

# İKİ BOYUTLU PROBLEMLER İÇİN SONLU ELEMANLAR AĞI OLUŞTURULMASI

**Muzaffer TOPCU, Süleyman TAŞGETİREN**

Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli

## ÖZET

Nümerik analiz yöntemlerinin birinci adımı genellikle çözüm bölgesinin elemanlara ayrılarak bir ağ yapısının elde edilmesidir. Sonlu elemanlar metodunda da ön işlemlerden olarak sonlu eleman ağının elde edilmesi sonuçların güvenilirliği açısından büyük öneme sahiptir ve otomatik olarak yapılmazsa çok zaman alıcı bir aşamadır. Bu çalışmada, düzlem ve aksel simetrik problemlerin çözümünde kullanılacak bir otomatik ağ oluşturma yöntemi tanıtarak ele alınan çeşitli geometrilerin sonlu eleman ağları verilmiştir. Hazırlanan bilgisayar programı istenen bölgeyi istenen sıklıkta ve en az girdi bilgisiyle 3 düğümlü üçgen ve 4, 8 ve 9 düğümlü dörtgen elemanlara ayırmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Otomatik ağ oluşturma, Sonlu elemanlar metodu, 2-B problemler

## A METHOD FOR FINITE ELEMENT MESH GENERATION FOR 2-D PROBLEMS

### ABSTRACT

The first step in numerical analysis techniques is the preparation of a suitable mesh for solution domain. In the finite element method, the mesh generation, as a preprocessing stage, affects the accuracy of the results importantly. Furthermore, it is very time consuming when it is not carried out automatically. In this study, an automatic mesh generation technique which can be used for plane and axisymmetric problems is introduced. Meshes prepared with this technique for several geometries are given. With the computer program developed for this study, the desired domains can be divided into 3 node triangular and 4, 8 and 9 node quadrilateral elements with least input information and suitably fine meshes.

**Key Words:** Automatic mesh generation, Finite element method, 2-D problems

## 1. GİRİŞ

Çoğu mühendislik uygulamalarında problemlerin karmaşıklığı sebebiyle genellikle problemlerin tam çözümü yerine, kabul edilebilir seviyede bir yaklaşık çözüm tercih edilir. Öyle problemler vardır ki, tam çözüm imkansız kabul edilerek yaklaşık çözüm tek yol olarak benimsenir. Sonlu elemanlar metodu; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle bölgenin tamamı için sonuçların elde edildiği sayısal bir analiz tekniğidir.

Sürekli bir ortamda alan değişkenleri (gerilme, yer değiştirme, basınç, sıcaklık v. s.) sonsuz sayıda farklı değere sahiptir. Eğer sürekli bir ortamın belirli bir bölgesinin de aynı şekilde sürekli ortam özelliği

gösterdiği biliniyorsa, bu alt bölgede alan değişkenlerinin değişimi sonlu sayıda bilinmeyen olan bir fonksiyon ile tanımlanabilir. Bilinmeyen sayısının az ya da çok olmasına göre seçilen fonksiyon lineer ya da yüksek mertebeden olabilir. Sürekli ortamın alt bölgeleri de aynı karakteristik özellikleri gösteren bölgeler olduğundan, bu bölgelere ait alan denklem takımları birleştirildiğinde bütün sistemi ifade eden denklem takımı elde edilir. Denklem takımının çözümü ile sürekli ortamdaki alan değişkenleri sayısal olarak elde edilir. Yaklaşık çözüm yöntemlerinin günümüzde en çok kullanılanlarından birisi sonlu elemanlar metodudur. Sonlu elemanlar metodunun temel prensibi, öncelikle bir elemana ait sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp tüm sistemi temsil edecek şekilde eleman denklemlerini

birleştirerek sisteme ait lineer denklem takımının elde edilmesidir. Yöntemde genel olarak kullanılan üç temel basamak vardır (Bathe, 1982, Huebner ve Thornton, 1982 ve Chandrupatla ve Belegundu, 1991). Bunlar; hazırlık işlemleri, çözüm ve değerlendirme işlemleri olarak sıralanabilir. Hazırlık işlemleri, düğüm koordinatları, elemanların birbirleri arasındaki süreklilik, sınır şartları yükler ve malzeme bilgileri ile ilgili dataların hazırlanması safhasıdır. Çözüm safhası, problemin özelliğine göre gerekli hesaplamaların yapılarak çözümlerin elde edilmesini, değerlendirme safhası ise, elde edilen alan değişkenlerinin grafik çizimi (gerilme, sıcaklık hız dağılımı v. s), deforme şekillerin elde edilmesi, değişkenlerin çözüm bölgesindeki dağılımlarının görsel olarak elde edilmesini içermektedir.

