



KALIN KOMPOZİT KİRİŞ VE LEVHALARIN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Hasan YILDIZ, Mehmet SARIKANAT

Ege Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Bornova/İzmir

Geliş Tarihi : 06.03.2000

ÖZET

Kalın kompozit yapıların analizi sonlu elemanlar yardımıyla yapılırken, kullanılan sonlu elemanların malzeme özelliklerinin belirlenmesinde çeşitli zorluklar vardır. Özellikle birden fazla kompozit tabaka içeren sonlu elemanların malzeme sabitlerinin belirlenmesi, oldukça karmaşık ve zordur. Bu zorluk, her elemanın malzeme sabitleri için bir ortalama değer alınarak giderilmeye çalışılır. Bu çalışmada, yükleme durumuna göre eleman malzeme özelliklerinin belirlenmesinde iki farklı ortalama değer hesaplama yöntemi geliştirilmiş ve bunların sonuçlara etkileri incelenmiştir. Sonlu elemanlar analizi bir bilgisayar programı yardımıyla farklı fiber doğrultularında takviye edilmiş bir kiriş ve bir levhada, farklı eleman sayıları alınarak şekil değiştirmeleri hesaplanmış ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Aritmetik ve ağırlıklı ortalama yöntemleri adı verilen iki ortalama değer alma yöntemi karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Bu yöntemin uygulanmasında, eleman malzeme özellikleri belirlenirken, yükleme durumu göz önünde bulundurularak ortalama değer alma yöntemlerinden biri uygulanmıştır. Bu metod aracılığıyla, birden fazla kompozit tabakalı elemanlar içeren sonlu eleman analizlerinde, 8 düğümlü briç elemanların kullanılmasında karşılaşılan eleman malzeme özelliklerinin belirlenmesi zorluğu ortadan kaldırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, analitik çözümler ve ortalama değer almadan yapılan hesaplamalarla karşılaştırılmıştır. Her iki yöntemle yapılan hesaplamalarda, farklı yükleme durumları için elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle uyum göstermiştir.

Anahtar Kelimeler : Kompozit malzemeler, Sonlu elemanlar

FINITE ELEMENT METHOD ANALYSIS OF A THICK COMPOSITE BEAMS AND PLATES

ABSTRACT

There are some difficulties during determination of the material properties of thick composites when they are analyzed by using the finite element method. The most difficult of those is to determine material constants of multi layered composite elements. One of suggested method for solving this problem is to use an average value for element material properties. The effects of two averaging methods on the results were investigated. A finite element analysis program was developed to analyze the fiber reinforced composite beams and plates for displacement comparisons of different element numbers. The results also were compared with the analytical solutions. Beside the arithmetic average method, a new method called weighted average was developed. By considering different loading conditions, one of the averaging methods was utilized. The difficulty in determining the material properties of 8 node multi layered brick element used the finite element analysis of thick composite structures was overcome by using two averaging methods. The results were compared with the ones obtained from the elements without any averaging and analytical solutions. Both methods gave matching results for certain types of loading conditions.

Key Words : Composite materials, Finite element analysis

1. GİRİŞ

Kompozit malzemeler, metal gibi geleneksel malzemelerden daha fazla mühendislik özelliklerine sahiptir. Karma bir malzemenin oluşumu ile geliştirilebilecek bazı özellikleri sertlik, dayanıklılık, ağırlık azaltma, aşınmaya mukavemet, ısı özellikleri, yıpranmaya ve paslanmaya karşı dayanıklılıktır. İstenilen özellikler çeşitli doğrultulardaki fiber takviyeleri ile sağlanabilir.

