apply. Mech.*, (52), 216-219.

Venkatraman, B. and Patel, S. 1970. *Structural Mechanics With Introduction to Elasticity and Plasticity*, 111-118.