Ön ve son işlemler sonlu elemanlar metodunda önemli bir ağırlığı vardır. Bu nedenle özellikle sonlu eleman ağ bilgilerinin (düğüm koordinatları ve eleman sürekliliği) otomatik olarak hazırlanması büyük öneme sahiptir. Çoğu zaman problemin doğru ve yeterince hassas çözümünün elde edilmesi için bir çok değişik sonlu eleman ağının denenmesi gerekebilmektedir. Sonlu elemanlara ayırma işlemi ve problemin giriş bilgilerinin hazırlanması eleman sayısı arttıkça hem zaman alıcı olmakta hem de hata yapma oranını artırmaktadır. Bu yüzden elemanlara bölme işleminin bilgisayarla yapılması için yöntemler geliştirilmiştir. Sonlu elemanlar metodu 1920'li yıllardan itibaren kullanılmaya başlanmış olmakla beraber bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerle ancak 1960'lı yıllardan itibaren geniş bir kullanım alanı bulabilmiştir. Otomatik ağ oluşturma yöntemleri de bunlara duyulan ihtiyaçla beraber 1970'lerden itibaren geliştirilmeye başlanmıştır (Zienkiewicz ve Philips, 1971, Zhu ve ark., 1991 ve Zienkiewicz, 1991). Yapılan çalışmalar iki boyutlu ve üç boyutlu problemler için sonlu eleman ağı geliştirilmesi, eleman tipine göre ağ optimizasyonu ve ele alınan problemin özelliklerine göre sonlu eleman ağlarının düzenlenmesi şeklinde genel bir sınıflandırmaya tabi tutulabilir. Üç boyutlu ağlarla ilgili olarak Berry (1989), Botkin (1992), Golias ve Tsiboukis (1992), Boender ve ark., (1994) çeşitli yöntemler önermişlerdir. Reddy ve ark., (1989) ise kiriş elemanlar kullanılarak üç boyutlu ağların otomatik olarak elde edilmesi için bir yöntem geliştirmiştir.

İstenen bölgelerde daha sık bir sonlu eleman ağı oluşturulması için ve sonlu eleman ağının alan değişkenlerinin gradyanına göre daha hassas yapılması için bir çok çalışmalar yapılmaktadır (Liu ve Chen 1989, Cescotto ve Wu 1989, Tsamasphyros ve Papaioannou, 1990, Henneberger ve ark., 1990, Yang ve Hoeltzel, 1991, Sezer ve

Zeid, 1991, Lo, 1992, Souza ve Gattass, 1993 ve Ait-Sadi ve Emson, 1994). Jin ve Wiberg (1990), Chew (1993) ve Min ve ark., (1995) çeşitli özelliklere sahip geometrilerin üçgen elemanlara ayrılması, Zhou ve ark., (1993) dörtgen elemanlarla ağ oluşturulması, Tembulkar ve Hanks (1992) üçgen elemanlarla oluşturulmuş bir sonlu elemanlar ağının dörtgen elemanlara dönüştürülmesi ve Kramer ve Hitchon (1996) üçgen ve dörtgen elemanların birlikte kullanılması konularında çeşitli çalışmalar yapmışlardır. Bern ve ark., (1991) ile Reichert et al, (1991) ise problemin en az eleman kullanılarak en iyi modellenmesi için öneriler sunmaktadır. Gürsoy ve Patrikalakis (1991) mevcut ticari sonlu eleman programlarına adapte edilebilecek bir yöntem önermektedirler.

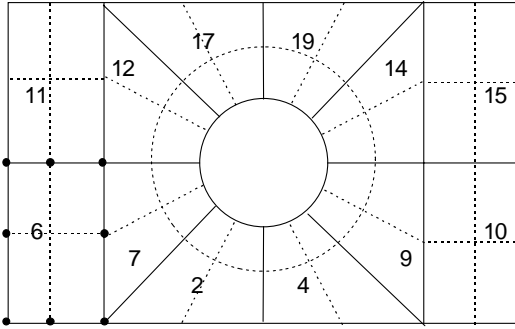
Problemin özelliğine göre ağ geliştirilmesi konusunda yapılan çalışmalar ise şöyle özetlenebilir: iki boyutlu ısı problemler için üçgen ve dörtgen elemanlarla ağ oluşturulması (Thornton ve Vemaganti, 1990), düzlem ve çubuk elemanlarla bir ve iki boyutlu ısı problemler (Tanabe, 1992), yumuşak biyolojik yapıların sonlu elemanlar metoduyla incelenmesi (O'Bara ve Ateshian, 1995), insan bacağına altı yüzlü elemanlarla modellenmesi (Moor et al, 1995), faz değişimli bir ısı ve kütle transferi probleminin modellenmesi (Keanini ve Desai, 1996), düzlemde dalga problemlerinin çözümü (Lee ve Cangellaris, 1992), kısa fiberle takviye edilmiş kompozit malzemeler için ağ optimizasyonu (Kim ve ark., 1993), yeraltı yapılarının analizi (Grabinsky ve Curran, 1993) ve yeraltı ve sızıntı sularının analizi (Botha ve Messerschmidt, 1992).