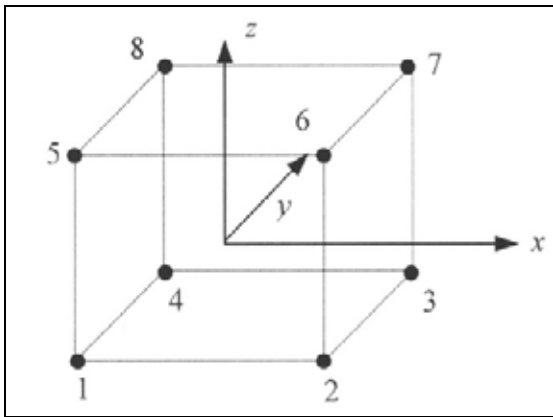
Kompozit malzeme problemleri çeşitli yöntemlerle analiz edilebilirler. Genel olarak, problemlerin modelleşmesinde çeşitli kabuller yapılır. Bu kabullerle yapılan çözümler belirli bir hata payına sahiptir. Günümüzde çeşitli nümerik çözüm yöntemleri mevcuttur. Bu nümerik analiz yöntemlerinden biri 'sonlu elemanlar' yöntemidir (Reddy, 1993). Günümüzde bilgisayarların kullanımının yaygınlaşması ile bu yöntemin kullanılması artmaktadır. Kompozit malzemelerde analiz yapılırken sonlu elemanlar yönteminin kullanılması üzerine çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle kalın kompozit yapıların sonlu elemanlar yöntemiyle analizinde değişik bir yöntem Yıldız (1997) tarafından geliştirilmiştir.

2. SONLU ELEMAN METODUYLA ŞEKİL DEĞİŞTİRME VE GERİLME ANALİZİ

2. 1. Şekil Fonksiyonları

Şekil 1'de verilen üç boyutlu 8 düğüm noktalı bir elemanın lineer şekil fonksiyonları;

$$N_A = \frac{1}{8}(1 + ix)(1 + jy)(1 + kz) \quad (1)$$



Şekil 1. Üç boyutlu 8 düğüm noktasına sahip bir kuadratik eleman

A	I	J	k
1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1
3	1	1	-1
4	-1	1	-1
5	-1	-1	1
6	1	-1	1
7	1	1	1
8	-1	1	1

şeklinde dir.

2. 2. Eleman Katılık Matrisinin Bulunması

Her bir elemanın katılık matrisi;

$$K^e = \iiint_{x y z} B^T D B \, dx \, dy \, dz \quad (2)$$

denkleminin nümerik olarak integre edilmesi ile bulunur. Burada B şekil fonksiyonlarının türevlerine bağlı bir 6×24 boyutlu bir matris olup aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$B = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5 \ b_6 \ b_7 \ b_8] \quad (3)$$

Burada b_i , 6 × 3 boyutlu bir matris olup şekil fonksiyonlarının türevlerini içerir (Reddy, 1993).

$$b_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(2) eşitliğindeki D matrisi ise, malzeme özelliklerine bağlı 6 × 6 boyutlarında matristir. Bu matrisin hesaplanması her elemanda bir tabaka olması durumunda, bir başka deyişle her tabakaya bir eleman atanması durumunda basit olarak yapılabilir (Tsai ve Hahn, 1980; Daniel ve Ishai, 1994). Fakat bir eleman içinde açılırlar veya malzemeleri farklı birden fazla kompozit tabakanın olması durumunda D matrisinin hesaplanması güçleşmektedir. Bunun için burada iki yöntem üzerinde durulacaktır. İlki Aritmetik Ortalama yöntemi olup malzeme eksenleri doğrultusunda tabaka özelliklerinin aritmetik ortalamaları alınacaktır. Ağırlıklı Ortalama adını

verdiğimiz ikinci yöntemde ise tabakaların, kesit nötr ekseninden olan uzaklıkları da hesaba katılarak her eleman için bir ortalama malzeme özelliği belirlenecektir. Her iki ortalama yöntemi için kullanılacak formüller şu şekilde ifade edilebilir.