Bu çalışmada Zienkiewicz ve Philips (1971) tarafından önerilen ağ oluşturma yöntemi ile (Chandrupatla, Belegundu, 1991) verilen program temel alınmış buna 8 ve 9 düğüm için ilaveler yapılmış, Ayrıca oluşturulan geometriyi ekrana çizerek ağ bilgilerinin doğruluğunun kontrolü sağlanmıştır. Data girişi Ekran yerine data dosyasından okunur hale getirilmiş, bu şekilde düzlem gerilme, düzlem şekil değiştirme ve eksenel simetrik problemlerin sonlu elemanlar metoduyla analizinde kullanılabilecek yeni bir bilgisayar programı ortaya çıkmıştır. Bu program ile oluşturulmuş çeşitli sonlu eleman ağları. Şekil 7., 8., 9' da verilmiştir. Program 3 düğümlü üçgen, 4, 8 ve 9 düğümlü dörtgen elemanlar için ağ bilgilerini oluşturmakta ve elde edilen ağ ekranda görüntülemektedir.

## 2. YÖNTEM

### 2. 1. Bölge ve Blok Şeması

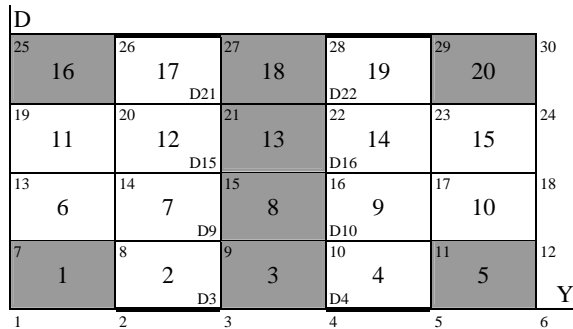
Ağ oluşturma işleminin temel mantığı, az sayıdaki anahtar noktalar için girilmiş olan elemanların süreklilik ve düğüm koordinat bilgilerinden yola çıkarak işlem yapılan bölgeyi istenen incelikte elemanlara ayırma olarak tanımlanabilir. Bu çalışma, sistemin işleyişi hakkında teorik bilgileri ve ağ oluşturma işleminde bilgisayar çözümünü içermektedir.



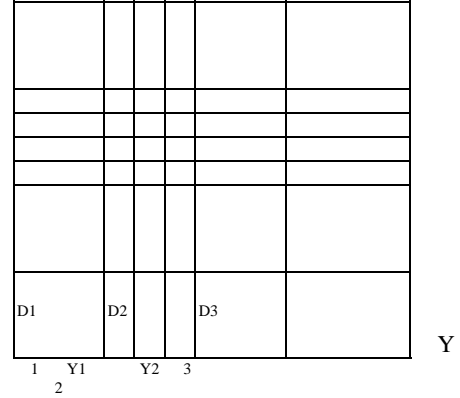
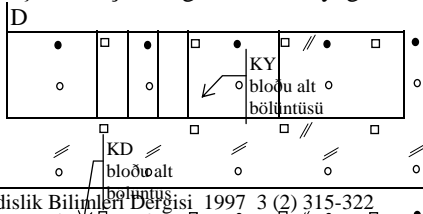
Şekil 1. Ortasında delik bulunan dikdörtgen levha için örnek alt blok bölüntüsü

Bu yöntemde genel olarak kompleks bir bölge, küçük dikdörtgen bloklardan meydana gelmiş, bir dikdörtgen model olarak ele alınır. Dikdörtgen bloklardan bazıları boşaltılır ve bazı kenarlar birleştirilerek istenen şekil elde edilir. Şekil 1'de verilen bölgeyi göz önüne alalım. Blok şemasını oluşturmak için daha küçük dikdörtgen bloklardan oluşan bütün bir dikdörtgen blok modeli Şekil 2'de görülmektedir. Bölgelerin tanımlanabilmesi için 1, 3, 5, 8, 13, 16, 18 ve 20 numaralı bloklar boş blok olarak alınmalı ve koyu çizgi ile belirtilen kenarlar karşılıklı olarak birleştirilmelidir.

Şekil 3'de dikdörtgen bloklardan oluşmuş bir tüm dikdörtgen modelin genel konfigürasyonu görülmektedir. Model yatay (Y)-düşey (D) eksen takımına yerleştirilmiştir. Aralık numaraları ND ve



Şekil 2. Şekil 1 için bölge ve blok diyagramı



Şekil 3. Düğüm, blok ve kenarların numaralandırılması.

NY olarak adlandırılmıştır. Ağ oluştururken her aralık alt bölümlere ayrılır. Sırasıyla düşey ve yatay eksendeki aralık sayıları (KD ve KY) olmak üzere aralıklarının alt bölümleri NDD (KD) ve NYD (KY) olarak adlandırılmıştır.

Düğümler numaralandırılırken ilk noktadan başlanarak Y yönünde ilerlemek şartıyla numaralar verilir. İlk sıra bittiğinde D yönündeki sonraki sıranın ilk düğümünden itibaren aynı işlem tekrar edilir. Sonlu Eleman Modeli koordinat eksenine yerleştirirken dikkat edilecek nokta, aralık sayısı az olan tarafın Y eksenine üzerine oturmasıdır. Bunun nedeni, bir blok üzerinde bulunan düğümlerin numaraları arasındaki farkın minimum olmasını sağlamaktır. Sonlu eleman metodunda, elemanlar için hesaplanmış rijitlik matrisleri genel rijitlik matrisi içine yerleştirilirken düğüm numaralarına bağlı sistematik içinde yerleştirilmektedir. Bir elemanın düğümleri arasındaki farkın büyümesi, genel matriste yerleştirilen değerlerin dağınık olmasına sebep olmakta, bu da gerekli bilgisayar kapasitesinin artmasına ve çözüm zamanının uzamasına yol açarak yapılacak hesapları zorlaştırmaktadır. Program numaralandırmayı yatay eksenden başlayarak yaptığından az sayıda düğüm bulunan kenarın yatay eksene yerleştirilmesi elde edilecek matrisin daha düzgün olmasını sağlamaktadır.

Y ve D yönündeki toplam düğüm sayısı:

$$NNY = 1 + \sum_{KY=1}^{NY} NYD(KY) \quad (1)$$

$$NND = 1 + \sum_{KD=1}^{ND} NDD(KD) \quad (2)$$

mümkün olan maksimum düğüm sayısı ise:

$$NNT = NNY \times NND \quad (3)$$

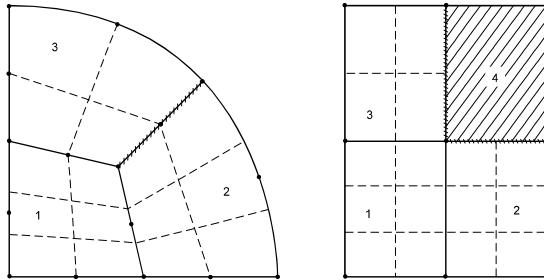
olarak ifade edilir.

Problemdeki düğümlerin tanımlanması için bir dizi oluşturulur. Ayrıca blokların tanımlanması için de bir dizi kullanılmaktadır. Bu dizi blokların malzeme numaralarını içermektedir. Eğer bir blok için bu değer sıfır olursa o blok boşaltılmış demektir. Normalde mevcut bloklar için bu değer 1'dir. Farklı özelliklerdeki malzemelerden oluşmuş bir bölge üzerinde inceleme yapıyorsak, farklı bölgeler için farklı malzeme numaraları verilmesi gerekmektedir.

Blok şeması üzerinde tanımlanmış olduğumuz tüm blok köşe düğümlerinin x ve y koordinatları ile alt blokların herbirinde bulunması muhtemel eğri kenarların orta nokta koordinatları da bilgi olarak girilmektedir. İlk olarak tüm kenarlar orta düğümleri, köşe düğümleri arasındaki doğrunun orta noktasında bulunan doğrusal kenarlar olarak kabul edilerek, orta düğümlerin x ve y koordinatları hesaplanır. Daha sonra eğrisel kenarlar için orta düğüm koordinatları girildiğinde, bu gerçek değerler dizideki daha önceden kabul edilmiş bulunan değerlerin yerini alır. Daha sonra birleştirilecek kenarlar önceden verilen bilgilere göre işlenir.

## 2.2. Düğümlerin Numaralandırılması

Düğümlerin numaralandırılışını bir örnek üzerinde açıklamak yerinde olacaktır. Şekil 4'de bir örnek problem için bölge ve ona ait blok şeması görülmektedir. Düğümlerin numaralandırılmış şekli ise Şekil 5'te verilmiştir. Yatayda 2 ve düşeyde de 2 blok vardır. 4 Numaralı blok ise boşaltılmıştır. Oluşabilecek en büyük düğüm numarası 30'dur. birleştirilecek kenarlar olmaktadır. Düğüm numaralarını içeren dizindeki her değişkene önce (-1) değeri verilir.



Şekil 4. Düğüm numaralandırılması için örnek problem.

Bunun anlamı her düğümün mevcut ve bağımsız olduğudur. Daha sonra boş blok üzerinde mevcut olmayan noktalar varsa, bu noktaların dizideki

yerlerine 0 değeri konur. Örnekte 24, 25, 29 ve 30 numaralı düğümler mevcut değildir. Bu düğümlerin dizideki yerleri sıfırlanır. Birleştirilmiş kenarların varlığı kontrol edilir. Eğer böyle kenarlar varsa, birleştirilecek iki kenardan düğüm numaraları büyük olan kenar üzerindeki her bir düğümün dizideki yerine,

birleştirilecek olan diğer kenar üzerindeki karşılık düğümünün numarası konur. Düğüm numaraları küçük olan kenar için bir işlem yapılmaz. Sonuç olarak, düğüm numaraları büyük olan kenar, değeri üzerine taşınmış olur.