$$D_{11} = \bar{E}_x \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}$$

$$D_{22} = \bar{E}_y \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta}$$

$$D_{33} = E_3 \frac{1 - \bar{\nu}_{xy}\bar{\nu}_{yx}}{\Delta}$$

$$D_{12} = \bar{E}_x \frac{\bar{\nu}_{yx} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} \quad (5)$$

$$D_{13} = \bar{E}_x \frac{\nu_{31} + \bar{\nu}_{yx}\nu_{32}}{\Delta}$$

$$D_{23} = \bar{E}_y \frac{\nu_{32} + \bar{\nu}_{xy}\nu_{31}}{\Delta}$$

$$D_{44} = G_{23} \quad D_{55} = G_{13} \quad D_{66} = \bar{G}_{xy}$$

ve

$\Delta = 1 - \bar{\nu}_{xy}\bar{\nu}_{yx} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\bar{\nu}_{xy}\nu_{32}\nu_{13}$
dır. Burada; $\bar{\nu}_{xy}$, $\bar{\nu}_{yx}$, \bar{E}_x , \bar{E}_y , \bar{G}_{xy} bir eleman içindeki tabakaların ortalama malzeme özelliği olup aritmetik ve ağırlıklı ortalamalar sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\bar{E}_x = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n E_{xi} (h_i - h_{i-1})$$

$$\bar{E}_y = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n E_{yi} (h_i - h_{i-1})$$

$$\bar{G}_{xy} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n G_{xyi} (h_i - h_{i-1}) \quad (6)$$

$$\bar{\nu}_{xy} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n \nu_{xyi} (h_i - h_{i-1})$$

$$\bar{\nu}_{yx} = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n \nu_{yxi} (h_i - h_{i-1})$$

$$\bar{E}_x = \frac{1}{I_y} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} E_{xi} (h_i^3 - h_{i-1}^3) G$$

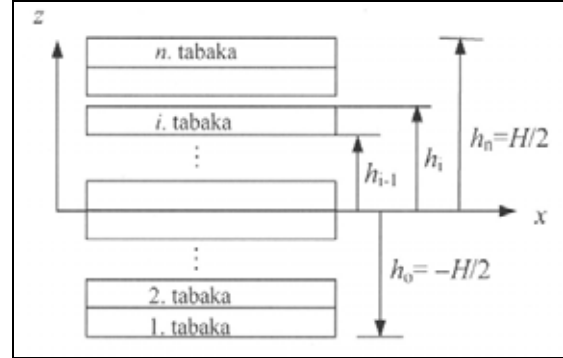
$$\bar{E}_y = \frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} E_{yi} (h_i - h_{i-1}) G^3$$

$$\bar{G}_{xy} = \frac{nez}{H \times L} \sum_{i=1}^n G_{xyi} (h_i - h_{i-1}) G \quad (7)$$

$$\bar{\nu}_{xy} = \frac{1}{I_y} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \nu_{xyi} (h_i^3 - h_{i-1}^3) G$$

$$\bar{\nu}_{yx} = \frac{1}{I_z} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3} \nu_{yxi} (h_i - h_{i-1}) G^3$$

(6) ve (7) nolu eşitliklerde; i , kaçınıcı tabaka olduğunu, h_i , bu tabakanın orta ekseninden olan uzaklığını (Bkz. Şekil 2) ve G , ise elemanın genişliğini göstermektedir. E_{xi} , E_{yi} , G_{xyi} , ν_{xyi} , ν_{yxi} eleman içindeki her bir tabakanın malzeme özellikleridir.



Şekil 2. Tabakaların orta eksene uzaklıkları

2. 3. Eleman Yer Değiştirme Vektörünün Bulunması

Her bir elemanın yer değiştirme vektörü;

$$U^e = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6 \ U_7 \ U_8]^T \quad (8)$$

olup burada;

$$U_i = [u_i \ v_i \ w_i] \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (9)$$

dır. U_i her bir düğüm noktasının x , y , z eksenlerindeki yer değiştirmelerinden oluşan 24×1 boyutlu yer değiştirme vektörüdür.