Düğümlerden bazıları yok edildiği için düğüm numaraları arasındaki ardışıklık bozulmuştur. Bu yüzden mevcut düğümlerin yeniden numaralandırılması gerekmektedir. Numaralandırma işlemine 1'den başlanır, düğüm numaraları dizisinde değeri negatif olan düğümler 1'er artırılarak numaralandırılır. Eğer düğümün değeri sıfır ise o düğüme numara verilmez, dizideki yeri sıfır olarak kalır. Değeri pozitif olan düğümün ise birleştirilmiş (taşınmış) bir düğüm olduğu bilindiğinden, karşılık düğümünün dizideki yeni değeri verilir. Numaralandırma işlemi bu şekilde tamamlanır. Şekil 5a'da düğüm numaraları dizisinin genel hali görülmektedir. Buradaki değerler blok şemasındaki düğümlere hiç bir işlem yapılmadan önce verilmiş numaralardır. Şekil 5b'de ise dizinin tüm düğümler için (-1) değeri verildikten sonra, olmayan düğümler için sıfır, taşınmış düğümler için ise karşılık düğümünün numarası verilmiş durumu görülmektedir. Son basamakta yapılan işlemden sonra düğümlerin aldığı gerçek numaralar Şekil 5c'de görülmektedir.

## 2.3. Koordinatların Bulunması

Bölge üzerindeki herhangi bir bloğu alt bölümlere ayırdığımızda oluşan kesişim noktalarındaki alt düğümlerin koordinatlarının hesaplanması gerekmektedir. İncelenen blok için 8 temel düğümün (4'ü köşe, 4'ü orta) X ve Y koordinatları tarafımızdan girilmiş olduğu için bilinmektedir. Y-D koordinat sisteminde blok üzerinde bulunan bir  $N_1$  alt düğümünün, diğer 8 düğümle olan ilişkisi biliniyorsa, şekil fonksiyonları yardımıyla bu düğümün X ve Y koordinatları bulunabilir.

Bölge üzerindeki bir blok alt bölümlere ayrıldığında, alt bölümler Y-D düzleminde eşit aralıklarla oluşturulur. Bu bilgi, düğümlerin X ve Y koordinatlarının hesaplanabilmesi için yeterlidir.

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} -1 & -1 & 20 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 19 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 18 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 23 & 24 & 20 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 19 & 0 & 0 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \right\} \\ \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \end{matrix}$$

Şekil 5. Düğümlerin numaralandırılması.

Bu veriler doğrultusunda  $N_1$  düğümünün X ve Y koordinatları

$$X = \sum_{I=1}^8 SH(I) \cdot X(I) \quad (4)$$

$$Y = \sum_{I=1}^8 SH(I) \cdot Y(I)$$

yardımıyla hesaplanabilir. Burada,  $SH(I)$ ,  $X(I)$ ,  $Y(I)$ ,  $I=1, 2, 3, \dots, 8$  olmak üzere sırasıyla şekil fonksiyonlarını ve blok içindeki 8 temel düğümün koordinatlarını göstermektedir. 8 düğümlü izoparametrik eleman için şekil fonksiyonları

$$SH(1) = \frac{-(1-\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1+\xi+\eta)}{4} \quad (5)$$

$$SH(2) = \frac{(1-\xi^2) \cdot (1-\eta)}{2} \quad (6)$$

$$SH(3) = \frac{-(1+\xi) \cdot (1-\eta) \cdot (1-\xi+\eta)}{4} \quad (7)$$

$$SH(4) = \frac{(1+\xi) \cdot (1-\eta^2)}{2} \quad (8)$$

$$SH(5) = \frac{-(1+\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1-\xi-\eta)}{4} \quad (9)$$

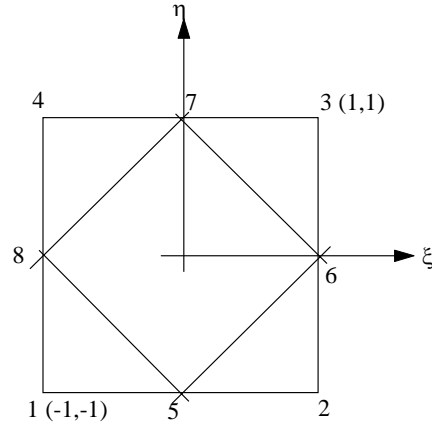
$$SH(6) = \frac{(1-\xi^2) \cdot (1+\eta)}{2} \quad (10)$$

$$SH(7) = \frac{-(1-\xi) \cdot (1+\eta) \cdot (1+\xi-\eta)}{4} \quad (11)$$

$$SH(8) = \frac{(1-\xi) \cdot (1-\eta^2)}{2} \quad (12)$$

şeklinde. Burada  $\eta$  ve  $\xi$  lokal koordinatlarda bir eleman için eksen takımındır (Şekil 6). Alt bölümlere ayrılmış bir blok üzerindeki bir  $N_1$  düğümünün  $\eta$  ve  $\xi$  koordinatları yukarıda verilmiş olan formüllerle

bulunur. Bu değerler  $N_1$  düğümünün Y-D düzleminde, 8 temel düğüm ile olan uzaklık ilişkisini göstermektedir. Alt bölümlerden dolayı oluşan bu alt düğümlerin X ve Y koordinatlarının hesaplanmasıyla, bölge üzerindeki tüm düğümlerin koordinatları bulunmuş olur. Son işlem olarak ilgili noktalar birleştirilir ve ağ oluşturulur.



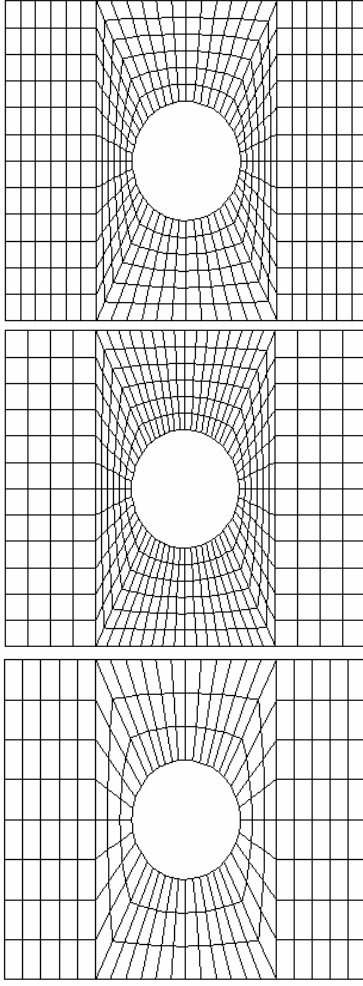
Şekil 6. 8 düğümlü izoparametrik eleman

### 3. ÖRNEKLER

Şekil.1 deki delikli levhanın dört düğümlü dörtgen elemanlarla sonlu eleman ağının oluşturulması için gerekli bilgiler girildikten sonra hazırlanan program aşağıda verilen çıktıları oluşturmaktadır.

- Düğüm Sayısı
- Eleman Sayısı
- Yarı Bant Genişliği
- Düğüm Koordinatları
- Eleman Düğüm Numaraları

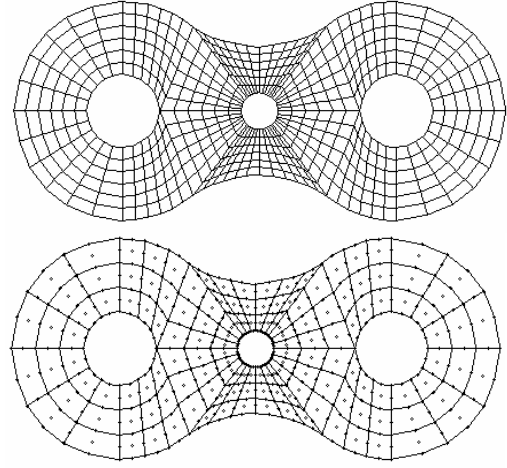
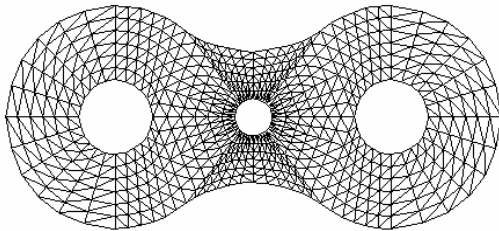
Şekil 7'de ele alınan ortası delikli dikdörtgen levha için elde edilen, çeşitli sıklıklara sahip ağlar verilmiştir. Eleman düğüm sayısı değiştirilerek ağın eleman yapısı değiştirilebileceği gibi, yatay ve dikey blokların bölüntü sayıları değiştirilerek de istenen