2. 4. Eleman Kuvvet Vektörünün Bulunması

Her bir elemanın kuvvet vektörü;

$$q^e = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8]^T \quad (10)$$

olup burada ;

$$q_i = [q_x \ q_y \ q_z] \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (11)$$

dır. q_i her bir düğüm noktasına etki eden x, y, z eksenlerinde tanımlı kuvvetlerden oluşan 24×1 'lik kuvvet vektörüdür.

2. 5. Kirişin Katılık, Yer Değiştirme ve Kuvvet İfadelerinin Bulunması

Bir kirişin K katılık matrisi;

$$K = \sum_{e=1}^{e=n} K^e \quad (12)$$

yer değiştirme vektörü;

$$U = \sum_{e=1}^{e=n} U^e \quad (13)$$

aynı şekilde kuvvet matrisi

$$Q = \sum_{e=1}^{e=n} q^e \quad (14)$$

şeklinde bulunur.

2. 6. Bir Kirişin Yer Değiştirmelerinin ve Reaksiyon Kuvvetlerinin Hesaplanması

Bir kirişin yer değiştirmesini ve reaksiyon kuvvetlerini bulmak için;

$$KU = Q \quad (15)$$

denkleminin gerekli sınır koşullarını kullanarak nümerik olarak çözülmesiyle bulunur. Eleman sayısının artmasıyla matris boyutları artmaktadır. Bu da çözümü zorlaştırmaktadır. Bu çözümleri yapabilmek için bilgisayarlardan faydalanılır. Bunun için akış şeması Şekil 4'de verilen bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

2. 7. Gerilmelerin Hesaplanması

Her bir elemanın ortalama gerilmeleri;

$$\sigma = D\varepsilon \quad (16)$$

bu denklemde, σ ortalama gerilme vektörü;

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{xz}] \quad (17)$$

ve ε birim şekil değiştirme vektörü;

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}] \quad (18)$$

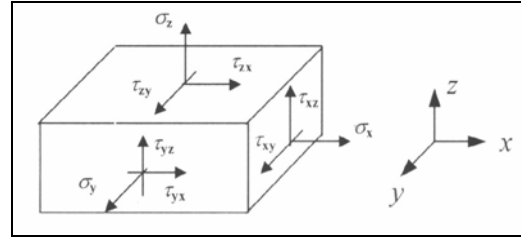
olarak belirtilir. D matrisi ise (4) denklemi vasıtasıyla bulunur.

Bir elemanda oluşan gerilmeler Şekil 3'de gösterilmiştir.

ε birim şekil değiştirme vektörü ise;

$$\varepsilon = BU \quad (19)$$

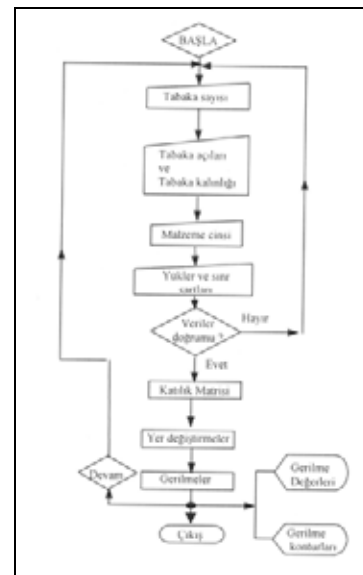
denkleminde bulunur. Buradaki B matrisi (3) denkleminde bulunur.



Şekil 3. Eleman üzerindeki gerilmeler

3. PROGRAM YAPISI

Gerilme ve yer değiştirme problemlerinin çözümünü yapmak için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu programın akış şeması Şekil 4'de verilmiştir.