Şekil 7. Ortası delikli dikdörtgen levha

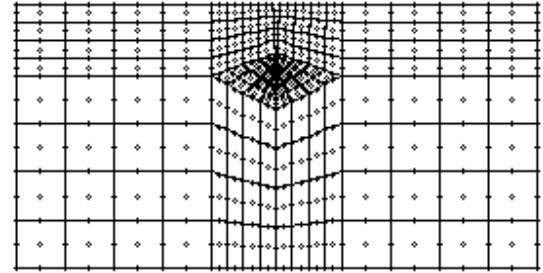
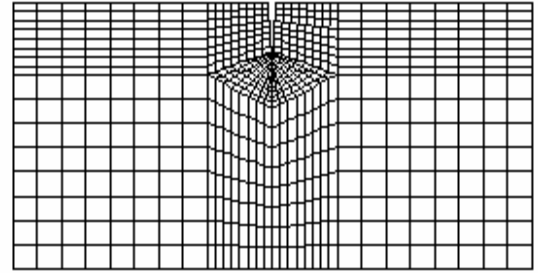
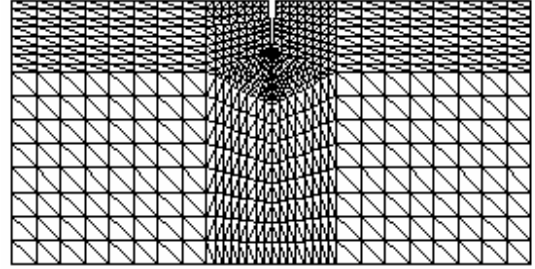
bölgede istenen sıklıkta ağ oluşturulabilmektedir. Sonlu eleman problemlerindeki Boyut problemlerine yardımcı olmak için yarıbant genişliğini de hesaplamaktadır.

Şekil 8'de ise eğri dış kenarlara ve çeşitli sayıda deliklere sahip bir levhanın üçgen, 4 ve 9 düğümlü dörtgen elemanlarla hazırlanmış sonlu eleman ağları verilmiştir. Bütün ağlar için düğüm sayısı 658 olup eleman sayıları, üçgen elemanlarla oluşturulmuş ağ için 1152, 4 düğümlü elemanlarla oluşturulmuş ağ için 576 ve 9 düğümlü elemanlarla oluşturulmuş ağ için 144'dür. Yarı bant genişliği ise sırasıyla 314, 314 ve 315 olmaktadır.



Şekil 8. Eğri dış kenarlara ve çeşitli sayıda deliklere sahip bir levhanın üçgen ve 4 ve 9 düğümlü dörtgen elemanlarla hazırlanmış sonlu eleman ağları

Şekil 9 da kırılma mekaniği analizi için hazırlanmış sonlu eleman ağları verilmiştir. Burada da düğüm sayıları her üç ağ için de 705 olup eleman sayıları sırasıyla 1280, 640 ve 160'tır. Yarı bant genişliği ise 91, 91 ve 109 olmaktadır.



Şekil 9. Kırılma mekaniği analizi için hazırlanmış sonlu eleman ağları. Üçgen, 4 düğümlü ve 9 düğümlü dörtgen elemanlar

## 4. SONUÇ

Bu çalışmada nümerik yöntemlerle yapılan analizin ilk basamağı olan çözüm bölgesi için ağ geliştirme üzerinde durulmuş ve bu amaçla geliştirilen yöntem kullanılarak bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Çalışmada ele alınan geometrinin mümkün olduğu kadar iyi modellenmesinin yanında analiz sırasında meydana gelecek denklem sistemi ve bu sistemde oluşan genel matrislerin de homojen hale getirilmesi ve çözüm zamanının azaltılması düşünülmüştür. Geliştirilen yöntemle her türlü geometrinin üçgen ve 4 veya 9 düğümlü dörtgen elemanlara bölünmesi mümkün olduğu gibi, alan değişkenlerinin çözüm bölgesindeki dağılımı da dikkate alınarak çeşitli ağ inceltme işlemleri de yapılabilmektedir.