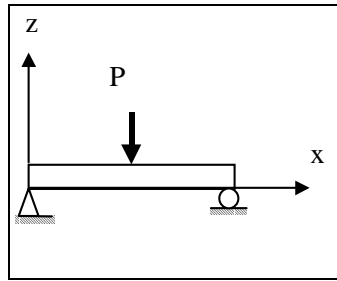


Şekil 4. Programın akış şeması

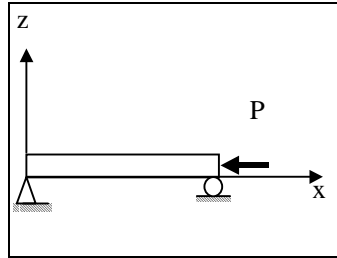
Programda, katılık matrisinin hesaplamasındaki integraller alınırken Gauss quadrature nümerik metodu kullanılmıştır.

4. BİR KOMPOZİT KİRİŞ VE LEVHANIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

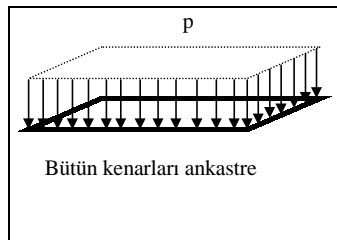
T300/934 malzemesinden yapılmış ve orta noktasından 1000 N'luk bir kuvvetle yüklenmiş basit mesnetli kirişin; uzunluğu 100 mm, genişliği 20 mm ve her bir tabakanın kalınlığı 1.25 mm olan çeşitli açılardaki kompozit tabakalardan oluşmuştur (Şekil 5 a, b). Uzunluğu ve genişliği 100 mm olan ve 4 tabakadan oluşan kompozit levha ise iki farklı mesnet ve yükleme durumuna göre incelenmiştir. Bu durumlar sırasıyla, 100000 N/m²'lik yanal yayılı



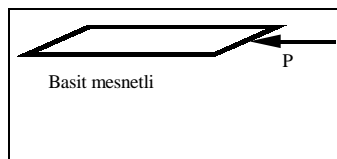
(a)



(b)



(c)

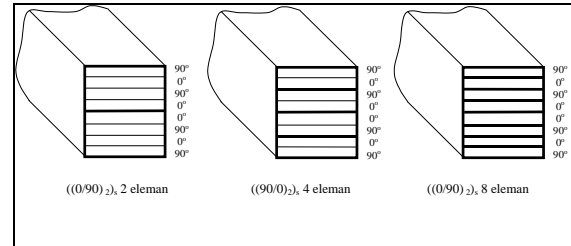


(d)

Şekil 5. Kiriş ve levhanın yük ve mesnet durumları

yüke maruz dört kenarı da ankastre mesnetli levhayı ve 1000 N'luk eksenel yük altındaki basit mesnetli levhayı içermektedir (Şekil 5 c, d). Malzeme özellikleri Reddy (1997) ve Tsai (1988)'den alınmıştır. Sonlu eleman analizi yapılacak kiriş ve levha, kalınlıkları doğrultusunda (z eksen doğrultusunda) kompozit tabaka sayıları aynı kalmak şartıyla farklı sayıdaki elemanlara bölünmüştür. Böylece her bir elemandaki tabaka sayısı farklı sayılarda (1, 2 ve 4) olacak şekilde elde edilir (Şekil 6). Bu yöntem sonucunda elde edilen elemanların eleman katılık matrisleri hesaplanırken malzeme özelliklerini içeren D matrisindeki terimler (6) ve (7) eşitlikleri yardımıyla belirlenir.

Yukarıdaki şekilde elde edilen eleman özelliklerinin sonlu eleman denklemlerinde yerlerine konulması sonucu yapılan analizlerde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 5'deki basit mesnet sınır koşullarına sahip kirişin orta noktasından yanal ve eksenel olarak iki farklı şekilde yüklenmesiyle elde edilen sonuçlarda özellikle kirişin belirli bir kesitindeki yer değiştirmeler incelenmiştir. Bu inceleme, farklı tabaka sayılarına sahip elemanların sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırılarak yapılmıştır.