## 5. KAYNAKLAR

- Ait-Sadi, R., Emson, C. R. L. 1994. Three step refinement process for automatic 2-D mesh adaption. **IEE Conference Publication (384). Publ by IEE, Michael Faraday House**, Stevenage, Engl. 215-218
- Bathe, K. J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Inc. 727p, USA
- Bern, M., Eppstein, D., Gilbert, J. 1991. Provably Good Mesh Generation. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 27 (1), 231-241.
- Berry, K. J. 1989. Parametric 3D finite-element Mesh Generation. *Comp. and Struc.* 33 (4), 969-976.
- Boender, E., Bronsvort, W. F., Post, F. H. 1994. Finite-Element Mesh Generation From Constructive-Solid-Geometry Models. *Computer Aided Design* 26 (5), 379-392
- Botkin, M. E. 1992. Three-dimensional shape optimization using fully automatic mesh generation. *AIAA J.* 30 (7) 1932-1934
- Buys, J., Botha, J. F., Messerschmidt, H. J. 1992. "Triangular Finite Element Meshes and Their Application in Ground-water Research" **Computational Methods in Subsurface Hydrology Proc 8 Int Conf Comput Method Water Resour. Publ by Springer-Verlag Berlin**, Dept ZSW, Berlin 33, GER. 115-121.
- Chantrapatla, T. R., Belegundu, A. D. 1991. Introduction to Finite Element in Engineering. Prentice Hall Inc., 416 p, USA.
- Chew, L. P. 1993. "Guaranteed-quality Mesh Generation for Curved Surfaces" **Proceedings of the 9th Annual Symposium on Computational Geometry Proc. 9th Annu. Symp. Comput. Geom. Publ by ACM**, New York, NY, USA. p 274-280.
- Golias, N. A., Tsiboukis, T. D. 1992. Three-Dimensional Automatic Adaptive Mesh Generation. *IEEE Transactions on Magnetics* 28 (2), 1700-1703.
- Grabinsky, M. W. F., Curran, J. H. 1993. Efficient Mesh Generation Procedures for Finite Element Analysis of Underground Structures. *Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts* 30 (6), 591-600.
- Guersoy, H. N., Patrikalakis, N. M. 1991. Automated Interrogation and Adaptive Subdivision of Shape Using Medial Axis Transform. *Advances in Eng. Software and Workstations* 13 (5-6), 287-302.
- Huebner, K. H., Thornton, E. A., 1982, The Finite Element Method for Engineers, John Wiley and Sons) 623 p, USA.
- Jin, H., Wiberg, N. E. 1990. Two-dimensional Mesh Generation, Adaptive Remeshing and Refinement. *Int. J. Numerical Methods in Eng.* 29 (7), 1501-1526.
- Keanini, R. G., Desai, N. N. 1996. Inverse Finite Element Reduced Mesh Method for Predicting Multi-dimensional Phase Change Boundaries and Nonlinear Solid Phase Heat Transfer, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 39 (5), 1039-1049.
- Kim, H. G., Grosse, Ian R., Nair, S. V. 1993. Error Estimation and Mesh Optimization for Finite Element Analysis of Short Fiber Reinforced Composite Materials. **Computers in Eng., Proceedings of the Int. Computers in Eng. Conference and Exhibit 2. Publ by ASME**, New York, NY, USA. 123-130.
- Kramer, K. M., Hitchon, W. N. G. 1996. Strategies for Mesh-handling and Model Specification Within a Highly Flexible Simulation Framework. *Computer Physics Communications* 93 (2-3), 179-211.
- Lee, R., Cangellaris, A. C. 1992. A Study of Discretization Error in the Finite Element Approximation of Wave Solutions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 40 (5), 542-549.
- Liu, Y., Chen, K. 1989. More Findings in Using the Program a Versatile Two-dimensional Mesh Generator with Automatic Bandwidth Reduction. *Comp. and Struc.* 32 (1), 145-147.

- Lo, S. H. 1992. Generation of High-quality Gradation Finite Element Mesh. *Eng. Fracture Mechanics* 41 (2), 191-202.
- Min, W., Tang, Z., Zhang, Z., Zhou, Y., Wang, M. 1995. New Approach to Fully Automatic Mesh Generation. *J. Computer Science and Technology* 10 (6), 491-508.
- Moor, E. H., Schauer, D. A., Weiss, J. A. 1995. "Mesh Generation for a Finite Element Model of the Human leg" **ASME, Bioengineering Division, BED (29)** New York, NY, USA. 51-52
- O' Bara, R. M., Ateshian, G. A. 1995. Geometric "Model Construction and Mesh Generation for Soft Tissues in Joints" **ASME, Bioengineering Division, BED (29)** New York, NY, USA. 215-216.
- Reddy, V. A. K., Kumar, R., Sharma, S. P. 1989. Mesh Generation and Graphic Check for 3D Building Frames. *Comp. and Struc.* 32 (2), 445-452.
- Reichert, K., Skoczylas, J., Tarnhuvud, T. 1991. Automatic Mesh Generation Based on Expert-System-methods. *IEEE Transactions on Magnetics* 27 (5), 4197-4200.
- Souza, L. T., Gattass, M. 1993. New scheme for Mesh Generation and Mesh Refinement Using Graph Theory. *Comp. and Struc.* 46 (6), 1073-1084
- Tanabe, M. 1992. Simple and Efficient Algorithm of Automatic Mesh Generation for a General Plate and Frame Structure With Holes. *Computational Mechanics* 9 (3), 185-194.
- Tembulkar, J. M., Hanks, B. W. 1992. On Generating Quadrilateral Elements from a Triangular Mesh. *Computers and Structures* 42 (4), 665-667.
- Thornton, E. A., Vemaganti, G. R. 1990. Adaptive Remeshing Method for Finite-element Thermal Analysis. *J. Thermophysics and Heat Transfer* 4 (2), 212-220.
- Zhou, J. M., Shao, K. R., Zhou, K. D., Li, L. R. 1993. New Approach to Automatic Quadrilateral Mesh Generation. *IEEE Transactions on Magnetics* 29 (2), 1910-1913.
- Zhu, J. Z., Zienkiewicz, O. C., Hinton, E., Wu, J. 1991. New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation. *Int. J. Numerical Methods in Engineering* 32 (4), 849-866.
- Zienkiewicz, O. C. 1991. Adaptivity and Mesh Generation. *Int. J. Numerical Methods in Engineering* 32 (4), 783-810 .
- Zienkiewicz, O. C., Philips, D. V. 1971. An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surfaces by Isoparametric Coordinates. *Int. J. Numerical Methods in Engineering* (3), 519-528.