Şekil 6. Kiriş kalınlığı doğrultusundaki eleman sayıları

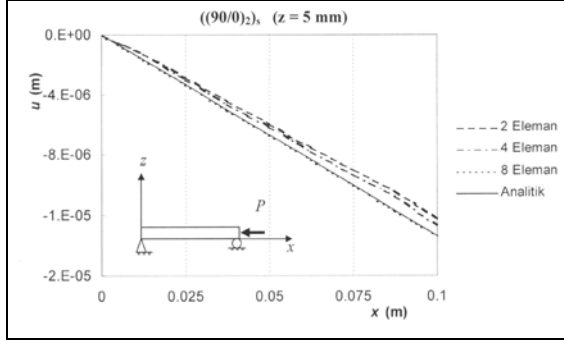
5. SONUÇLAR

Yapılan hesaplamalar sonucunda, sonuçlar iki grupta sınıflandırılabilir. Bunlardan birincisi eksenel yük uygulanması halinde elde edilen sonuçlardır. İkinci durum ise yanal yük uygulanması halidir.

5. 1. Eksenel Yük Durumu

Bu durumda ((90/0)₂)_s tabaka dizilişine sahip bir kiriş ve (90/0)_s tabaka dizilişine sahip bir levhanın kayar mesnetli olan ucuna 1000 N'luk eksenel yükler uygulanmış ve bu yükler sonucunda yapıların kalınlıklarının ortasındaki düğüm noktalarında x doğrultusundaki yer değiştirmeleri (u) belirlenmiştir. Bu yer değiştirmeler x'in fonksiyonu olarak farklı eleman sayılı durumlar için Şekil 7 ve Şekil 8'de verilmektedir. Elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle de karşılaştırılmıştır. Şekil 7'de eleman

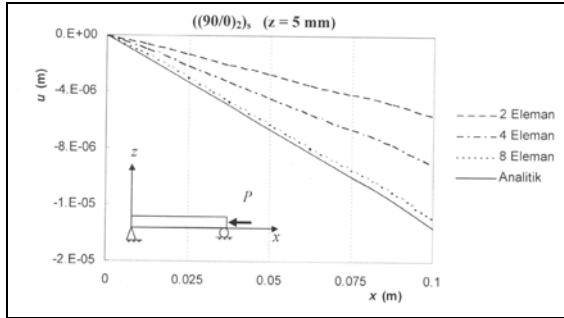
malzeme özellikleri belirlenirken aritmetik ortalama yöntemi kullanılmıştır.



Şekil 7. Eksenel yük altındaki kiriş yer değiştirmelerinin aritmetik ortalama yöntemiyle hesaplanması

Şekil 8'de yukarıda bahsedilen özelliklere sahip kirişin eleman malzeme özelliklerinin belirlenmesi safhasında ağırlıklı ortalama yöntemi kullanıldığında farklı sayıda tabakalara sahip elemanlarla yapılan analizler arasındaki fark açıkça görülmektedir. Bu iki yöntemden aritmetik ortalama yöntemi, birden fazla tabakalı elemanlı eksenel yükleme durumları için çok daha iyi sonuçlar vermektedir.

Eksenel yüke maruz kompozit levha için yapılan analizlerde de, kiriş analizinde elde edilen sonuçlara benzer değişimler elde edilmiştir.



Şekil 8. Eksenel yük altındaki kiriş yer değiştirmelerinin ağırlıklı ortalama yöntemiyle hesaplanması

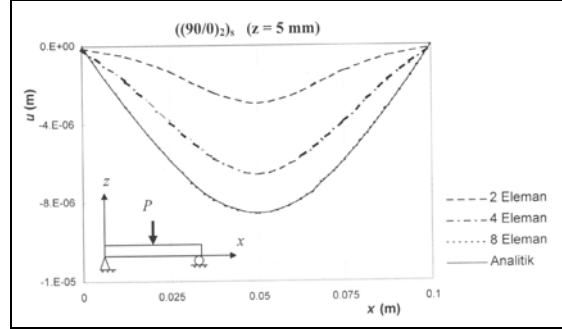
5. 2. Yanal Yük Durumu

Yanal yük durumu, kompozit kiriş ve levha için ayrı ayrı incelenmiştir. Bu yükleme durumu için analitik çözümler literatürden elde edilmiştir (Reddy, 1997).

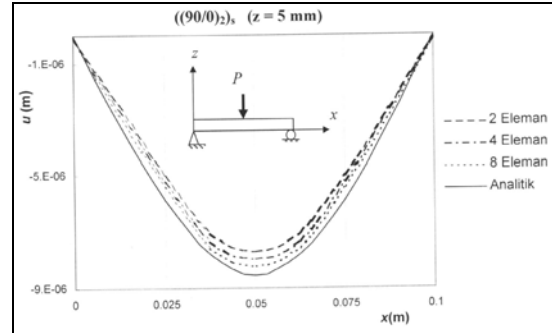
5. 3. Kompozit Kiriş

Bu durumda ((90/0)2) tabaka dizilişi kullanılarak elde edilen, boyutları aynı basit mesnetli kirişin orta noktasından 1000 N'luk bir düşey yük uygulanmış

ve bu yük sonucunda kirişin tabanından $z = 5$ mm mesafedeki düğüm noktalarının z doğrultusundaki yer değiştirmeleri (w) belirlenmiştir. Bu yer değiştirmeler x 'in fonksiyonu olarak farklı eleman sayılı durumlar için Şekil 9 ve Şekil 10'da verilmektedir. Yine benzer olarak Şekil 9'da eleman malzeme özellikleri belirlenirken aritmetik ortalama yöntemi kullanılmıştır. Bu şekillerden de görüldüğü gibi, analitik sonuçlarla karşılaştırıldığında aritmetik ortalama yöntemiyle elde edilen sonuçların iyi olmadığı görülmektedir.



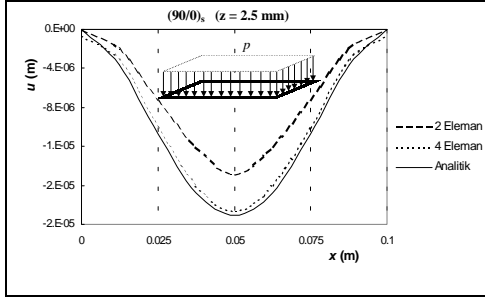
Şekil 9. Yanal yük altındaki kiriş yer değiştirmelerinin aritmetik ortalama yöntemiyle hesaplanması



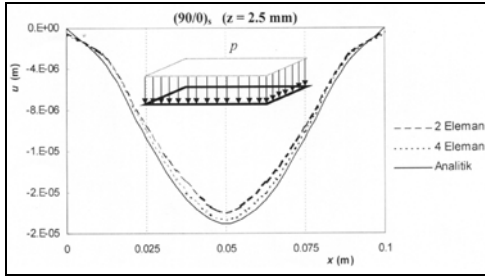
Şekil 10. Yanal yük altındaki kiriş yer değiştirmelerinin ağırlıklı ortalama yöntemiyle hesaplanması

5. 4. Kompozit Levha

((90/0)2) tabaka dizilişine sahip, boyutları $0.1 \times 0.1 \times 0.005$ m olan ankastre levha üzerine 100000 N/m^2 'lik bir düşey yük uygulanmış ve bu yük sonucunda kirişin tabanından $z = 2.5$ mm mesafedeki düğüm noktalarının z doğrultusundaki yer değiştirmeleri (w) belirlenmiştir. Bu yer değiştirmeler x 'in fonksiyonu olarak farklı eleman sayılı durumlar için Şekil 11 ve Şekil 12'de verilmektedir. Şekil 11'de eleman malzeme özellikleri belirlenirken aritmetik ortalama yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemden elde edilen sonuçların iyi olmadığı görülmektedir.



Şekil 11. Levha yer değiştirmelerinin aritmetik ortalama yöntemiyle hesaplanması



Şekil 12. Levha yer değiştirmelerinin ağırlıklı ortalama yöntemiyle hesaplanması

Ağırlıklı ortalama yöntemi kullanıldığında ise farklı sayıda tabakalara sahip elemanlarla yapılan analizlerde sonuçların oldukça iyi olduğu tespit edilmiştir (Şekil 12).

6. YORUMLAR

Bu çalışma sırasında geliştirilen iki farklı yöntem olan, sonlu eleman malzeme özelliklerinin belirlenmesi aşamasında kullanılan aritmetik ortalama ve ağırlıklı ortalama yöntemlerinin sonlu eleman sonuçlarına etkileri incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda her iki yöntemin kompozit kiriş ve levhalarda farklı yükleme durumları için iyi sonuçlar verdiği ortaya çıkmıştır. Eksenel yükleme durumunda aritmetik ortalama yöntemi iyi sonuç verirken, yanal (dikey) yükleme durumunda ise ağırlıklı ortalama yönteminin daha doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Her iki durumda, bu yöntemler sayesinde sonlu eleman analizlerinde kullanılacak eleman sayılarında oldukça fazla azalmalar olacaktır. Bu durum, genelde çok sayıda tabakalardan oluşan kompozit yapıların sonlu eleman analizlerinin daha çabuk ve kolayca yapılmasını sağlayacaktır.

7. SEMBOLLER

- E_1, E_2 : Fiber doğrultusundaki eksen takımında elastisite modülleri
 G_{12}, G_{13} : Fiber doğrultusundaki eksen takımında kayma modülleri

- V_{12}, V_{13} : Fiber doğrultusundaki eksen takımında Poisson oranları
 E_x, E_y : Malzeme eksen takımında elastisite modülleri
 G_{xy}, G_{xz} : Malzeme eksen takımında kayma modülleri
 V_{xy}, V_{xz} : Malzeme eksen takımında Poisson oranları
 N_A : Şekil fonksiyonları
 K^e : Eleman katılık matrisi
 B : Şekil fonksiyonlarının türevlerini içeren matris
 D : Malzeme özellikleri matrisi

$$\bar{V}_{xy}, \bar{V}_{yx},$$

$$\bar{E}_x, \bar{E}_y, : \text{Ağırlıklı malzeme özellikleri}$$

$$\bar{G}_{xy}$$

- G : Eleman genişliği
 h : Bir kompozit tabakanın malzeme orta ekseninden uzaklığı
 U^e : Eleman yer değiştirme matrisi
 u, v, w : Bir düğüm noktasının x, y, z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirmeleri
 q^e : Eleman kuvvet vektörü
 K : Kirişin katılık matrisi
 U : Kirişin yer değiştirme vektörü
 Q : Kirişin kuvvet vektörü
 σ : Gerilme vektörü
 ε : Birim şekil değiştirme vektörü
 P : Uygulanan dış yük
 H : Kirişin toplam kalınlığı
 N : Toplam tabaka sayısı
 I_x, I_y : Kiriş kesit atalet momentleri
 nez : z eksenini doğrultusundaki eleman sayısı

8. KAYNAKLAR

Daniel, I. M. ve Ishai, O. 1994. Engineering Mechanics of Composite Materials, Oxford University Press, NewYork.

Reddy, J. N. 1993. Introduction to the Finite Element Method, 2nd ed. McGraw Hill, NewYork.

Reddy, J. N. 1997. Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis, CRC Press, Florida.

Tsai, S. W. 1988. Composite Design, 4th ed., Think Composites, Ohio.

Tsai, S. W. ve Hahn, H. T. 1980. Introduction to Composite Materials, Technomic Publishing, Pennsylvania.

Yıldız, H. 1997. "Kompozit Malzemelerden Yapılmış Kalın ve Eğimli Kirişlerin Nümerik Metod Yardımıyla Analizinde Yeni Bir Yöntem", İnci Havacılık Sempozyumu, 9-10 Haziran 1997, İstanbul.